Modèles canoniques : définition et unicité *

Dans ces notes, je note $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. Soit (G, X) une donnée de Shimura. Soit $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe ouvert compact. On pose $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ la variété de Shimura associée : c'est une variété quasi-projective normale sur $\mathbb{C}$ dont l'ensemble des points complexes s'identifie au double quotient

$$G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K.$$

Soit $E \subset \mathbb{C}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Définition 0.1. *Un* ***modèle*** *sur* E *de* $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ *consiste en un schéma* $M = M_K(G, X)$ *sur* E*, et un isomorphisme* $m\colon M \otimes_E \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}_K(G, X)$.

Le *modèle canonique* de $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ est un certain modèle spécifique de $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ sur le *corps réflexe* de (G, X). Dans cette section, on va construire les modèles canoniques des variétés de Shimura de dimension zéro, *i.e.*, lorsque $G = T$ est un tore sur $\mathbb{Q}$.

1 Modèles canoniques en dimension zéro

1.1 Définition

Soient T un $\mathbb{Q}$-tore, $h\colon \mathbb{S} \to T_{\mathbb{R}}$ un morphisme, et $X = \{h\}$. Soit $K \subset T(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe ouvert compact. La variété de Shimura associée $\mathrm{Sh}_K(T, h)$ est un schéma fini étale sur $\mathbb{C}$ avec

$$\mathrm{Sh}_K(T, h)(\mathbb{C}) = T(\mathbb{Q})\backslash\{h\} \times T(\mathbb{A}_f)/K \simeq T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_f)/K.$$

Comme $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ est algébriquement clos, $\mathrm{Sh}_K(T, h)$ provient par changement de base d'une $\overline{\mathbb{Q}}$-schéma fini étale, noté par $\overline{M}_K(T, h)$. De plus, pour $E \subset \overline{\mathbb{Q}}$, se donner un modèle de $\overline{M}_K(T, h)$ sur E revient au même de se donner une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ sur l'ensemble fini

$$\overline{M}_K(T, h)(\overline{\mathbb{Q}}) \simeq \mathrm{Sh}_K(T, h)(\mathbb{C}).$$

Notons $E = E(T, h) \subset \overline{\mathbb{Q}}$ le corps de définition du morphisme $\mu_h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}, T_{\mathbb{C}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{Q}}}, T_{\overline{\mathbb{Q}}})$, composé des deux morphismes suivants

$$\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \xrightarrow{z \mapsto (z,1)} \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{h_{\mathbb{C}}} T_{\mathbb{C}}.$$

*Notes d'exposé le 04 juin à IMB. La référence principale est [2] § 12,13. Remarques/corrections sont les bienvenues !

Posons $r = r(T,h)$ le morphisme

$$\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,E} \xrightarrow{\mu_h} \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}T_E \xrightarrow{\text{trace}} T.$$

Il induit le morphisme suivant, encore noté par r dans la suite :

$$r\colon \mathbb{A}_E^\times \longrightarrow T(\mathbb{A}) \xrightarrow{\text{projection}} T(\mathbb{A}_f). \tag{1}$$

D'autre part, comme E est un corps de nombres, par la théorie de corps de classes, on dispose encore le morphisme d'Artin

$$\mathrm{art}_E\colon \mathbb{A}_E^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(E^{\mathrm{ab}}/E),$$

induisant un isomorphisme

$$\left(E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times\right)^\wedge \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(E^{\mathrm{ab}}/E),$$

où $(E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times)^\wedge$ désigne la limite $\varprojlim E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times/U$ où U parcourt tous les sous-groupes ouverts d'indice fini de $E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times$. Comme le double quotient $T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_f)/K$ est fini (et que le morphisme d'Artin est continu), on a

Lemma 1.1. *Le morphisme composé*

$$\mathbb{A}_E^\times \xrightarrow{r} T(\mathbb{A}_f) \longrightarrow T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_f)/K$$

se factorise à travers de $\mathrm{Gal}(E^{\mathrm{ab}}/E)$.

On en déduit ainsi une application (en effet un morphisme continu de groupes)

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E) \longrightarrow \mathrm{Gal}(E^{\mathrm{ab}}/E) \longrightarrow T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_f)/K. \tag{2}$$

Définition 1.2. *Le* ***modèle canonique*** *de* $\mathrm{Sh}_K(T,h)$ *est le schéma fini étale, défini sur le corps réflexe* $E(T,h)$*, associé à l'ensemble fini* $T(\mathbb{Q})\backslash\{h\}\times T(\mathbb{A}_f)/K$ *muni de l'action de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ *définie par* (2).

1.2 Exemple/Motivation : tore de type CM

Soit (E,Φ) un type CM avec $[E:\mathbb{Q}] = 2g$, et posons $T = \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,E}$. Par suite,

$$T(\mathbb{R}) = (E\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\Phi, \quad e\otimes r \mapsto (\varphi(e)\cdot r)_{\varphi\in\Phi}.$$

D'une manière similaire, on dispose d'un isomorphisme de $\mathbb{R}$-groupes

$$T_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^\Phi, \quad e\otimes r \mapsto (\varphi(e)\cdot r)_{\varphi\in\Phi}.$$

Soit $h\colon \mathbb{S}\to T_{\mathbb{R}}$ tel que le composé de h avec le dernier isomorphisme soit donné par

$$\mathbb{S} \longrightarrow T_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{S}^\Phi, \quad z\mapsto (z,\dots,z).$$

Posons ι le prolongement canonique suivant

$$\iota\colon E \longrightarrow \mathbb{C}^\Phi, \quad \alpha\mapsto (\varphi(\alpha)).$$

Le quotient $\mathbb{C}^\Phi/\iota(\mathcal{O}_E)$ est une variété abélienne complexe, notée par A_Φ, et il existe un morphisme naturel $i_\Phi\colon E\to \mathrm{End}(A_\Phi)_{\mathbb{Q}}$, qui fait A_Φ une variété abélienne complexe de dimension g de type CM (E,Φ). Posons $V = H_1(A_\Phi,\mathbb{Q})$: c'est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension g muni d'une action de E. Pour la raison de dimension, V est un E-espace vectoriel de dimension 1.

Lemma 1.3. *Soit $K \subset T(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe ouvert compact. L'ensemble fini $\mathrm{Sh}_K(T,h)$ s'identifie à l'ensemble $\mathcal{H}_K$ des classes d'isomorphismes des triplets $(A,i,\eta K)$, où (A,i) est une variété abélienne complexe de type CM (E,Φ) ; et $\eta\colon V(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\sim} V_f(A)$ un isomorphisme $E\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{A}_f$-linéaire.*

Démonstration. Soit (A,i) une variété abélienne complexe de type CM (E,Φ). On sait qu'il existe un isomorphisme $a\colon A \xrightarrow{\sim} A_\Phi$ compatible aux actions de E. En particulier, il induit un isomorphisme E-linéaire $V_f(A) \xrightarrow{a} V_f(A_\Phi) \simeq V(\mathbb{A}_f)$. Le morphisme composé

$$V(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\eta} V_f(A) \xrightarrow{a} V(\mathbb{A}_f)$$

est un isomorphisme $E\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{A}_f$-linéaire, donc il correspond à un élément $g \in (E\otimes_{\mathbb{A}}\mathbb{A}_f)^\times = T(\mathbb{A}_f)$ (car $V(\mathbb{A}_f)$ est un $E\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{A}_f$-module libre de rang un). L'application $(A,i,\eta K) \mapsto [h,g] \in T(\mathbb{Q})\backslash\{h\}\times T(\mathbb{A}_f)/K$ donne la bijection voulue. □

Le morphisme μ_h correspondant est donné par

$$\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^{\Phi} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^{\overline{\Phi}}, \quad z \mapsto (z,\dots,z,1,\dots,1).$$

Le corps de définition de μ_h est le *corps réflexe* E^* du type CM (E,Φ) et la norme réflexe est juste le morphisme r défini ci-dessus. L'ensemble fini $\mathrm{Sh}_K(T,h)$ est muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E^*)$ donnée par le morphisme (2) ci-dessus.

D'autre part, soit $\mathcal{M}_K$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de triplets $(A,i,\eta K)$ où (A,i) est une variété abélienne sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de type CM (E,Φ), et $\eta\colon V(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\sim} V_f(A)$ un isomorphisme $E\otimes\mathbb{A}_f$-linéaire. L'ensemble $\mathcal{M}_K$ est muni naturellement d'une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E^*)$: pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E^*)$, $\sigma(A,i,\eta)$ est le triplet $(\sigma A, {}^\sigma i, {}^\sigma\eta K)$, où ${}^\sigma\eta$ est le morphisme composé suivant

$$V(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\eta} V_f(A) \xrightarrow{\sigma} V_f(\sigma A).$$

De plus, le changement de base induit une bijection

$$\mathcal{M}_K/\sim \longrightarrow \mathcal{H}_K/\sim, \quad (A,i,\eta K) \mapsto (A,i,\eta K)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}.$$

Proposition 1.4. *L'application composée suivante*

$$\mathcal{M}_K \longrightarrow \mathcal{H}_K \longrightarrow \mathrm{Sh}_K(T,h)$$

est $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E^*)$*-équivariante.*

Démonstration. Ceci résulte du théorème fondamental de multiplication complexe. □

2 Modèle caonique : définition générale

2.1 Corps réflexe

Soit G un groupe réductif sur $\mathbb{Q}$. Pour toute extension k de $\mathbb{Q}$, posons $\mathcal{C}(k)$ l'ensemble des classes de $G(k)$-conjugaison des co-caractères de G_k :

$$\mathcal{C}(k) := G(k)\backslash\mathrm{Hom}_k(\mathbb{G}_m, G_k).$$

Naturellement un morphisme $k \to k'$ sur $\mathbb{Q}$ induit une application $\mathcal{C}(k) \to \mathcal{C}(k')$. En particulier, $\mathcal{C}(k')$ est muni d'une action de $\mathrm{Aut}(k'/k)$.

Lemma 2.1. *Soit $T \subset G$ un tore déployé maximal de G. Notons $W = N_{G(k)}(T)/C_{G(k)}(T)$ le groupe de Weyl de T. Alors l'application canonique*

$$W\backslash \mathrm{Hom}_k(\mathbb{G}_m, T_k) \longrightarrow G(k)\backslash \mathrm{Hom}_k(\mathbb{G}_m, G_k)$$

est bijective.

Démonstration. Comme deux k-tores maximaux déployés sont conjugués par un élément de $G(k)$, l'application ci-dessus est surjective. Montrons que elle est aussi injective. Soient $\mu, \mu' \colon \mathbb{G}_m \to T$ deux k-co-caractères de T tels qu'ils soient conjugués par un élément $g \in G(k)$: on a donc $\mu(z) = g \cdot \mu'(z) \cdot g^{-1}$. Par suite, T, gTg^{-1} sont deux tores maximaux de G contenant $\mathrm{im}(\mu)$, déployés sur k. Il existe donc $h \in G(k)$ commutant à $\mathrm{im}(\mu)$ tel que $T = h \cdot g \cdot Tg^{-1}h^{-1}$. Ainsi $hg \in N_{G(k)}(T)$. De plus, comme h commute avec $\mathrm{im}(\mu)$, on en déduit que

$$\mu(z) = h \cdot \mu(z) \cdot h^{-1} = (hg) \cdot \mu'(z) \cdot (hg)^{-1}.$$

Cela dit, μ, μ' sont conjugués par un élément de W. □

Corollaire 2.2. *Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. L'application canonique $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathcal{C}(\mathbb{C})$ est une bijection.*

Soit (G, X) une donnée de Shimura. Pour $x \in X$ avec $h \colon \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ le morphisme correspondant, posons $\mu_x \in X_*(G_{\mathbb{C}})$ le co-caractère défini par :

$$\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \xrightarrow{z \mapsto (z,1)} \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{h} G_{\mathbb{C}}.$$

Par le corollaire ci-dessus, la classe de $G(\mathbb{C})$-conjugaison de μ_x correspond à un élément de $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}})$, qui ne dépend que la classe X, que l'on note $c(X)$.

Définition 2.3. *On appelle le **corps réflexe** (ou le **corps dual**) de (G, X), noté par $E(G, X)$, le corps de définition de $c(X)$. En d'autres termes, c'est le sous-corps $E \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ soit le fixateur dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ de $c(X) \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}})$.*

Remarque 2.4. On a les propriétés suivantes :

1. Soit k un sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur lequel G est déployé. Alors $E(G, X) \subset k$. En effet, comme le groupe de Weyl d'un tore maximal déployé ne change pas si l'on remplace k par une extension, en vertu du lemme ci-dessus, le morphisme naturel $\mathcal{C}(k) \to \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}})$ est une bijection. En particulier, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/k)$ agit trivialement sur $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}})$. D'où $k \supset E(G, X)$. En particulier, le corps réflexe des courbes modulaires est $\mathbb{Q}$. [1]
2. Si $c(X)$ contient un co-caractère $\mu \in \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathbb{G}_m, G_{\overline{\mathbb{Q}}})$ défini sur k (car pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, $\sigma(c(X))$ est la classe de conjugaison de $\sigma(\mu) = \mu$, donc $\sigma(c(X)) = c(X)$). Alors $k \supset E(G, X)$. Réciproquement, d'après Kottwitz, lorsque G est quasi-déployé sur k et que $k \supset E(G, X)$, $c(X)$ contient un co-caractère de $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ défini sur k.

1. Cece peut se voir aussi de la manière suivante : considérons $h \colon \mathbb{S} \to \mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$ envoyant $a + bi \in \mathbb{C}$ à $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Alors $h_{\mathbb{C}}$ est conjugé au caractère $h' \colon \mathbb{S}_{\mathbb{C}} = \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to \mathrm{GL}_{2,\mathbb{C}}, (z, \bar{z}) \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$. Par suite, le caractère $\mu_h \colon \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to \mathrm{GL}_{2,\mathbb{C}}$ est conjugé au caractère donné par $z \mapsto h'(z, 1)$, qui est défini sur $\mathbb{Q}$. Donc la classe de conjugaison de μ_h dans $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathrm{GL}_{2,\overline{\mathbb{Q}}})$ est défini sur $\mathbb{Q}$.

3. Soit $(G, X) \hookrightarrow (G', X')$ une inclusion de données de Shimura. Alors $E(G, X) \supset E(G', X')$.

Exemple 2.5. Voici quelques exemples :

1. Soit T un tore sur $\mathbb{Q}$, et soit $h\colon \mathbb{S} \to T_{\mathbb{R}}$ un morphisme. Alors le corps réflexe de $(T, \{h\})$ est simplement le corps de définition de $\mu_h\colon \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to T_{\mathbb{C}}$, *i.e.*, c'est le plus petit sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ sur lequel μ_h est défini.
2. Soient E un corps CM, (E, Φ) un type de CM, et soit $T := \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,E}$. Par suite,
$$T_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\varphi \in \Phi} \mathbb{S}, \quad e \otimes r \mapsto (\varphi(e) \cdot r)_{\varphi}.$$
Soit $h\colon \mathbb{S} \to T_{\mathbb{R}}$ envoyant $z \in \mathbb{S}$ en $(z)_{\varphi \in \Phi}$. Alors le corps réflexe $E(T, \{h\})$ est le corps réflexe du type CM (E, Φ). Autrement, $E(T, h)$ est le sous-corps fixe de $\overline{\mathbb{Q}}$ de fixateur dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ de $\Phi \subset \{\text{places arch. de } E\}$.
3. Soit (G, X) une donnée de Shimura de type PEL. Alors $E(G, X)$ est le sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$ engendré par $\{\mathrm{Tr}_X(b) : b \in B\}$.

2.2 Modèle canonique : définition générale

Définition 2.6. *Soit (G, X) une donnée de Shimura. Un point $h \in X$ est dit **spécial** si $h\colon \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ se factorise par un tore $T \subset G$ défini sur $\mathbb{Q}$. Le corps $E(T, \{h\})$ ne dépend que de h. C'est le **corps réflexe** (ou le **corps dual**) de h. Plus généralement, pour $x \in \mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$, classe de $(h, g) \in X \times G(\mathbb{A}_f)$, la classe de $G(\mathbb{Q})$-conjugaison de h de dépend que de x. Nous dirons que x est **spécial** si $h \in X$ l'est, que $E(h)$ est le **corps réflexe** (ou le **corps dual**) $E(x)$ de x, et que la classe de $G(\mathbb{Q})$-conjugaison de h est le **type** de x.*

Exemple 2.7. Soit $G = \mathrm{GL}_2$, et X la classe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$-conjugaison du morphisme $h_0\colon \mathbb{S} \to \mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$ tel que le morphisme induit sur les points réels est donné par
$$\mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^{\times} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \quad a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$
On sait qu'il existe un difféomorphisme
$$X \longrightarrow \mathcal{H}^{\pm 1} := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot h_0 \mapsto \frac{ai + b}{ci + d}.$$
Soit $h \in X$, d'image z_h par le difféomorphisme ci-dessus. Alors sont équivalentes :

- $h \in X$ est un point spécial ;
- $z_h \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est un nombre algébrique, et l'extension $\mathbb{Q}[z_h]$ est quadratique (nécessairement imaginaire) sur $\mathbb{Q}$;
- la courbe elliptique $\frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z} + z_h \cdot \mathbb{Z}}$ est une courbe elliptique à multiplication complexe.

On renvoie à [2] §12 Example 12.7 pour quelques explications.

Sur l'ensemble des points spéciaux de $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ de type donné, correspondant à un corps réflexe E, nous allons définir une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$. Soient donc $x = [h, g] \in$

$\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$, $T \subset G$ un tore défini sur $\mathbb{Q}$ par lequel se factorise h. Notons $r = r(T,h)$ le morphisme

$$r = r(T,h) \colon \mathbb{A}_E^\times \longrightarrow T(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}), \quad a = (a_\infty, a_f) \mapsto \sum_{\rho \colon E \to \overline{\mathbb{Q}}} \rho(\mu_h(a_f)).$$

Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(E^{\mathrm{ab}}/E)$, avec $s \in \mathbb{A}_E^\times$ un relèvement de σ par le morphisme d'Artin $\mathrm{art}_E \colon \mathbb{A}_E^\times \to \mathrm{Gal}(E^{\mathrm{ab}}/E)$. Posons $\sigma(x)$ la classe $[h, r(s)g]$ de $(h, r(s)g) \in X \times G(\mathbb{A}_f)$.

Lemma 2.8. *La classe $[h, r(s)g]$ ne dépend que de x et de σ. Cela définit une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ sur l'ensemble l'ensemble des points spéciaux de type donné de corps réflexe correspondant E.*

Démonstration. Dans la définition ci-dessus, la classe $[x, r_x(s)a]_K$ ne dépend pas du choix de s. En effet, on peut considérer l'action naturelle de $T(\mathbb{A}_f)$ sur $\mathrm{Sh}_K(G,X)$. Alors le morphisme d'orbite

$$T(\mathbb{A}_f) \longrightarrow \mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{X}), \quad t \mapsto [x, t \cdot a]_K$$

se factorise à travers le double quotient $T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_f)/(aKa^{-1} \cap T(\mathbb{A}_f))$. Par suite, le morphisme

$$\mathbb{A}_E(x)^\times \longrightarrow \mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C}), \quad s \mapsto [x, r_x(s)a]_K$$

se factorise à travers $(E^\times \backslash \mathbb{A}_{E(x)}^\times)^\wedge$, d'où l'assertion. □

Définition 2.9. *Soit (G,X) une donnée de Shimura, et soit $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe ouvert compact. Un* ***modèle canonique*** *$M_K(G,X)$ de $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ est un modèle sur $E(G,X)$ tel que les points spéciaux de $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ sont algébriques,* i.e., *ils appartiennent à $M_K(G,X)(\overline{\mathbb{Q}}) \subset \mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$, et que sur l'ensemble des points spéciaux de type τ donné, correspondant à un corps réflexe E_τ, le groupe de galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E_\tau) \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E(G,X))$ agit par l'action décrite ci-dessus.*

3 L'unicité de modèle canonique

3.1 Un résultat de descente

Soit $k \subset \mathbb{C}$ un sous-corps. Alors il est bien connu que $\mathbb{C}^{\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/k)} = k$. Etant donné un schéma X défini sur k, l'ensemble $X(\mathbb{C})$ des points à valeurs dans $\mathbb{C}$ de X est muni naturellement d'une action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/k)$. De plus, un morphisme $f \colon X \to Y$ de k-schémas, le changement de base $f \otimes \mathbb{C} \colon X_{\mathbb{C}} \to Y_{\mathbb{C}}$ induisant un application $X(\mathbb{C}) \to Y(\mathbb{C})$ compatible aux actions de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/k)$.

Proposition 3.1. *Soient X, Y deux schémas de type fini et géométriquement réduits sur k. Soit $f \colon X_{\mathbb{C}} \to Y_{\mathbb{C}}$ un morphisme de $\mathbb{C}$-schémas tel que le morphisme induit $X(\mathbb{C}) \to Y(\mathbb{C})$ soit compatible aux actions de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/k)$. Alors f provient par changement de base d'un k-morphisme $f_0 \colon X \to Y$.*

Démonstration. Clairement si un tel f_0 existe, il est unique. Par suite, il suffit de traiter le cas où X, Y sont affines. En considérons le graphe de f, on se ramène à prouver l'assertion suivante : soit $Z \subset X_{\mathbb{C}}$ un sous-schéma réduit tel que $Z(\mathbb{C}) \subset X(\mathbb{C})$ soit invariant par l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/k)$, alors Z provient par changement de base d'un sous-schéma fermé de X. Comme Z est réduit et de type fini sur $\mathbb{C}$, $Z(\mathbb{C}) \subset Z$ est schématiquement dense. Ainsi, $Z \subset X_{\mathbb{C}}$ est un sous-schéma fermé invariant par l'action naturel de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/k)$. Posons $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $I \subset A \otimes_k \mathbb{C}$ l'idéal définissant le sous-schéma Z. Alors $I \subset A \otimes \mathbb{C}$ est in variant sous l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/k)$. De plus $I_0 := I^{\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/k)} = I \bigcap A$ est un idéal de A tel que $I_0 \otimes_k \mathbb{C} \tilde{\to} I$. Par conséquent, $Z_0 = \mathrm{Spec}(A/I_0)$ est un sous-schéma fermé de X tel que $Z_0 \otimes_k \mathbb{C} \simeq Z$. □

3.2 Démontration de l'unicté de modèle canonique

La notion de modèle canonique n'est utilisable que parce qu'il y a beaucoup de points spéciaux.

Théorème 3.2 ([1] Théorème 5.1)**.** *Soient (G, X) une donnée de Shimura, et $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe ouvert compact. Pour toute extension finie $F \subset \overline{\mathbb{Q}}$ de $E(G, X)$, il existe un point spécial de type τ de $\mathrm{Sh}_K(G, X)$, correspondant à un corps réflexe E_τ, tel que l'extension E_τ de $E(G, X)$ soit linéairement disjointe de F.*

Démonstration. Soit $Y = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{G}_m, G)/G$ le schéma des classes de conjugaison de morphismes de $\mathbb{G}_m$ dans G : c'est un schéma étale sur $\mathbb{Q}$. Le groupe de galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ agit sur l'ensemble (discret infini) $Y(\mathbb{C})$ des classes de conjugaison de morphisme de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ dans $G_{\mathbb{C}}$, ou encore des classes de conjugaison de morphisme de $\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{Q}}}$ dans $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$. Soit Y_0 le sous-schéma fini de Y tel que $Y_0(\mathbb{C})$ soit l'orbite sous galois de la classe μ_h pour un $h \in X$: c'est le spectre de $E(G, X)$.

Soient $Y' = \mathrm{Lie}(G)$, considéré comme espace affine sur $\mathbb{Q}$, et soit V le sous-schéma ouvert des éléments réguliers de l'algèbres de Lie. Pour v dans V, on désigne par T_v le centralisateur de v (un tore maximal). Soit W l'espace de modules des tores maximaux T de G, munis de $s\colon \mathbb{G}_m \to T$ et $v \in \mathrm{Lie}(T)$ tels que (a) v est régulier dans $\mathrm{Lie}(G)$; (b) la classe de $s\colon \mathbb{G}_m \to G$ est dans Y_0.

Le morphisme $f\colon W \to V, (T, s, v) \mapsto v$ est fini étale surjectif (noter que $T = T_v$). Soit p le morphisme de W dans Y_0 : $(T, s, v) \mapsto$ (classe de s). On a alors le carré commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & V \arrow[d] \\ Y_0 = \mathrm{Spec}(E(G,X)) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}). \end{tikzcd}$$

Lemma 3.3. *Le schéma W est irréductible, et les fibres géométriques de p sont géométriquement irréductibles.*

Démonstration. Comme $Y_0 = \mathrm{Spec}(E(G, X))$ est irréductible. Il suffit de prouver la seconde assertion. Elle résulte de ce que

– puisque G est connexe, le schéma sur $\mathbb{C}$ des homomorphismes de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ dans $G_{\mathbb{C}}$, conjugués à un homomorphisme donné, est irréductible.

– pour $i\colon \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ donné, d'après le théorème de conjugaison des tores maximaux appliqué au centralisateur (connexe) de $i(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})$, le schéma des tores maximaux de $G_{\mathbb{C}}$ contenant $i(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})$ est irréductible.

□

Lemma 3.4. *Soient E une extension finie de $\mathbb{Q}$, et un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & V \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(E) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}) \end{tikzcd}$$

dans lequel

1. *V est un ouvert de Zariski d'un espace affine sur $\mathbb{Q}$;*
2. *Les fibres géométriques de p sont irréductibles, et W est réduit ;*
3. *f est quasi-fini et dominant.*

Alors pour tout ouvert $U \subset V(\mathbb{R})$ pour la topologie usuelle et toute extension F de E, il exsite $v \in V(\mathbb{Q}) \bigcap U$ tel que $f^{-1}(v)$ soit le spectre d'une extension de E linéairement disjointe de F.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème d'irréductibilité de Hilbert. □

Soit $h_0 \in X$ et $T_0 \subset G_{\mathbb{R}}$ un tore maximal défini sur $\mathbb{R}$ par lequel factorise h_0. Soit $U \subset V(\mathbb{R})$ l'ensemble des $v \in V(\mathbb{R})$ tels que T_v soit conjugué à T_0 par un élément de $G(\mathbb{R})$: c'est un ouvert de $V(\mathbb{R})$ pour la topologie usuelle.[2] En particulier, pour tout $v \in U$, il existe $w \in W(\mathbb{C})$ tel que $f(w) = v$ et que $h(w)\colon \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ soit conjugué à h_0, où $h(w) := (s_w \circ z) \cdot (\overline{s_w} \circ \overline{z})$. Par le lemme ci-dessus, on peut même choisir $v \in V(\mathbb{Q}) \bigcap U$ de sorte que $f^{-1}(v)$ est le spectre d'une extension E' de $E(G, X)$ linéairement disjointe de F. Ainsi, le corps de définition du caractère $s_w\colon \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to T_{v,\mathbb{C}}$ est E'. Par suite $h(w) \in X$ factorise par $T_{v,\mathbb{R}}$ avec T_v un tore défini sur $\mathbb{Q}$ tel que le corps réflexe de $h(w)$ soit E', donc linéairement disjointe à F. □

Proposition 3.5. *Pour tout $h \in X$, le sous-ensemble $\{[h, g] : g \in G(\mathbb{A}_f)\}$ est dense dans $\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$ pour la topologie Zariski.*

Démonstration. On écrit $\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash X \times (G(\mathbb{A}_f)/K)$. La proposition résulte du théorème d'approximation réelle. En d'autres termes, $G(\mathbb{Q}) \subset G(\mathbb{R})$ est dense, par suite $G(\mathbb{Q}) \cdot h \subset X$ l'est aussi. □

Soient maintenant $K, K' \subset G(\mathbb{A}_f)$ deux sous-groupes ouverts compacts tels que $K' \supset g^{-1}Kg$. Considérons l'application

$$\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Sh}_{K'}(G, X)(\mathbb{C}), \quad [h, a]_K \mapsto [h, ag]_K,$$

qui définit donc un morphisme de $\mathbb{C}$-schémas, noté par t_g dans la suite :

$$t_g\colon \mathrm{Sh}_K(G, X) \longrightarrow \mathrm{Sh}_{K'}(G, X).$$

2. Vérifier le !

Proposition 3.6. *Supposons que les modèles canoniques de* $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ *et de* $\mathrm{Sh}_{K'}(G,X)$ *existent. Alors le morphisme* t_g *ci-dessus est défini sur* $E(G,X)$.

Démonstration. Posons $E = E(G,X)$. Par descente, il suffit de prouver que $\sigma(t_g) = t_g$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/E)$. Soit $h \in X$ un point spécial. Alors $E(h) \supset E(G,X) = E$. Montrons d'abord que $\sigma(t_g) = t_g$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/E(h))$. En effet, par la définition de modèle canonique, $\sigma(t_g)$ et t_g coïncident sur $\{[h,g] : g \in G(\mathbb{A}_f)\} \subset \mathrm{Sh}_K(G,X)$. Or ce dernier est un sous-ensemble dense (et les variétés de Shimura sont réduites), il s'ensuit que $\sigma(t_g) = \sigma$. Enfin, il reste d'appliquer le théorème ci-dessus pour assurer que ces σ's engendrent $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/E)$. □

Comme un corollaire, on obtient l'unicité de modèle canonique.

Théorème 3.7. *A isomorphisme unique près, il existe au plus un modèle canonique de* $\mathrm{Sh}_K(G,X)$.

Références

[1] P. Deligne, *Travaux de Shimura*

[2] J. Milne, *Introduction to Shimura varieties*