GDT 2015 A2X
–
VARIETES DE SHIMURA : MODELE CANONIQUE DES COURBES MODUALIRES

N. MAZZARI

Résumé. Le but de cet exposé est celui de donner les interprétations modulaires des variétés de Shimura de type Siegel. En utilisant cette interprétation on pourra construire le *modele canonique* de ce type de variété. On suppose que le lecteur connaisse la définition à la Deligne des variétés de Shimura.

1. Introduction

Une variété de Shimura est une variété quasi-projective $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ dont la variété analytique sus-jacente est définie par la double quotient

$$\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) := G(\mathbb{Q}) \setminus X \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

où (G, X) est une donnée de Shimura et $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ est un sous-groupe compact ouvert.

Dans ce note $G = \mathrm{GL}_{2,\mathbb{Q}}$ et $X = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ (mais toutes le preuves et définitions s'étendent facilement au cas d'une donnée de Siegel comme expliqué dans la dernière section).

On vérifie facilement [1] que (pour toute donnée de Siegel) le corps reflex $E(G, X)$ est tut simplement $\mathbb{Q}$.

On va montrer l'existence du *modele canonique* de $\mathrm{Sh}_K(G, X)$: c'est à dire qu'il existe une variété M quasi projective définie sur $\mathbb{Q}$ telle que $M \otimes \mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ et en plus l'action de Galois sur M est compatible avec la théorie CM.

Historiquement les variétés de Shimura associées à une donnée de Siegel sont parmi les premieres à apparaitre (et sourtout avant la définition de donnée de Shimura) et elle sont arithmétiquement intéressantes à cause de leur interprétation modulaire. Il se trouve que cette interprétation permet de montrer l'existence d'un modele sur $\mathbb{Q}$ (ou plus en genral sur un corps de nombres). Puis on découvre que ce modele particulier est compatible avec la théorie CM. C'est donc à partir de cette exemple (et quelques autres) qu'on arrive à formuler le concept de modele canonique.

Pour cette raison on focalise notre attention sur la construction/existence du modele plutôt que sur la compatibilité avec la théorie CM.

On utilise la méthode de Milne qui passe par la théorie de Hodge. Autrement on pourra utiliser les résultats de Mumford dans GIT.

Date: Janvier-Avril 2015.

1. Voir l'exposé de Jilong

2. Le problème de descente

2.1. **Descente fpqc.** Soit M une variété algébrique complexe quasi-projective. Pour montrer que M a un modele sur $\mathbb{Q}$ il faut construire une donnée de descente (fpqc) effective, c'est à dire un isomorphisme

$$\xi : p_1^* M \to p_2^* M \quad , p_i : \mathrm{Spec}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$$

satisfaisant la condition de cocycle

$$p_{23}^* \xi \circ p_{12}^* \xi = p_{13}^* \xi \ .$$

Si on a un tel ξ on peut définir un isomorphisme $f_\sigma : M^\sigma \to M$, $f_\sigma = (\sigma, \mathrm{id})^* \xi$, et donc une bijection sur l'ensemble de points complexes. Cette parenthèse fpqc nous sert pour motiver le paragraphe suivante.

2.2. **Une condition suffisante (Weil).** Une variété complexe quasi-projective M munie d'une action

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \times M(\mathbb{C}) \to M(\mathbb{C}) \quad (\sigma, x) \mapsto \sigma(x)$$

telle que

A) Le morphisme $M^\sigma(\mathbb{C}) \to M(\mathbb{C})$ défini par $x \mapsto \sigma(x^{\sigma^{-1}})$ est algébrique [2]

B) Il existe un nombre fini de points $x_1, ..., x_m \in M(\mathbb{C})$ tel que

   B1) l'identité id est le seul automorphisme de M qui fixe tous les x_i ;

   B2) il existe une extension finie $L/\mathbb{Q}$ tel que $\sigma(x_i) = x_i$ pour tous $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/L)$.

provient d'une variété sur $\mathbb{Q}$.

2.3. **Application aux espaces de modules.** Supposons que M représente un problème de modules, i.e. $M(T)$ est un ensemble de classe d'isomorphisme de certains objets E définis sur T. Soit $\mathcal{E}/M$ l'objet universel, alors $x \in M(\mathbb{C})$ correspond à la classe de la fibre $\mathcal{E}_x$. Alors on peut définir $\sigma(x) := (\mathcal{E}_x)^\sigma$ par changement de base. Or si on applique le changement de base à la famille universelle on trouve $\mathcal{E}^\sigma / M^\sigma$ qui est un famille sur M^σ et donc correspond à un morphisme $\phi \in M(M^\sigma) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M^\sigma, M)$ et on a

$$\sigma(x) \sim (\mathcal{E}_x)^\sigma = (\mathcal{E}^\sigma)_{x^\sigma} = (\phi^* E)_{x^\sigma} = \mathcal{E}_{\phi(x^\sigma)} \sim \phi(x^\sigma) \ ,$$

donc $x \mapsto \sigma(x^{\sigma^{-1}}) = \phi(x)$ est bien un morphisme algébrique.

Donc l'idée est de donner une interprétation modulaire de Sh_K et de la voir comme un espace de modules fin : en réalité il faut se restreindre aux composantes connexes et utiliser que le revêtement universel est bien un espace de module pour un problème de modules analytique ; puis on a besoin d'un résultat d'algebrisation.

3. Interprétation modulaire

3.1. **Notation.** Soit $\Lambda = \mathbb{Z}^2$, $V = \mathbb{Q}^2$, $G = \mathrm{GL}_{2,\mathbb{Q}}$ et

$$X = X^+ \sqcup X^- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \{\text{structures complexes sur } V(\mathbb{R})\} \ .$$

2. On note par M^σ le pull-back de M via $\sigma : \mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$; x^σ est le point de M^σ qui on obtient si on applique σ aux coordonnées de x.

3.2. **Moduli de courbes elliptiques.** Soit $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ compact ouvert. Pour tout schema complexe $T/\mathbb{C}$ on peut définir l'ensemble $\mathcal{M}_K(T)$ des couples $(E, \eta K)$ où E/T est une famille de courbes elliptiques sur T et $\eta : V(\mathbb{A}_f)_T \to V_f(E/T)$ est un isomorphisme de faisceaux (étale) [3]. Sur cet ensemble on considère la relation d'équivalence suivante

$$(E, \eta K) \sim (E', \eta' K) \iff \exists \text{une isogenie sur } T \ \eta\text{-compatible} .$$

Si $K = K(N)$ est le groupe de congruence principale on peut définir aussi $\mathcal{M}'_K(T)$ comme l'ensemble des couples (E, θ) où E/T est une famille de courbes elliptiques sur T et $\theta : (\Lambda/N\Lambda)_T \to E[N]$ est un isomorphisme de schéma en groupes sur T (structure de niveau N). Sur cet ensemble on considère la relation d'équivalence suivante

$$(E, \theta) \sim (E', \theta') \iff \exists \text{un isomorphisme sur } T \ \theta - \text{compatible} .$$

3.3. **Proposition.** *Il existe une bijection* $\Phi : \mathcal{M}'_N(T)/_\sim \to \mathcal{M}_{K(N)}(T)/_\sim$.

Démonstration. Pour simplifier on prend $T = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$.

(existence) Soit $(E, \theta) \in \mathcal{M}'_N(\mathbb{C})$, alors on peut toujours relever $\theta : \Lambda/N\Lambda \to E[N]$ à un isomorphisme $\hat{\theta} : \Lambda \otimes \hat{\mathbb{Z}} \to T_f E$. Donc le couple $\Phi(E, \theta) = (E, \hat{\theta} \otimes 1_{\mathbb{A}_f})$ appartient à $\mathcal{M}_{K(N)}(\mathbb{C})$. On note que si $\tilde{\theta}$ est un autre relèvement de θ on à que $\tilde{\theta}^{-1} \circ \hat{\theta}$ appartient à $K(N)$ et donc Φ est bien définie.

(injectivité) Soit $\Phi(E_1, \theta_1) = \Phi(E_2, \theta_2)$, alors il existe une isogenie $f : E_1 \to E_2$ compatible avec les relèvements $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$. Cela implique que $f = \hat{\theta}_2 \circ \hat{\theta}_1^{-1}$ qui est donc un isomorphisme sur les modules de Tate entiers (pour tout ℓ). Donc par le théorème de Tate f provient d'un isomorphisme de courbes elliptiques.

(surjectivité) Etant fixé η on peut toujours composer par une isogenie de façon à changer η par η' définie sur $\hat{\mathbb{Z}}$. $\square$

3.4. *Remarque.* On voit facilement que $\mathcal{M}'_1(\mathbb{C})/\sim$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de courbes elliptiques sur $\mathbb{C}$.

3.5. **Moduli de structures de Hodge.** Sur la catégorie des variétés analytiques complexes lisses on peut définir un problème de module $\mathcal{H}_K$ tel que $\mathcal{H}_K(\mathbb{C})$ est l'ensemble des triples $(W, h, \eta K)$ telles que (W, h) est une structure de Hodge rationnelle et $\eta : V(\mathbb{A}_f) \to W(\mathbb{A}_f)$ est un $\mathbb{A}_f$-isomorphisme. Deus triples sont équivalentes ssi il existe un isomorphisme de $\mathbb{Q}$-structures de Hodge compatible à η.

Si $K = K(N)$ on peut aussi considérer $\mathcal{H}'_N(\mathbb{C})$ l'ensemble des des triples (W, h, θ) où on remplace ηK par un isomorphisme $\theta : \Lambda/N\Lambda \to W/NW$. Deus triples sont équivalentes ssi il existe un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-structures de Hodge compatible avec θ.

3.6. **Proposition.** *On a des bijections*

$$\mathcal{M}_K(\mathbb{C})/_\sim \xrightarrow[1:1]{(1)} \mathcal{H}_K(\mathbb{C})/_\sim \xrightarrow[1:1]{(2)} \mathrm{Sh}_K(G, X) .$$

Démonstration. (1) c'est une conséquence du théorème de Riemann : soit A une variété abélienne complexe et $H_1(A, \mathbb{Z})$ sa cohomologie de Betti, alors le

3. Ici $V_f(E/T)$ est le module de Tate relatif défini comme $\mathbb{Q} \otimes \mathrm{colim}_N\, E[N]$.

foncteur $A \mapsto H_1(A, \mathbb{Z})$ induise une équivalence entre la catégorie des variétés abeliennes complexes et la catégorie de structures de Hodge (entières et sans torsion) polarisées de type $(-1,0),(0,-1)$. Si on tensorise par $\mathbb{Q}$ on obtient le même résultat à isogenie près et donc il faut remplacer les structures de Hodge entières par les $\mathbb{Q}$-structures de Hodge.

(2) (existence) Soit $(W, h, \eta K)$ dans $\mathcal{H}_K(\mathbb{C})$. L'existence de l'$\mathbb{A}_f$-isomorphisme η implique que W et V ont la même dimension et on peut choisir un $\mathbb{Q}$-isomorphisme $a : W \to V$. On pose $h^a(z) := a \circ h(z) \circ a^{-1}$ de façon que $h^a \in X$; puis on dénote (de façon un peut abusive) par $a\eta$ la composition $(a \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{A}_f}) \circ \eta \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$.

Si $b : W \to V$ est un autre $\mathbb{Q}$-isomorphisme, alors il existe $q \in G(\mathbb{Q})$ tel que $b = q \circ a$ est alors

$$(h^b, b\eta) = q \cdot (h^a, a\eta) \ ,$$

donc la classe $[h^a, a\eta]$ est bien déterminée.

(surjectivité) L'élément $[h, g] \in \mathrm{Sh}_K$ admet comme antécédent (V, h, gK).

(injectivité) exercice. □

3.7. **Courbes modulaires classiques.** [4] Soit (E, θ) un élément de $\mathcal{M}'_N(\mathbb{C})$. Soit $\nu = \nu(E, \theta)$ la composition suivante

$$\nu : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \cong \bigwedge^2 (\Lambda/N\Lambda) \xrightarrow{\wedge^2\theta} \bigwedge^2 (E[N]) \xrightarrow{e_N} \mu_N \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \ ,$$

où le dernière isomorphisme à droite associe $\exp(2\pi i k/N) \mapsto k$ et e_N dénote le pairing de Weil [5].

Le couple (E, θ) correspond à un point $x \in \mathrm{Sh}_K$ et ν détermine sa composante connexe

$$\pi_0(\mathcal{M}'_N(\mathbb{C})) = \pi_0(\mathrm{Sh}_{K(N)}(G, X)) \cong \mathbb{Q}_{>0} \setminus \mathbb{A}_f^\times / \nu(K(N)) \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \ .$$

En fait la courbe modulaire classique $Y(N) = \Gamma(N)\backslash X^+$ est la composante connexe de $\mathrm{Sh}_{K(N)}$ qui correspond à l'unité de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. On justifier cette affirmation en rappelant que $Y(N)$ représente (pour $N > 5$) le problème de modules $F_N(T)$ = l'ensemble des couples (E, θ) où E/T est une courbe elliptique sur T et $\theta : \Lambda/N\Lambda \to E[N]$ est un isomorphisme tel que $\nu(E, \theta) = 1$. La relation d'équivalence sur cet ensemble est la même que pour $\mathcal{M}'_N$.

3.8. **Le demi plan de Poincaré à la Deligne.** Soit T un espace analytique complexe lisse. On considère l'ensemble $F_0(T)$ des couples (E, θ) où est une (famille analytique des) courbe elliptique sur T et $\theta : \Lambda \to \mathbb{R}^1\pi_*\mathbb{Z}^\vee$ est un isomorphisme de système locaux sur T tel que $e((1,0),(0,1)) = 1$, $e(-,-)$ dénote le pairing de Weil complexe. Deux éléments de cet ensemble sont isomorphes s'il existe un T-isomorphisme compatible avec θ.

On a que le demi plan de Poincaré X^+ représente le foncteur $F_0/_\sim$. [6]

4. Deligne-Rapoport
5. Autrement dit $\nu = k$ si $e_N((1,0),(0,1)) = \exp(2\pi i k/N)$.
6. référence précise

4. La preuve du théorème

Soit $x \in \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$ qui correspond à la classe d'un couple $(E, \eta K)$ dans $\mathcal{M}_K(\mathbb{C})$. On rappel que E^σ est le pull-back de E le long σ. Il existe alors un morphisme naturel $\sigma_E : E(\mathbb{C}) \to E^\sigma(\mathbb{C})$ qui induise un morphisme $\sigma_E : V_f(E) \to V_f(E^\sigma)$: alors on peut poser $\eta^\sigma = \sigma_E \circ \eta$ et définir $\sigma(x)$ comme le point correspondant à (E^σ, η^σ).

4.1. **Condition A.** On peut se réduire à montrer le résultat pour K petit [7].

On veux montrer que l'application $(\mathrm{Sh}_K)^\sigma \to \mathrm{Sh}_k$ définie par $x \mapsto \sigma(x^{\sigma^{-1}})$ est algébrique. On peut se réduire à travailler sur une composante connexe

$$\mathrm{Sh}_K = \sqcup_{\epsilon \in \pi_0(\mathrm{Sh}_K)} X^+/\Gamma_\epsilon$$

où Γ_ϵ est un conjugué de $\Gamma = K \cap G(\mathbb{Q})$. L'action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ sur Sh_K induise une action sur les composantes connexes $\epsilon \mapsto \sigma(\epsilon)$ et donc on obtient une application (ensembliste pour l'instant)

$$(X^+/\Gamma_\epsilon)^\sigma \to X^+/\Gamma_{\sigma(\epsilon)} \qquad x \mapsto \sigma(x^{\sigma^{-1}}) \ .$$

Pour montrer que ce dernier morphisme est bien algébrique on argument de la façon suivante. Soit $(\mathcal{E}, \theta)$ une famille de courbes elliptiques [8] munie d'une structure de niveau K sur $\Gamma_\epsilon \setminus X^+$ et tout élément de la famille est dans la composante connexe ϵ.

Alors on obtient par changement de base la famille $(\mathcal{E}^\sigma, \theta^\sigma)$ définie sur $(\Gamma_\epsilon \setminus X^+)^\sigma$.

Jusqu'ici tout objet était algébrique, si on analytifie tout on peut passer au revêtement universel $(X^+)^\sigma$ de (l'espace analytique) $(\Gamma_\epsilon \setminus X^+)^\sigma$.

En particulier on a une famille $(\mathcal{E}^\sigma)^{\mathrm{an}}$ de courbes elliptiques (analytiques) sur $(X^+)^\sigma$, alors cette famille est le pull-back de la famille universelle par un (et unique) morphisme $\phi : (X^+)^\sigma \to X^+$.

Ce morphisme est compatible avec $x \mapsto \sigma(x^{\sigma^{-1}})$ qui s'obtient donc par passage au quotient d'un morphisme analytique sur les revêtements universelles. Or il suffit d'appliquer Bailey-Borel pour en déduire que f_σ est bien algébrique.

4.2. **Condition B1.** On rappel que le groupe d'automorphisme d'une variété de Shimura est fini. Puis pour tout $x \in X$ seul l'identité stabilise tout élément de la forme $[x, g]$, $g \in G(\mathbb{A}_f)$. Donc on peut certainement construire une suite finie de la forme $[x, g_i]$ satisfaisant la condition B1.

4.3. **Condition B2.** C'est le théorème fondamentale de la multiplication complexe qui garantie $\sigma \cdot [x, g_i] = [x, g_i]$ pour x de type CM et σ fixant une extension finie du corps de définition de x.

Institut de Mathématiques de Bordeaux - 351, cours de la Libération - F 33405 TALENCE cedex

7. car si $K \subset K'$ on a le quotient algébrique $\mathrm{Sh}_K \to \mathrm{Sh}_{K'}$ et on peut utiliser propriété universelle des quotients.
8. description explicite