GDT 2015 A2X
–
VARIETES DE SHIMURA : LE CAS CONNEXE

N. MAZZARI

Résumé. Le but de cet exposé est celui presenter la notion de variete de Shimura connexe (de niveau fini et infini) et de décrire leur uniformisation adelique.

Il faut s'attendre à beaucoup de définitions/notations, quelques resultats, une partie de demonstations et peut être un exemple.

1. L'objet de base

1.1. **Notation.** On se donne un triplet (G, D, h) où

(1) G est un groupe algebrique $/\mathbb{Q}$ qui on suppose semi-simple [1] et de type non-compacte [2]

(2) D est una domain hermitien symmetrique [3].

(3) $h : G(\mathbb{R})^+ \to \mathrm{Hol}(D)^+$ est un homorphisme surjectif de groupes de Lie réels à noyau compacte. (l'exposante + denote la composante connexe de l'identité)

On remarque que h se factorise par $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})^+$ car $\mathrm{Hol}(D)^+$ est auto-adjoint ($G^{\mathrm{ad}} = G/Z$). Étant Z discret et compacte aussi le noyau de h restreint à $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})^+$ est compacte.

Si on considere $\Gamma \leq G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ sous-groupe arithmetique, alors son image $\bar{\Gamma}$ par h est un sous-groupe arithmetiqe de $\mathrm{Hol}(D)^+$ (pour la déf. de p. 34). Donc si Γ est sans-torsion $\Gamma \cong \bar{\Gamma}$.

1.2. **Varieté de Shimura connexe.** Pour tous $\Gamma \leq G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ *admissible* [4], i.e. sous-groupe arithmetique sans torsion tel que son image inverse dans $G(\mathbb{Q})^+$ est de congruence, on definit

$$\mathrm{Sh}^\circ_\Gamma(G, D) := \Gamma \setminus D = \bar{\Gamma} \setminus D$$

qui est une varieté algebrique grace à Baily et Borel. Puis si $\Gamma \subset \Gamma'$ on a une application algebirque canonique $\mathrm{Sh}^\circ_\Gamma(G, D) \to \mathrm{Sh}^\circ_{\Gamma'}(G, D)$ et on peut former le systeme inverse

$$\mathrm{Sh}^\circ(G, D) := \{\mathrm{Sh}^\circ_\Gamma(G, D) | \ \Gamma \text{ admissible}\}$$

Date: Janvier-Avril 2015.

1. i.e. tout sous-groupe distingué, connexe et abelien est tirviale. L'exemple typique est SL_n.

2. i.e. tout sous-groupe distingué de type compacte est trivile. $H/\mathbb{Q}$ est de type compacte si $H(\mathbb{R})$ est compacte.

3. i.e. $D = H(\mathbb{R})^+/K_u$ avec H un groupe algebrique réel et auto adjointe...

4. nom choisi pour faciliter l'exposition.

qui est la *varieté de Shimura connexe associée à* (G, D, h).[5]

1.3. **Faits diverses.** Si $g \in G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ on peut noter la même lettre l'application holomorphe induite sur D et on obtient un morphisme algebrique

$$\mathrm{Sh}^\circ_\Gamma(G, D) \to \mathrm{Sh}^\circ_{g\Gamma g^{-1}}(G, D) \ , [x] \mapsto [gx] \ .$$

Donc $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ agit sur le systeme $\mathrm{Sh}^\circ(G, D)$, mais pas sur ces elements.

Les varietés de la forme $\mathrm{Sh}^\circ_\Gamma(G, D)$ avec $\Gamma \leq G(\mathbb{Q})^+$ sous-groupe de congruence, à image sans torsion dans $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$, forment un systme cofinale dans $\mathrm{Sh}^\circ(G, D)$.

2. Donnés de Shimura connexes (dSc)

2.1. **Le tore de Deligne.** Soit $\mathbb{S} := \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ le tore de Deligne. On a la suite exacte de tores sur $\mathbb{R}$

$$0 \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbb{S} \to \mathbb{U} \to 0 \ ,$$

où la premiere inclusion est $r \to r^{-1}$; la projection est $z \to z/\bar{z}$; $\mathbb{U}$ est le tore réel dont les points réels forment le cercle unitaire complexe.

On remarque pour la suite que si $u : \mathbb{U} \to G$ est un morphisme de groupes algebriques on peut definir par composition $v : \mathbb{S} \to G$ tel que $v(z) = u(z/\bar{z})$.

2.2. **Les axiomes de Deligne.** On a deux definitions equivalentes de dSc dont la difference depend du choix entre $\mathbb{U}$ et $\mathbb{S}$ (il est utile de connaitre les deux). On vais les donner en parallele.

Un dSc est un couple (G, D) (resp. (G, X^+)), où G est un groupe algebrique semisimple sur $\mathbb{Q}$ et D (resp. X^+) est la classe de $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})^+$-conjugaison d'un homomorphism $u : \mathbb{U} \to G^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{R}}$ (resp. $v : \mathbb{U} \to G^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{R}}$) tel que

- SU1 $\mathrm{Lie}(u(z))_{\mathbb{C}} = z,\ 1, z^{-1}$ (resp. $\mathrm{Lie}(v(z))_{\mathbb{C}} = z/\bar{z},\ 1, \bar{z}/z$).
- SU2 $\mathrm{ad}(u(-1))$ (resp. $\mathrm{ad}(v(-i))$) est une involution de Cartan pour G^{ad}.
- SU3 tout $\mathbb{Q}$-facteur H de G^{ad}, tel que $H(\mathbb{R})$ est compacte (resp. tel que v agit trivialement), est triviale.

On remarque que ces axiomes sont verifié par u (resp. v) si et seulement si ils sont verifié par tout element dans D (resp. X^+). Puis il est facile de voire que à partir de u on peut definir v et trouver le dictionnaire des premiers deux axiomes. Pour le troiseme axiome on à besoin du lemme suivant

2.3. **Lemme.** *Soit H un groupe de Lie réel adjointe et soit $u : \mathbb{U} \to H$ un homomorphisme qui verifie SU1 et SU2. Alors les affermations suivantes sont euivalentes :*

(1) $u(-1) = 1$ *;*

(2) u *est triviale ;*

(3) H *est compacte.*

5. Certains appelent $\mathrm{Sh}^\circ_\Gamma(G, D)$ la var. de Shimura de niveau Γ et $\mathrm{Sh}^\circ(G, D)$ celle la de niveau infini.

Démonstration. Si $u(-1) = 1$, alors $u(z) = u(-z)$ et $\mathrm{Lie}(u(z))_{\mathbb{C}} \neq z^{\pm 1}$ (car $z^{\pm 1} \neq -z^{\pm 1}$). Donc l'action sur $\mathrm{Lie}(H)_{\mathbb{C}}$ est triviale. Par pleine fidelité u est trivaile aussi.

Si u est triviale, alors $u(-1) = 1$ et aussi $\mathrm{ad}u(-1) = 1$. Or l'identité est une ivolution de Cartan ssi $H(\mathbb{R})$ est compacte.

Pour terminer la preuve on suppose $H(\mathbb{R})$ compacte, donc l'identité est une involution de Cartan et alors $\mathrm{ad}u(-1) = 1$ (deux involutions de Cartan sont cojuguées). Comme $Z(H)$ est triviale ce la implique $u(-1) = 1$. □

2.4. **Proposition.** *On a une correspondence bijective entre les donnés de Shimura est le triples* (G, D, h) *comme dans § 1.1.*

Démonstration. Soit (G, D) un dSc et $u \in D$. Le groupe $G^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{R}}$ admet une decomposition en facteurs simples $G_1 \times \cdots \times G_s$ et $u = (u_1, ..., u_s)$. Par le lemme precedent $u_i = 1$ ssi G_i est compacte. Si G_i est non-compacte il existe un DSH D'_i tel que $G_i(\mathbb{R})^+ = \mathrm{Hol}(D'_i)^+$ et on peut l'identifier avec la classe D_i de $G_i(\mathbb{R})^+$-conjugaison de u_i. Alors on pose $D = \prod D_i$ et onverifie facilement qu'on est dans la situation de § 1.1.

De l'autre coté il suffit de choisir u parmi le symmetries s_p, $p \in D$ et utiliser 1.21. □

3. Le point de vue adelique

3.1. **Produit topologique restreint.** Soit $(G_i)_I$ une famille de groupes topologiques localement compactes et $(K_i)_I$ une famille de sous-groupe compactes et ouvertes. On définit le groupe

$$\prod_I (G_i : K_i) := \{(x_i)_I \in \prod_I G_i |\ x_i \in K_i \text{ p.p.t.}\}\ .$$

Il est muni de la topologie qui a comme ouverts les $\prod_I U_i$ tel que $U_i \subset G_i$ est ouvert et $U_i = K_i$ p.p.t..

Les exemples basiques sont

$$\mathbb{A}_f := \prod_\ell (\mathbb{Q}_\ell : \mathbb{Z}_\ell)\ , \quad \mathbb{A}^*_f := \prod_\ell (\mathbb{Q}^*_\ell : \mathbb{Z}^*_\ell)$$

appellés anneaux des adeles finis et des ideles finis, respectivement.

3.2. **Points adeliques de $G/\mathbb{Q}$.** Si $G/\mathbb{Z}$ est un groupe algebrique on peut definir sans souci l'ensmble de se points adéliques

$$G(\mathbf{A}_f) := \prod_\ell (G(\mathbb{Q}_\ell) : G(\mathbb{Z}_\ell))\ .$$

En particulier on a les tautologies $\mathbb{A}_f = \mathbb{G}_{\mathrm{a}}(\mathbb{A}_f)$ et $\mathbb{A}^*_f = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathbb{A}_f)$.

Soit G un groupe algebrique sur $\mathbb{Q}$ et soit $\alpha : G \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{Q}}$ une immersion fermée. On denote par G_α la cloture de Zarsiki de G dans $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$: c'est un modele plat de G. Alors on peut definir

$$G(\mathbf{A}_f) := G_\alpha(\mathbf{A}_f) = \prod_\ell (G_\alpha(\mathbb{Q}_\ell) : G_\alpha(\mathbb{Z}_\ell))\ .$$

Il faut bien verifier que cette definition ne depend pas d'α : si β est une autre immersion on a un isomorphisme sur le fibre generiques $(G_\alpha)_{\mathbb{Q}} \cong G \cong (G_\beta)_{\mathbb{Q}}$, donc on peut definir un isomorphism $G_\alpha \to G_\beta$ sur $\mathbb{Z}[1/d]$, pour un certain entier d ; alors pour tous $\ell \not| d$ on a l'egalité $G_\alpha(\mathbb{Z}_\ell) = G_\beta(\mathbb{Z}_\ell)$ qui implique l'independence cherchée.

3.3. **Description adelique de $\Gamma(N)$.** Soit G un groupe algebrique reductive (pas forcement semisimple) sur $\mathbb{Q}$. Soit $\alpha : G \to \mathrm{GL}_{n,\mathbb{Q}}$ une immersion fermée on pose

$$\Gamma(N) = \Gamma_\alpha(N) := G(\mathbb{Q}) \cap \ker(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})) \ .$$

Soit $K(N) = \prod K_\ell$ le sous groupe de $G(\mathbf{A}_f) = G_\alpha(\mathbf{A}_f)$ dont la ℓ-compasante est

$$K_\ell := \begin{cases} G_\alpha(\mathbb{Z}_\ell) = G(\mathbb{Q}_\ell) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_\ell) & \text{si } \ell \not| N \\ \ker(G_\alpha(\mathbb{Z}_\ell) \to G_\alpha(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})) & \text{si } r = \mathrm{ord}_\ell(N) \end{cases} .$$

3.4. **Proposition.**

(1) $K(N)$ est un sous-groupe compacte et ouvert tel que
$$K(N) \cap G(\mathbb{Q}) = \Gamma(N) \ .$$

(2) Pour tous $K \leq G(\mathbf{A}_f)$ sous-groupe compact ouvert sa restriction $K \cap G(\mathbb{Q})$ est un groupe de congruence et tout groupe de congruence de $G(\mathbb{Q})$ s'obtient de cette maniere.

Démonstration. $K(N)$ est ouvert par définition de la topologie adélique et il est compacte par Tychonoff. On a que les sous-groupes compactes et ouvertes de $G(\mathbf{A}_f)$ contenant $K(N)$ coupent, après inteection avec $G(\mathbb{Q})$, des sous-groupes de congruence qui continennent $\Gamma(N)$. Puis tous K sous-groupe compacte et ouvert de $G(\mathbf{A}_f)$ contient $K(N)$ pour un certain N. □

3.5. **Theoreme d'approximation forte.** Soit G un groupe algebrique $/\mathbb{Q}$. Si G est semisimple, simplement connexe [6] et de type non-compacte, alors $G(\mathbb{Q})$ est dense dans $G(\mathbf{A}_f)$.

Démonstration pour SL_2. Pour tous corps F, $\mathrm{SL}_2(F)$ est engendré par les sous-groupes

$$A(F) := \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) | a \in F\} \quad B(F) := \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix}\right) | b \in F\} \ .$$

Soit C la cloture de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{A}_f)$. C est un groupe et il contient la cloture de $A(\mathbb{Q})$ et de $B(\mathbb{Q})$, qui est $A(\mathbf{A}_f)$ et $B(\mathbf{A}_f)$ (on se ramene à la cloture de $\mathbb{Q}$ dans l'anneau des adeles fini). Alors $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ (et aussi $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$) est contenu dans C, pour tout ℓ premier. Mais alors C, étant fermé, contient tout sous-ensemble de la forme

$$\prod_{\ell \in S} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_\ell) \times \prod_{\ell \notin S} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$$

avec S ensemble fini de premiers. On remarque que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{A}_f)$ est la limite de ce type de sous-ensembles. □

6. Un groupe smisimple G est dit simplement connexe si toute isogenie $H \to G$ avec H connexe est un isomorphisme. SL_2 est simplement connexe, PGL_2 non. La terminologie est compatible avec la définition topologique lorsque on travaille sur $\mathbb{C}$, voir mathoverflow question 49278 pour plus de details.

3.6. **Uniformization adelique.** Soit (G, D) un dSc avec G simplement connexe. Soit K un sous groupe compact ouvert de $G(\mathbf{A}_f)$ et $\Gamma = K \cap G(\mathbb{Q})$ le groupe de congreunce qui lui corresponde. On peut introduire la notation

$$\mathrm{Sh}^\circ_K(G, D) = \mathrm{Sh}^\circ_\Gamma(G, D) = \Gamma \setminus D$$

et l'appeler varieté de Shimura connexe di nieveau K associée à (G, D).

L'uniformisation adelique $\mathrm{Sh}^\circ_K(G, D)$ est donné (voir la proposition suivante) par le double quotient

$$G(\mathbb{Q}) \setminus D \times G(\mathbf{A}_f)/K \ ,$$

où $G(\mathbb{Q})$ agit à gauche sur $D \times G(\mathbf{A}_f)$ via

$$q \cdot (x, a) = (qx, qa) \quad q \in G(\mathbb{Q}),\ x \in D,\ a \in G(\mathbf{A}_f)\ ;$$

et K agit à droite via $(x, a) \cdot k = (x, ak)$, $k \in K$; D est muni da sa topologie et $G(\mathbf{A}_f)$ de la topologie adelique.

3.7. **Proposition.** L'application $D \to G(\mathbb{Q}) \setminus D \times G(\mathbf{A}_f)/K$ definie par $x \mapsto [x, 1]$ induise un homeomorphisme

$$\mathrm{Sh}^\circ_K(G, D) \to G(\mathbb{Q}) \setminus D \times G(\mathbf{A}_f)/K \ , \quad [x] \mapsto [x, 1]\ .$$

Démonstration. Par le theoreme d'approximation forte on a $G(\mathbf{A}_f) = G(\mathbb{Q}) \cdot K$ (car $G(\mathbb{Q})$ est dense et K est ouvert). Donc tout element du quotient double est representé par une classe de la forme $[x, 1]$, Deux telles classes $[x, 1]$ et $[y, 1]$ sont equivalentes ssi ils existent $q \in G(\mathbb{Q})$ et $k \in K$ tel que

$$qx = y \in D \ , \quad qk = 1 \in G(\mathbf{A}_f)\ .$$

Alors $q = k^{-1} \in G(\mathbb{Q}) \cap K = \Gamma$. Donc $[x] = [y]$ dans $\Gamma \setminus D$ et on a montré la bijectivité.

Pour terminer la preuve il suffit de montrer que l'application est continue et ouverte.

On cosidere le diagramme commutative

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & D \times G(\mathbf{A}_f)/K \arrow[d, "\varpi"] \\ \Gamma \setminus D \arrow[r, "\beta"'] & G(\mathbb{Q}) \setminus D \times G(\mathbf{A}_f)/K \end{tikzcd}$$

dont les fleches vertiacales π, ϖ sont des applications quotients, dont on quotient par l'action continue d'un groupe, donc sont de application continues et ouvertes. La fleche α est un homeorphisme sur l'image, donc ouverte, car le quotient $G(\mathbf{A}_f)/K$ est discret (K ouvert). Donc β est continue et ouverte. □

3.8. **Corollaire.** Si on passe à la limite (des espace topologiques)

$$\varprojlim_K \mathrm{Sh}^\circ_K(G, D) \cong \varprojlim_K G(\mathbb{Q}) \setminus D \times G(\mathbf{A}_f)/K = G(\mathbb{Q}) \setminus D \times G(\mathbf{A}_f)$$

Institut de Mathématiques de Bordeaux - 351, cours de la Libération - F 33405 TALENCE cedex