	4TPU210U Analyse **Exemple de sujet d'examen** **Durée : 3h** Documents non autorisés.	**Collège Sciences et Technologies**

Question et démonstration de cours

1. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires (on ne demande pas de démonstration).
2. Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. On suppose qu'elle admet un maximum en $c \in]a, b[$. On sait qu'alors $f'(c) = 0$. Les questions qui suivent visent à donner la démonstration de ce résultat.
   (a) Montrer que pour tout $x \in]a, c[$, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$. En déduire que
   $$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$
   (b) Montrer que $\lim_{x \to c^+} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$.
   (c) Conclure que $f'(c) = 0$.

Exercice 1

Soit f une fonction définie et $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire, f est 2 fois dérivable et la dérivée seconde de f est continue sur $\mathbb{R}$). On suppose que f s'annule 3 fois, justifier que sa dérivée seconde $f^{(2)}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

1. Ecrire la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 1 de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ en 0.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1 + x) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 3

On rappelle que le développement limité d'ordre 4 en 0 de $t \mapsto e^t$ est

$$e^t = \sum_{k=0}^{4} \frac{t^k}{k!} + t^4 \varepsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

1. En déduire le développement limité d'ordre 4 en 0 de $x \mapsto e^x + e^{-x}$.
2. Donner le développement limité d'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \cos(x)$.
3. On note $h(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos(x)$. Justifier que la courbe représentative de h admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0. Déterminer la position locale de la courbe par rapport à la tangente.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{\cos(x)-1}$.

Exercice 4

On note $I = \int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x)\, dx$.

1. En faisant 2 intégrations par parties successives, calculer I.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\left(\frac{k}{n}\frac{\pi}{2}\right)$. Montrer que la suite $(S_n)_n$ converge et calculer la limite.
   Remarque : on pourra exprimer la limite en fonction de I si la première question n'a pas été traitée.

Exercice 5

1. En remarquant que $\frac{t^3}{1+t^2} = t - \frac{t}{1+t^2}$, calculer $J = \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}\, dt$.
2. Donner le domaine $\mathcal{D}$ de définition et dérivabilité de la fonction tan puis vérifier que
$$\forall x \in \mathcal{D} \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x).$$
3. À l'aide du changement de variable $t = \tan(x)$, calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^3(x)\, dx$.
   Remarque : on pourra exprimer le résultat en fonction de J si la première question n'a pas été traitée.

Exercice 6

Pour $n \geq 1$, soit $a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$.

1. Est-ce que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est monotone ? Justifier en détail.
2. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ converge (il n'est pas demandé de trouver la limite).
3. Justifier que
$$\frac{1}{2} \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty} a_n \quad \leq \quad 1.$$