EXEMPLES DE FEUILLETAGES DE LIE

HAMIDOU DATHE AND JEAN-FRANÇOIS QUINT

ABSTRACT. We give examples of Lie foliations on compact manifolds which cannot be deformed into Lie foliations with discrete holonomy.

RÉSUMÉ. Nous donnons des exemples de feuilletages de Lie sur une variété compacte qui ne se déforment pas en des feuilletages de Lie à holonomie discrète.

1. INTRODUCTION

Soient V une variété compacte connexe et G un groupe de Lie (simplement connexe). Un G-feuilletage de Lie de V est la donnée d'un ensemble $\mathcal{F}$ de couples (U, f), où U est un ouvert de V et $f : U \to G$ une submersion, ayant les propriétés suivantes : *(i)* les ouverts U recouvrent V ; *(ii)* pour tous (U, f) et (W, h) dans $\mathcal{F}$, il existe g dans G tel que, pour tout x dans $U \cap W$, on ait $f(x) = h(x)g$. En particulier, les surfaces de niveau des submersions f, pour (U, f) dans $\mathcal{F}$, se recollent pour former un feuilletage de V. Pour éviter les ambiguïtés, on supposera en outre que $\mathcal{F}$ est maximal au sens suivant : si U est un ouvert de V et $f : U \to G$ une submersion, si, pour tout (W, h) dans $\mathcal{F}$, il existe g dans G avec $f = h \cdot g$ sur $U \cap W$, on a $(U, f) \in \mathcal{F}$.

Supposons V munie d'un tel feuilletage. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, identifiée à l'algèbre des champs de vecteurs invariants à droite de G. Soient x un point de V et (U, f) dans $\mathcal{F}$ tel que $x \in U$. Notons $\omega_x = \mathrm{d}f_x \in \mathrm{T}^*_x V \otimes \mathfrak{g}$: il ne dépend que de x. La 1-forme à coefficients dans $\mathfrak{g}$ ainsi définie vérifie $\mathrm{d}\omega + [\omega, \omega] = 0$ (où $[\omega, \omega]$ est la 2-forme définie par $[\omega, \omega]_x(v, w) = [\omega_x(v), \omega_x(w)]$, $x \in V$, $v, w \in \mathrm{T}_x V$). Réciproquement, une section du fibré $\mathrm{T}^*V \otimes \mathfrak{g}$ partout surjective et satisfaisant à cette relation définit un feuilletage de Lie sur V. En particulier, l'espace $\mathcal{F}(G, V)$ des G-feuilletages de Lie de V s'identifie ainsi à un sous-ensemble de l'espace des sections du fibré $\mathrm{T}^*_x V \otimes \mathfrak{g}$ qui est localement fermé pour la topologie de la convergence uniforme ; on le munit de la topologie induite par celle-ci.

Soient $\tilde{V}$ le revêtement universel de V, $\tilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage relevé d'un G-feuilletage $\mathcal{F}$ et $\tilde{\omega}$ la 1-forme associée. Fixons un point x_0 de V et un relevé $\tilde{x_0}$ de x_0, et notons Γ le groupe fondamental de V en x_0, qui agit naturellement sur $\tilde{V}$. Il existe alors une submersion $D : \tilde{V} \to G$ avec $D(\tilde{x_0}) = e$ et un morphisme $h : \Gamma \to G$ tels que $\tilde{\omega} = \mathrm{d}D$ et que, pour tout x dans $\tilde{V}$ et pour tout γ dans Γ, on ait $D(\gamma x) = D(x)h(\gamma)^{-1}$. Les couples (D', h') associés aux autres choix de points bases sont de la forme $x \mapsto (D(x)g, g^{-1}h(x)g)$ où g est un élément de G. Par abus de langage, on dit que D est la développante de $\mathcal{F}$ et h son holonomie. Réciproquement, la donnée d'un couple (D, h) où D est une submersion de $\tilde{V}$ dans G et h un morphisme de Γ dans G ayant les propriétés ci-dessus définit bien un G-feuilletage de Lie de V.

Le groupe Γ étant de type fini, l'ensemble des homomorphismes de Γ dans G possède une topologie localement compacte naturelle. L'application qui associe à un feuilletage son holonomie en $\tilde{x_0}$ est continue pour cette topologie.

Ces notions et ces résultats sont dus principalement à E. Fedida. Le lecteur en trouvera un exposé détaillé dans le livre de P. Molino, [9, 4.2].

Exemple 1.1. *Si G est $\mathbb{R}$, l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, V)$ est l'ensemble des 1-formes fermées non-singulières sur V. Étant donnés une telle 1-forme ω et un lacet γ d'origine x_0, l'image de γ par le morphisme d'holonomie associé est l'intégrale de ω le long de γ.*

Beaucoup d'information sur la topologie du feuilletage $\mathcal{F}$ est donnée par le morphisme d'holonomie h. Si h est d'image dense, les feuilles sont denses. Si h est d'image discrète, les feuilles sont fermées : la développante D se factorise alors en effet en une submersion $V \to G/h(\Gamma)$. En particulier, dans ce cas, $h(\Gamma)$ est un réseau co-compact de G.

Dans [12], D. Tischler a montré que, si G était abélien, tout G-feuilletage se déformait dans $\mathcal{F}(G, V)$ en des feuilletages à holonomie discrète. Dans [7], D. Lehmann a montré que ce résultat était faux si G était le groupe de Heisenberg. Dans cet article, nous reconstruisons le contre-exemple de Lehman par un procédé légèrement différent grâce auquel nous pouvons étendre son résultat à tous les groupes de Lie nilpotents non abéliens. Ce procédé nous permet par ailleurs d'énoncer un résultat analogue sur les groupes simples. Enfin, dans le cas particulier du groupe de Heisenberg, nous montrons comment le feuilletage de Lehmann peut s'obtenir par déformation d'un $\mathbb{R}^3$-feuilletage de Lie.

Nos constructions reposent toutes sur le principe général suivant, énoncé par E. Ghys dans [5, § 1] : étant donnés H un autre groupe de Lie, Γ un réseau co-compact de H et $\varphi : H \to G$ un morphisme surjectif, les orbites du noyau de φ dans H/Γ forment naturellement un G-feuilletage de Lie de cette variété dont le morphisme d'holonomie est la restriction de φ à Γ. Il s'agit donc de construire des réseaux dans des groupes de Lie adéquats et de contrôler leurs images par des morphismes : ceci se fait, dans le cas nilpotent, par le théorème de rigidité de Mal'cev, suivant la méthode utilisée par A. Haefliger dans [6, 1.4], et, dans le cas semi-simple, par le théorème de super-rigidité de Margulis.

Nous tenons à remercier E. Ghys dont les remarques et les suggestions nous ont permis d'améliorer sensiblement la qualité de ce texte.

2. Groupes algébriques et réseaux

Rappelons que, si G est un groupe localement compact, un réseau de G est un sous-groupe discret Γ de G tel que le quotient G/Γ possède une mesure G-invariante finie. En particulier, un sous-groupe discret co-compact est un réseau. Nos constructions de feuilletages reposant sur l'existence de certains types particuliers de réseaux, nous rappelons dans cette section des techniques générales de construction de réseaux dans les groupes de Lie. Le lecteur pourra se référer à [11] pour le vocabulaire arithmétique et à [1] pour la théorie des groupes algébriques.

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On dit qu'un sous-groupe fermé $\mathbf{G}$ de $\mathrm{GL}(V)$ est algébrique si et seulement si, étant donnée une base de V, le groupe $\mathbf{G}$ est défini par des équations polynomiales en fonction des coefficients des éléments de $\mathrm{GL}(V)$ dans la base. On dit qu'un groupe algébrique est Zariski connexe si et seulement s'il ne contient pas de sous-groupe algébrique ouvert strict. Si $\mathbf{G}$ est un sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}(V)$ et $\mathbf{H}$ un sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}(W)$ un morphisme de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{H}$ est dit rationnel si ses coordonnées sont des fractions rationnelles en les coefficients des matrices des éléments de $\mathbf{G}$ dans une base.

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. Une $\mathbb{K}$-structure sur V est la donnée d'un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel $V_{\mathbb{K}}$ de V tel que $V_{\mathbb{K}}$ soit $\mathbb{K}$-engendré par une $\mathbb{C}$-base de V, c'est-à-dire tel que $V = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{K}} V_{\mathbb{K}}$. Si $\mathbf{G}$ est un sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}(V)$, une $\mathbb{K}$-structure sur $\mathbf{G}$ est le choix d'une $\mathbb{K}$-structure $V_{\mathbb{K}}$ de V telle que les équations définissant $\mathbf{G}$ en fonctions des coefficients des matrices dans une $\mathbb{K}$-base de $V_{\mathbb{K}}$ puissent être choisies à coefficients dans $\mathbb{K}$. Le groupe $\mathbf{G}$ étant muni d'une $\mathbb{K}$-structure, on note $\mathbf{G}(\mathbb{K})$ l'ensemble de ses éléments dont les matrices dans une $\mathbb{K}$-base de $V_{\mathbb{K}}$ sont à coefficients dans $\mathbb{K}$. On appelle $\mathbb{K}$-groupe algébrique un groupe algébrique $\mathbf{G}$ muni d'une $\mathbb{K}$-structure. On définit aussi la notion de $\mathbb{K}$-morphisme rationnel de $\mathbb{K}$-groupes algébriques.

Soit $\mathbf{G}$ un $\mathbb{K}$-groupe algébrique. On dit que $\mathbf{G}$ est unipotent si $\mathbf{G}$ est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes. D'après le théorème d'Ado, pour tout groupe de Lie nilpotent simplement connexe G, il existe un $\mathbb{R}$-groupe algébrique unipotent $\mathbf{G}$, unique à isomorphisme rationnel près, tel que $\mathbf{G}(\mathbb{R}) = G$.

On dit que $\mathbf{G}$ est semi-simple si tous ses sous-groupes algébriques, Zariski connexes, résolubles et distingués sont triviaux, ce qui revient à dire que le groupe de Lie $\mathbf{G}(\mathbb{C})$ est semi-simple. Si G est un groupe de Lie semi-simple linéaire connexe, il existe un unique $\mathbb{R}$-groupe algébrique semi-simple tel que $\mathbf{G}(\mathbb{R})^{\circ} = G$.

Enfin, notons $\mathbf{G}_m$ le $\mathbb{Q}$-groupe algébrique GL_1, c'est-à-dire que, pour tout sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$, on a $\mathbf{G}_m(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^*, \times)$. Si $\mathbf{G}$ un $\mathbb{K}$-groupe algébrique semi-simple, on dit que $\mathbf{G}$ est $\mathbb{K}$-anisotrope s'il n'existe pas de $\mathbb{K}$-morphisme non trivial de $\mathbf{G}_m$ dans $\mathbf{G}$. On dit sinon qu'il est $\mathbb{K}$-isotrope. Un $\mathbb{R}$-groupe est anisotrope si et seulement si $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ est compact.

Remarque 2.1. Si q est une forme quadratique sur $\mathbb{K}$, en dimension supérieure à 3, son groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(q)$ est un $\mathbb{K}$-groupe algébrique. Il est semi-simple si et seulement si q est non dégénérée. Il est anisotrope si et seulement si q est anisotrope.

Observons que, si $V_{\mathbb{K}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, on peut voir la donnée d'un $\mathbb{K}$-sous-groupe algébrique $\mathbf{G}$ de $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{K}})$ comme celle d'une base de $V_{\mathbb{K}}$ et d'un jeu d'équations polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ en n^2 variables. En particulier, si σ est un plongement de $\mathbb{K}$ dans un sous-corps $\mathbb{L}$ de $\mathbb{C}$ (qui peut être distinct de l'injection canonique), on peut considérer le $\mathbb{L}$-groupe algébrique $\mathbf{G}^{\sigma}$ dont les équations sont les images de celles de $\mathbf{G}$ par le morphisme σ : il ne dépend que de $\mathbf{G}$ et de σ, et pas du choix de la base et des équations. On dit que le $\mathbb{L}$-groupe $\mathbf{G}^{\sigma}$ est obtenu à partir du $\mathbb{K}$-groupe $\mathbf{G}$ par extension des scalaires à travers le morphisme σ.

Exemple 2.2. *Supposons que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et que $\mathbb{L}$ est $\mathbb{R}$. Notons σ le plongement de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ dans $\mathbb{R}$ qui envoie $\sqrt{2}$ sur $-\sqrt{2}$. Enfin, soit $\mathbf{G}$ le groupe des matrices de taille 2 et de déterminant 1 qui préservent la forme quadratique $x_1^2 + \sqrt{2}x_2^2$. Alors $\mathbf{G}^{\sigma}$ est le groupe des matrices de déterminant 1 qui préservent la forme quadratique $x_1^2 - \sqrt{2}x_2^2$. En particulier, comme groupe de Lie réel, $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathrm{SO}(2)$ tandis que $\mathbf{G}^{\sigma}(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathrm{SO}(1,1)$.*

Soient $\mathbb{K}$ un corps de nombres, c'est-à-dire une extension finie de $\mathbb{Q}$, et $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de $\mathbb{K}$. Soit n le degré de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{Q}$. Alors $\mathbb{K}$ possède r plongements réels et $2s$ plongements complexes non réels, avec $r + 2s = n$. Notons $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ les plongements réels et $\sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_{r+s}$ des représentants, à conjugaison complexe près, des plongements complexes non réels.

Soit $\mathbf{G}$ un $\mathbb{K}$-groupe algébrique connexe. Notons $\mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_r$ (resp. $\mathbf{G}_{r+1}, \ldots, \mathbf{G}_{r+s}$) les $\mathbb{R}$-groupes (resp. $\mathbb{C}$-groupes) obtenus à partir de $\mathbf{G}$ par extension des scalaires à travers $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ (resp. $\sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_{r+s}$). Pour $1 \leq i \leq r$ (resp. $r + 1 \leq i \leq r + s$), soit G_i le groupe de Lie $\mathbf{G}_i(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbf{G}_i(\mathbb{C})$) et soit G le produit $G_1 \times \ldots \times G_{r+s}$: on considérera, via le plongement diagonal, $\mathbf{G}(\mathbb{K})$ comme un sous-groupe de G. Par ailleurs, choisissons une $\mathbb{K}$-représentation fidèle ρ dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V, une base b de V et notons Γ l'ensemble des éléments g de $\mathbf{G}(\mathbb{K})$ tels que la matrice de $\rho(g)$ dans la base b soit à coefficients dans $\mathcal{O}$: c'est un sous-groupe de $\mathbf{G}(\mathbb{K})$. Le théorème suivant est démontré dans [3] :

Theoreme 2.3 (Borel-Harish-Chandra)**.** *Supposons que $\mathbf{G}$ ne possède pas de $\mathbb{K}$-morphisme non trivial dans $\mathbf{G}_m$. Alors, le groupe Γ est un réseau de G et, pour tout $1 \leq i \leq r + s$, sa projection sur $G_1 \times \ldots \times \widehat{G_i} \times \ldots \times G_{r+s}$ est dense. Si $\mathbf{G}$ est unipotent, Γ est co-compact. Si $\mathbf{G}$ est semi-simple, Γ est co-compact si et seulement si $\mathbf{G}$ est $\mathbb{K}$-anisotrope.*

Remarque 2.4. On vérifie facilement que la condition sur les morphismes dans $\mathbf{G}_m$ est nécessaire pour que Γ soit un réseau de G.

Exemple 2.5. *Si $\mathbb{K}$ est le sous-corps $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ de $\mathbb{R}$, on a $r = s = 1$, σ_1 est le plongement canonique et on peut choisir pour σ_2 le plongement défini par $\sigma_2(\sqrt[3]{2}) = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{2}$. Le théorème, appliqué au $\mathbb{K}$-groupe SL_2, assure alors que $\Gamma = \{(\sigma_1(\gamma), \sigma_2(\gamma)) | \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}])\}$ est un réseau non co-compact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.*

Explicitons un résultat qui nous permettra d'utiliser ce théorème. Donnons-nous à présent des $\mathbb{R}$-groupes presque simples $\mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_r$ et des $\mathbb{C}$-groupes presque simples $\mathbf{G}_{r+1}, \ldots, \mathbf{G}_{r+s}$, de sorte que ces groupes soient tous $\mathbb{C}$-isomorphes. D'après [2], on a le

Theoreme 2.6 (Borel-Harder)**.** *Il existe un $\mathbb{K}$-groupe $\mathbf{G}$ tel que les $\mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_r$ (resp. $\mathbf{G}_{r+1}, \ldots, \mathbf{G}_{r+s}$) soient les $\mathbb{R}$-groupes (resp. $\mathbb{C}$-groupes) obtenus à partir de $\mathbf{G}$ par extension des scalaires à travers $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ (resp. $\sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_{r+s}$).*

Exemple 2.7. *Le théorème fournit un $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$-groupe $\mathbf{G}$ tel que, si σ_1 et σ_2 sont les deux plongements décrits dans l'exemple précédent, le groupe de Lie $\mathbf{G}^{\sigma_1}(\mathbb{R})$ soit isomorphe à $\mathrm{SU}(2)$ et le groupe de Lie $\mathbf{G}^{\sigma_2}(\mathbb{C})$ à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.*

3. Feuilletages nilpotents

Si V est une variété compacte connexe et G un groupe de Lie, donner un G-feuilletage de Lie sur V à holonomie discrète revient à donner une submersion de V sur une variété G/Γ où Γ est un réseau co-compact de G. Dans cete section, généralisant le cas du groupe de Heisenberg, traité par Lehmann dans [7], nous démontrons le

Theoreme 3.1. *Soit G un groupe de Lie nilpotent non abélien (simplement connexe). Alors il existe une variété compacte possédant un G-feuilletage de Lie qui ne se déforme pas en une submersion sur un quotient de G par un réseau.*

La démonstration s'appuie sur la théorie de Mal'cev des réseaux des groupes nilpotents, pour laquelle nous renvoyons à [10]. Commençons par un lemme élémentaire, qui fait apparaître le rôle joué par le caractère non abélien de G :

Lemme 3.2. *Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ des algèbres de Lie et $\mathfrak{k}$ l'algèbre somme directe $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{i}$ un idéal de $\mathfrak{k}$ tel que $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{i}$, en tant qu'espace vectoriel. Alors, $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{g}$ commutent et l'on a $[\mathfrak{i}, \mathfrak{i}] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$.*

Démonstration. Comme $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{i}$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$, on a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{i}] \subset \mathfrak{g}$ et $[\mathfrak{g}, \mathfrak{i}] \subset \mathfrak{i}$: il vient bien $[\mathfrak{g}, \mathfrak{i}] = \{0\}$. En particulier, dans les sommes directes, les projections sont des morphismes d'algèbres de Lie.

Soient p la projection sur $\mathfrak{h}$ dans la somme directe $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ et q la projection sur $\mathfrak{i}$ dans la somme directe $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{i}$. Les restrictions de p à $\mathfrak{i}$ et de q à $\mathfrak{h}$ sont des isomorphismes réciproques.

Remarquons alors que l'on a $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{i}$. En effet, soient X et Y dans $\mathfrak{h}$. Il existe Z dans $\mathfrak{g}$ tel que $Y + Z$ appartienne à $\mathfrak{i}$. Comme $\mathfrak{i}$ est un idéal, on a $[X, Y] = [X, Y + Z] \in \mathfrak{i}$, ce qu'il fallait démontrer. On a alors $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{i} \cap \mathfrak{h}$ et, donc, $q([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. Or, comme $q_{|\mathfrak{h}}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{i}$ on a $q([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = [\mathfrak{i}, \mathfrak{i}]$, d'où le résultat. □

Nous utiliserons encore le

Lemme 3.3. *Soient G et H des groupes de Lie simplement connexes nilpotents et soit Γ un réseau de G. Si $\varphi : G \to H$ est un homomorphisme, $\varphi(\Gamma)$ est discret dans H si et seulement si $\ker \varphi \cap \Gamma$ est un réseau de $\ker \varphi$.*

Démonstration. Quitte à remplacer H par un sous-groupe, on peut supposer que $\varphi(\Gamma)$ est Zariski dense dans H. Alors (*cf.* [10, 2.9]) on a :

$$\begin{aligned} \varphi(\Gamma) \text{ est discret dans } H &\Leftrightarrow \operatorname{rg} \varphi(\Gamma) = \dim H \\ &\Leftrightarrow \operatorname{rg}(\ker \varphi \cap \Gamma) = \dim(\ker \varphi) \\ &\Leftrightarrow \ker \varphi \cap \Gamma \text{ est un réseau de } \ker \varphi. \end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème 3.1. Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\log : G \to \mathfrak{g}$ l'application logarithme.

Commençons par supposer que G ne possède pas de réseaux : il suffit donc d'exhiber une variété compacte munie d'un G-feuilletage de Lie. Rappelons cette construction, due à A. Haefliger dans [6, 1.4]. Soit Γ un sous-groupe de G qui soit de type fini et tel que $\log \Gamma$ contienne une base de $\mathfrak{g}$. Le groupe Γ est nilpotent, sans torsion et de type fini. D'après [10, II.2.18], il existe donc un groupe de Lie simplement connexe nilpotent H contenant Γ et tel que Γ soit un réseau de H. D'après [10, II.2.11], l'injection de Γ dans G se prolonge en un homomorphisme ρ de H dans G. Vu l'hypothèse faite sur $\log \Gamma$, ρ est surjectif. Le feuilletage en fibres de l'application ρ possède une structure naturelle de G-feuilletage de Lie : il passe au quotient en un G-feuilletage de Lie sur la variété compacte H/Γ (dont l'holonomie est l'injection de Γ dans G), d'où le résultat.

Supposons à présent que G possède des réseaux. D'après [10, II.2.12], il existe alors un $\mathbb{Q}$-groupe algébrique unipotent $\mathbf{G}$ tel que $\mathbf{G}(\mathbb{R}) = G$. Choisissons un entier $\lambda > 0$ sans facteurs carrés, et notons σ l'unique automorphisme non trivial de $\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}]$ (pour a, b dans $\mathbb{Q}$, on a $\sigma(a+b\sqrt{\lambda}) = a-b\sqrt{\lambda}$) et Δ l'ensemble des couples $(g, \sigma(g))$ dans $\mathbf{G}(\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}]) \times \mathbf{G}(\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}])$. Enfin, choisissons une $\mathbb{Q}$-représentation fidèle ρ de $\mathbf{G}$ dans un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V, fixons une base b de V et notons Γ l'ensemble des couples $(g, \sigma(g))$ dans Δ où les coefficients de $\rho(g)$ dans la base b sont dans $\mathbb{Z}[\sqrt{\lambda}]$. Alors, d'après le théorème 2.3, Γ est un réseau (co-compact) de $H = G \times G$. Si $\mathbf{H}$ est le $\mathbb{Q}$-groupe unipotent tel que $\mathbf{H}(\mathbb{R}) = H$ associé à Γ, on a $\mathbf{H}(\mathbb{Q}) = \Delta$. En particulier, aucun sous-groupe non trivial de $G_1 = G \times \{e\}$ et de $G_2 = \{e\} \times G$ n'est défini sur $\mathbb{Q}$ pour la $\mathbb{Q}$-structure $\mathbf{H}$. Considérons à présent le feuilletage en G_2-orbites de H/Γ : il possède une structure naturelle de G-feuilletage de Lie, dont la développante est la projection sur la première composante $H \to G$ et l'holonomie l'injection de Γ dans G, qui est d'image dense. Montrons que ce feuilletage ne peut pas être approché par des submersions sur des quotients compacts de G : il s'agit de montrer qu'un homomorphisme de Γ dans G qui est proche de l'injection naturelle ne peut pas être d'image discrète. Soit φ un tel homomorphisme. On note encore φ son extension à H et sa différentielle sur $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. Supposons φ d'image discrète. Alors, d'après le lemme 3.3, son noyau $\mathfrak{i}$ est défini sur $\mathbb{Q}$. Or, si φ est suffisamment proche de la projection sur la première composante, on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{i}$: d'après le lemme 3.2, on a donc $[\mathfrak{i}, \mathfrak{i}] = [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2]$. Donc $[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2]$ est définie sur $\mathbb{Q}$. Or, comme G n'est pas abélien, elle est non triviale, d'où la contradiction. □

Exemple 3.4. *Soit G le groupe de Heisenberg, c'est-à-dire le groupe des matrices de la forme*

$$\begin{pmatrix} 1 & u & w \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec u, v, w dans $\mathbb{R}$. Alors, on peut prendre pour Γ l'ensemble des couples $(g, \sigma(g))$ où g est un élément de G dont tous les coefficients sont dans $\mathbb{Z}[\sqrt{\lambda}]$. Notons qu'il s'agit ici, dans un autre langage, du contre-exemple donné par Lehmann dans [7].

Remarque 3.5. Les constructions que nous avons effectuées permettent de décrire un espace versal de déformations du feuilletage $\mathcal{F}_0$ qui apparait dans la démonstration du théorème 3.1. En effet, en reprenant les notations de cette démonstration, remarquons que, pour tout idéal $\mathfrak{i}$ de $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ tel que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{i}$, si I est le sous-groupe analytique de H d'algèbre de Lie $\mathfrak{i}$, le feuilletage en I-orbites de H/Γ possède une structure naturelle de G-feuilletage de Lie dont l'holonomie est la restriction à Γ du morphisme $H \to H/I \simeq G$. Nous venons donc de construire une famille lisse de déformations de $\mathcal{F}_0$, paramétrée par l'espace des idéaux $\mathfrak{i}$ de $\mathfrak{h}$ qui sont en somme directe avec $\mathfrak{g}_1$, c'est-à-dire, d'après le lemme 3.2, paramétrée par l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_2/[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2], \mathfrak{z}_1)$, où $\mathfrak{z}_1$ désigne le centre de $\mathfrak{g}_1$.

Cette famille est versale : en effet, comme on l'a vu dans la démonstration du théorème 3.1, tout G-feuilletage de H/Γ suffisament proche de $\mathcal{F}_0$ a une holonomie du type décrit ci-dessus, et, donc, d'après la généralisation du théorème de Moser énoncée dans [5, § 3], est conjugué à un élément de la famille.

4. Feuilletages presque simples

Dans cette section, par analogie avec le cas nilpotent, nous employons le théorème de super-rigidité de Margulis pour démontrer un résultat plus fort sur les feuilletages dont la structure transverse est presque simple. Rappelons que, étant donné un groupe de Lie G, un G-feuilletage de Lie $\mathcal{F}$ sur une variété compacte V est dit structurellement stable si et seulement si tout élément proche de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}(G, V)$ est conjugué à $\mathcal{F}$ par un difféomorphisme de V. Nous aurons le

Theoreme 4.1. *Soit G un groupe de Lie presque simple. Alors il existe une variété compacte possédant un G-feuilletage de Lie structurellement stable d'holonomie dense.*

En particulier, un tel feuilletage ne se déforme pas en un G-feuilletage d'holonomie discrète.

La démonstration repose sur le théorème de super-rigidité et sur des constructions, analogues à celle effectuée par E. Ghys dans [5, 1.3], reposant sur les théorèmes d'existence de réseaux arithmétiques de la section 2, qui sont résumées dans le

Lemme 4.2. *Soit G un groupe de Lie presque simple. Alors il existe un groupe de Lie semi-simple H de rang réel ≥ 2 possédant un réseau co-compact irréductible Γ et un morphisme surjectif $\pi : H \to G$. En particulier, $\pi(\Gamma)$ est dense dans G.*

Rappelons que, si H est un groupe de Lie semi-simple, si $H_1 \times \ldots \times H_l$ est la décomposition en facteurs simples de son groupe adjoint, un réseau Γ de H est dit irréductible si et seulement si, pour tout $1 \leq i \leq l$, son image dans $H_1 \times \ldots \times \widehat{H_i} \times \ldots \times H_l$ est dense.

Démonstration. Comme, ce résultat ne change pas en remplaçant G par un revêtement, on peut supposer que G est la composante neutre d'un groupe $\mathbf{G}(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et où $\mathbf{G}$ est un $\mathbb{K}$-groupe absolument simple. Nous distinguons plusieurs cas.

Commençons par supposer que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ et que $\mathbf{G}$ est anisotrope (c'est-à-dire que G est compact). Soient $\mathbf{G}_1$ et $\mathbf{G}_2$ deux copies de la forme déployée de $\mathbf{G}$ sur $\mathbb{R}$. Choisissons une extension totalement réelle $\mathbb{L}$ de degré 3 de $\mathbb{Q}$ (par exemple, la partie réelle de l'extension cyclotomique engendrée par les racines septièmes de l'unité) et notons $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ les plongements de $\mathbb{L}$ dans $\mathbb{R}$. Alors, d'après le théorème 2.6, il existe un $\mathbb{L}$-groupe $\mathbf{H}$ tel que le $\mathbb{R}$-groupe obtenu par extension des scalaires à $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbf{H}$ à travers le plongement σ (resp. σ_1, resp. σ_2) soit $\mathbf{G}$ (resp. $\mathbf{G}_1$, resp. $\mathbf{G}_2$). Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de $\mathbb{L}$. Donnons-nous une $\mathbb{L}$-représentation fidèle ρ de $\mathbf{H}$ dans un $\mathbb{L}$-espace vectoriel V, fixons une base de V et notons Δ le sous-groupe de $\mathbf{H}(\mathbb{L})$ formé des éléments dont les matrices des images par ρ ont tous leurs coefficients dans $\mathcal{O}$. Enfin, notons Γ l'intersection de $(\sigma(\Delta), \sigma_1(\Delta), \sigma_2(\Delta))$ et de la composante neutre H du groupe $\mathbf{G}(\mathbb{R}) \times \mathbf{G}_1(\mathbb{R}) \times \mathbf{G}_2(\mathbb{R})$. Comme $\mathbf{G}$ est $\mathbb{R}$-anisotrope, $\mathbf{H}$ est $\mathbb{L}$-anisotrope et, donc, d'après le théorème 2.3, Γ est un réseau co-compact irréductible de H.

Supposons à présent que $\mathbb{K}$ est toujours $\mathbb{R}$ mais que $\mathbf{G}$ est isotrope. On raisonne de manière analogue, mais en prenant pour $\mathbf{G}_1$ une copie de $\mathbf{G}$ et pour $\mathbf{G}_2$ une forme compacte de $\mathbf{G}$.

Enfin, quand $\mathbb{K}$ est $\mathbb{C}$, on procède de même, mais on choisit $\mathbb{L}$ de degré 5 et possédant un seul plongement réel (par exemple $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$). On note σ et σ_1 deux plongements complexes non conjugués et σ_2 le plongement réel et on choisit pour $\mathbf{G}_1$ une copie de $\mathbf{G}$ et pour $\mathbf{G}_2$ une $\mathbb{R}$-forme anisotrope de $\mathbf{G}$. $\square$

Exemple 4.3. *Si G est $\mathrm{SO}(2,1)$, posons $\mathbb{K} = \mathbb{Q}\left(\cos\frac{4\pi}{7}\right)$, c'est à dire que $\mathbb{K}$ est la partie réelle de l'extension cyclotomique associée aux racines septième de l'unité. Notons σ l'injection canonique de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{C}$ et σ_1 et σ_2 les deux autres plongements, avec $\sigma_1\left(\cos\frac{4\pi}{7}\right) = \left(\cos\frac{6\pi}{7}\right)$ et $\sigma_2\left(\cos\frac{4\pi}{7}\right) = \left(\cos\frac{2\pi}{7}\right)$. Soit q la forme quadratique en trois variables sur $\mathbb{K}$ $x_1^2 + x_2^2 + \left(\cos\frac{4\pi}{7}\right)x_3^2$. Alors, comme formes quadratiques réelles, $q = q^\sigma$ et q^{σ_1} sont de signature $(2,1)$ tandis que q^{σ_2} est définie positive. En particulier, q est $\mathbb{R}$-anisotrope, et donc, $\mathbb{K}$-anisotrope. En d'autres termes, si $\mathbf{G}$ est le $\mathbb{K}$-groupe $\mathrm{SO}(q)$, $\mathbf{G}^\sigma(\mathbb{R})$ et $\mathbf{G}^{\sigma_1}(\mathbb{R})$ sont isomorphes à $\mathrm{SO}(2,1)$ tandis que $\mathbf{G}^{\sigma_2}(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathrm{SO}(3)$. Le sous-groupe Γ de $\mathbf{G}^\sigma(\mathbb{R}) \times \mathbf{G}^{\sigma_1}(\mathbb{R}) \times \mathbf{G}^{\sigma_2}(\mathbb{R})$ constitué des matrices $(\sigma(g), \sigma_1(g), \sigma_2(g))$ où g est un élément de $\mathbf{G}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont dans $\mathbb{Z}\left[\cos\frac{4\pi}{7}\right]$ convient.*

Nous utiliserons le lemme suivant, conséquence directe d'un résultat de J. Tits :

Lemme 4.4. *Soient G un groupe de Lie semi-simple et Γ un groupe de type fini. L'ensemble des homomorphismes de Γ dans G qui sont d'image Zariski dense est ouvert dans l'ensemble des homomorphismes de Γ dans G.*

Démonstration. D'après [13, 4.4], l'ensemble des couples (g,h) d'éléments de G qui engendrent un sous-groupe Zariski dense de G contient un ouvert de Zariski de $G \times G$. $\square$

Nous allons à présent appliquer le théorème de super-rigidité de Margulis pour en déduire la

Démonstration du théorème 4.1. Soient H, Γ et π comme dans le lemme 4.2. Nous allons montrer que le feuilletage $\mathcal{F}$ de H/Γ par les orbites du noyau de π convient.

Commençons par remarquer que, si g est un élément de G et h un élément de H tel que $\pi(h) = g$, l'image de $\mathcal{F}$ par la translation par h dans H/Γ admet pour morphisme d'holonomie en e l'application $\gamma \mapsto g\pi(\gamma)g^{-1}$. Par conséquent, d'après le théorème de Moser ([5, § 3]), pour établir le théorème, il suffit de prouver que tout morphisme de Γ dans G suffisament proche de π est conjugué à π.

Soit donc π_1 un tel morphisme. Si π_1 est suffisamment proche de π, d'après le lemme 4.4, son image est Zariski dense et, donc, comme H est de rang ≥ 2, le théorème de super-rigidité ([8, VII]) s'applique, c'est-à-dire que π_1 s'étend en un morphisme (encore noté π_1) de H dans G. Or, comme G est simple, l'ensemble des classes d'homomorphismes à conjugaison près de H dans G est fini, d'où le résultat. $\square$

5. Déformations du feuilletage de Lehman

Revenons à présent au feuilletage de Lehman. Nous notons donc G le groupe de Heisenberg, c'est-à-dire le groupe des matrices carrées unipotentes triangulaires supérieures de taille 3, et, pour un entier $\lambda > 0$ sans facteurs carrés, σ l'automorphisme non trivial de $\mathbb{Q}[\sqrt{\lambda}]$ et Γ l'ensemble des éléments de $H = G \times G$ qui sont de la forme $(g, \sigma(g))$ pour g dans G, à coefficients dans $\mathbb{Z}[\sqrt{\lambda}]$.

Nous aurons la

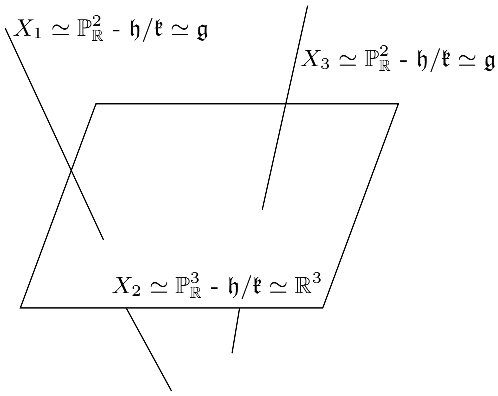

FIG. 1. L'espace des idéaux de dimension 3 de $\mathfrak{h}$

Proposition 5.1. *Il existe une famille lisse de G-feuilletages de Lie sur $V = H/\Gamma$ qui est la déformation d'un $\mathbb{R}^3$-feuilletage de Lie.*

Des phénomènes semblables sont décrits par E. Ghys dans [5, § 3] et par A. El Kacimi Alaoui, G. Guasp et M. Nicolau dans [4, 6.4].

Démonstration. Soit K un sous-groupe distingué fermé et connexe de H. Alors, les K-orbites dans H/Γ forment naturellement un H/K-feuilletage de Lie. Il suffit donc de construire une famille lisse $(K_t)_{0\leq t\leq 1}$ de sous-groupes de codimension 3 de H telle que, pour $t > 0$, H/K_t soit isomorphe au groupe de Heisenberg et que H/K_0 soit abélien. La proposition est alors une conséquence immédiate du lemme ci-dessous.□

Lemme 5.2. *Soit X l'ensemble des idéaux de dimension 3 de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$. Alors la variété algébrique X possède la décomposition en composantes irréductibles $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ où X_1 et X_3 sont isomorphes à $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, X_2 est isomorphe à $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, $X_1 \cap X_3 = \emptyset$ et $X_1 \cap X_2$ et $X_2 \cap X_3$ sont constituées d'un seul point (et ces deux points sont distincts). Pour tout $\mathfrak{k}$ dans $(X_1 \cup X_3)\backslash X_2$, $\mathfrak{h}/\mathfrak{k}$ est isomorphe à l'algèbre de Heisenberg et, pour $\mathfrak{k}$ dans X_2, $\mathfrak{h}/\mathfrak{k}$ est abélienne.*

Cette situation est représentée par la figure 1.

Démonstration. Notons $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ les deux composantes de $\mathfrak{h}$ et p_1 et p_2 les projecteurs sur $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$. Soit $\mathfrak{k}$ dans X. On a $\mathfrak{k} \supset [\mathfrak{h}, \mathfrak{k}] = [\mathfrak{g}_1, p_1(\mathfrak{k})] \oplus [\mathfrak{g}_2, p_2(\mathfrak{k})]$. Comme $\mathfrak{k}$ est de dimension 3, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}]$ est un sous-espace vectoriel de dimension au moins un de l'espace de dimension deux $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$.

Si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$, $\mathfrak{h}/\mathfrak{k}$ est abélienne et $\mathfrak{k}$ est entièrement déterminée par la droite $\mathfrak{k}/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ dans l'espace vectoriel de dimension quatre $\mathfrak{h}/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$: l'ensemble des éléments co-abéliens de X est donc isomorphe à $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

Si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}]$ est une droite, soit $p_1(\mathfrak{k})$ est central dans $\mathfrak{g}_1$, soit $p_2(\mathfrak{k})$ est central dans $\mathfrak{g}_2$. Dans le premier cas, $\mathfrak{k}$ est complètement déterminée par le plan $\mathfrak{k}/[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2]$ dans le 3-espace $([\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \oplus \mathfrak{g}_2)/[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2]$ et l'ensemble des plans d'un 3-espace vectoriel est isomorphe à $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. De même dans le second cas. La description des intersections des composantes irréductibles est alors triviale. □

Références

[1] A. Borel, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics 126, Springer Verlag, New York, 1991.

[2] A. Borel, G. Harder, Existence of discrete cocompact subgroups of reductive groups over local fields, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **298** (1978), 53-64.

[3] A. Borel, Harish-Chandra, Arithmetic subgroups of algebraic groups, *Annals of mathematics* **75** (1962), 485-535.

[4] A. El Kacimi Alaoui, G. Guasp, M. Nicolau, On deformations of transversely homogeneous foliations, *Topology* **40** (2001), 1363-1393.

[5] E. Ghys, Riemannian foliations : examples and problems, Appendice E de *Riemannian foliations*, par P. Molino, Progress in Mathematics 73, Birkhäuser, Boston, 1988.

[6] A. Haefliger, Groupoïdes d'holonomie et classifiants, *in* Structure transverse des feuilletages, *Astérisque* **116** (1984), 70-97.

[7] D. Lehmann, Sur l'approximation de certains feuilletages nilpotents par des fibrations, *Comptes rendus de l'Académie des sciences série A* **286** (1978), 251-254.

[8] G. A. Margulis, *Discrete subgroups of semismple Lie groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3-17, Springer Verlag, Berlin, 1989.

[9] P. Molino, *Riemannian foliations*, Progress in Mathematics 73, Birkhäuser, Boston, 1988.

[10] M. S. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 68, Springer Verlag, Berlin, 1972.

[11] P. Samuel, *Théorie algébrique des nombres*, Méthodes, Hermann, Paris, 1967.

[12] D. Tischler, *On fibering certain manifold over the circle*, Topology **9** (1970), 153-154.

[13] J. Tits, Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **247** (1971), 196-220.

Département de Mathématiques et Informatique, Facultéé des Sciences et Techniques, Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal et Laboratoire de Mathématiques et Applications des Mathématiques, Université de Bretagne-Sud, Centre Yves Coppens, Campus de Tohannic BP 573, 56017 Vannes, France.

E-mail address: `hdathe@ucad.sn and hamidou.dathe@univ-ubs.fr`

LAGA, Institut Galilée, Université Paris 13, 99, avenue Jean-Baptiste Clément, 93 430 Villetaneuse, France.

E-mail address: `quint@math.univ-paris13.fr`