Variétés de Shimura de type de Hodge et de type PEL [*]

Ces notes correspondent à mon exposé au groupe de travail GAGA sur les variétiés de Shimura, dont le but est d'introduire les variétés de Shimura de type de Hodge, et de type PEL. La référence principale est [5] §7,8.

1 Variétés de Shimura de type de Hodge

1.1 Variétés modulaires de Siegel : quelques rappels

Soit (V, ψ) un espace symplectique sur $\mathbb{Q}$. [1] Soit $G = \mathbf{Gsp}(\psi)$ le groupe des similitudes symplectiques de (V, ψ) et $S = \mathbf{Sp}(\psi)$ le groupe symplectique. Soit $\nu\colon G \to \mathbb{G}_m$ le caractère canonique de G apparaissant dans la définition de $G = \mathbf{Gsp}(\psi)$. On a alors une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow S \longrightarrow G \xrightarrow{\nu} \mathbb{G}_m \longrightarrow 1,$$

et S le groupe dérivé de G.

Soit J une **structure complexe** sur $V(\mathbb{R}) := V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, *i.e.*, un automorphisme $J \in \mathrm{GL}(V(\mathbb{R}))$ tel que $J^2 = -\mathrm{id}$, ou encore, une structure de Hodge $h_J\colon \mathbb{S} \to \mathrm{GL}(V(\mathbb{R}))$ de type $(-1,0), (0,-1)$. Supposons $\psi(Ju, Jv) = \psi(u, v)$ pour tout $u, v \in V(\mathbb{R})$, ce qui revient au même de demander

$$\psi\left(h_J(z)u, h_J(z)v\right) = |z|^2 \psi(u, v) \quad \forall u, v \in V(\mathbb{R}), \forall z \in \mathbb{S}. \text{ [2]} \tag{1}$$

En particulier, $\mathrm{Im}(h_J) \subset \mathbf{Gsp}(\psi)$, et $\nu \circ h_J$ est le caractère $|z|^2 = z\bar{z}$ de $\mathbb{S}$.

Définition 1.1.1. *Une structure complexe J sur $V(\mathbb{R})$ est dite* ***positive*** *(resp.* ***négative****) si $\psi(Ju, Jv) = \psi(u, v)$ pour tout $u, v \in V(\mathbb{R})$, et si la forme symétrique $\psi_J(u, v) := \psi(u, Jv)$ est définite positive (resp. définite négative).*

Posons X^+ (resp. X^{-1}) l'ensemble des structures complexes positives (resp. négatives) sur $V(\mathbb{R})$. Notons $X = X^+ \bigcup X^-$, qui est munit d'une action naturelle de $G(\mathbb{R})$: pour tout $g \in G(\mathbb{R}) = \mathbf{Gsp}(\psi)$ et tout $J \in X$, $g \cdot J := gJg^{-1}$. On peut vérifier que (cf. [5, §6]) :

1. Le stabilisateur de X^+ dans $G(\mathbb{R})$ est $G(\mathbb{R})^+ = \{g \in G(\mathbb{R}) : \nu(g) > 0\}$;
2. $G(\mathbb{R})$ (resp. $S(\mathbb{R})$) agit transitivement sur X (resp. X^+) ;

---

[*] Exposé à IMB le 05, 21 mai 2015. Remarques/corrections sont les bienvenues.

1. *i.e.,* V est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, et ψ est une forme bilinéaire nondégénérée alternée sur V.

2. Si l'on note $z, \bar{z}\colon \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ les deux caratères de $\mathbb{S}$, alors $|z|^2 = z \cdot \bar{z}\colon \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{G}_m$ est défini sur $\mathbb{R}$, donc ceci défini un caractère sur $\mathbb{R}$ de $\mathbb{S}$.

3. Pour $J \in X$ et $g \in G(\mathbb{R})$, on a $h_{g \cdot J} = g h_J g^{-1}$. Ainsi l'application $J \mapsto h_J$ induit une bijection de X et sur une classe de $G(\mathbb{R})$-conjugaison de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{S}, G)$.
4. (G, X) (resp. (S, X^+)) est une donnée de Shimura (resp. donnée de Shimura connexe), notée dans la suite par $(G(\psi), X(\psi))$ (resp. par $(S(\psi), X^+(\psi))$). La variété de Shimura $\mathrm{Sh}(G, X)$ associée à (G, X) est appelée la **variété modulaire de Siegel associée à** (V, ψ).

Interprétations modulaires de $\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$

Soit $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe ouvert compact. Posons $V(\mathbb{A}_f) := \mathbb{A}_f \otimes_{\mathbb{Q}} V$.

Définition 1.1.2. *Posons $\mathcal{H}_K$ l'ensemble des triplets $((W, h), s, \eta K)$, où :*
- *(W, h) est une structure de Hodge rationnelle de type $(-1, 0), (0, -1)$;*
- *$s \colon W \times W \to \mathbb{Q}$ une forme bilinéaire telle que s ou $-s$ soit une polarisation de (W, h).* [3]
- *η est un isomorphisme $\mathbb{A}_f$-linéaires $V(\mathbb{A}_f) \to W(\mathbb{A}_f)$ envoyant ψ en un $\mathbb{A}_f^\times$-multiple de s.*

Un isomorphisme de deux triplets $((W, h), s, \eta, K) \to ((W', h'), s', \eta' K)$ est un isomorphisme de structures de Hodge rationnelles $b \colon (W, h) \to (W', h')$ envoyant s en un $\mathbb{Q}^\times$-multiple de s' tel que $b \circ \eta = \eta' \bmod K$.

Proposition 1.1.3 ([5] § 6, 6.3)**.** *Il existe une bijection $\mathcal{H}_K / \sim \to G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K$.*

En utilisant des résultats concernant les variétés abéliennes complexes, on en tire le théorème suivant :

Théorème 1.1.4 ([5] § 6, 6.11)**.** *Soit $\mathcal{M}_K$ l'ensemble des triplets $(A, s, \eta K)$, où A est une variété abélienne complexe sur $\mathbb{C}$, s est une forme alternée sur $H_1(A, \mathbb{Q})$ telle que s ou $-s$ soit une polarisation sur $H_1(A, \mathbb{Q})$, et $\eta \colon V(\mathbb{A}_f) \to V_f(A) := H_1(A, \mathbb{Q})(\mathbb{A}_f)$ est un isomorphisme $\mathbb{A}_f$-linéaire envoyant ψ en un $\mathbb{A}_f^\times$-multiple de s (puis on définit les isomorphismes de deux triplets de manière évidente). Il existe alors une bijection*

$$\mathcal{M}_K / \sim \longrightarrow G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K.$$

1.2 Variétés de Shimura de type de Hodge

La notion de variétés de Shimura de type de Hodge est une généralisation de variétés modulaires de Siegel.

Définition 1.2.1. *Une donnée de Shimura (G, X) est **de type de Hodge** s'il existe un espace symplectique (V, ψ) sur $\mathbb{Q}$ et un monomorphisme $\rho \colon G \hookrightarrow G(\psi)$ tels que X soit contenu dans $X(\psi)$. La variété de Shimura $\mathrm{Sh}(G, X)$ associée à (G, X) est dite **de type de Hodge**.*

3. En d'autre termes, s induit un morphisme de $\mathbb{Q}$-structure de Hodge $(W, h)^{\otimes 2} \to \mathbb{Q}(1)$ (*i.e.*, $s\,(h(z) \cdot w_1, h(z) \cdot w_2) = |z|^2 \cdot s(w_1, w_2)$, pour tout $w_1, w_2 \in W(\mathbb{R}), z \in \mathbb{S}$), et $(w_1, w_2) \mapsto s(w_1, h(i) \cdot w_2)$ soit une forme symétrique définite positive ou définite négative sur W ; par suite, s est une forme alternée.

Le composé de ρ avec le caractère $\nu\colon G(\psi) \to \mathbb{G}_m$ est une caractère de G, encore noté par ν dans la suite. Pour $r \in \mathbb{Z}$, posons $\mathbb{Q}(r)$ l'espace vectoriel $\mathbb{Q}$, sur lequel G agit par le caractère $r \cdot \nu$.

Remarque 1.2.2. Pour tout $h \in X$, $(\mathbb{Q}(r), h \circ \nu)$ est une structure de Hodge rationnelle de type $(-r, -r)$. En effet, comme $h \in X(\psi)$, par la formule (1), $(\nu \circ h)(z) = z\bar{z}$ pour tout $z \in \mathbb{S}$. Donc $(r\nu) \circ h = z^r \bar{z}^r$, et $\mathbb{S}$ agit sur $\mathbb{Q}(r)$ par le caractère $(z\bar{z})^r$. Ainsi $(\mathbb{Q}(r), \nu \circ h)$ est une structure de Hodge de type $(-r, -r)$. En particulier, la notation $\mathbb{Q}(r)$ est cohérente avec celle en théorie de structures de Hodge.

Lemma 1.2.3. *Il existe des applications multi-linéaires $t_i\colon V \times \cdots \times V \to \mathbb{Q}(r_i)$ ($1 \leq i \leq n$) telles que G soit le fixateur dans $G(\psi)$ de t_i pour tout i. En d'autres termes, on a*

$$G = \{g \in G(\psi) : t_i(gu_1, gu_2, \ldots) = \nu(g)^{r_i} t_i(u_1, u_2, \ldots) \text{ pour tout } i\}.$$

Démonstration. Par le théorème des semi-invariants de Chevalley, il existe une $\mathbb{Q}$-représentation E de $G(\psi)$ et un élément $e_0 \in E \setminus \{0\}$ tels que G soit le fixateur dans $G(\psi)$ de la droite L_0 de E engendrée par e_0. C'est-à dire, il existe un caractère $\lambda\colon G \to \mathbb{G}_m$ tel que

$$G = \{g \in G(\psi) : g \cdot e_0 = \lambda(g) \cdot e_0\}.$$

Or G est un groupe réductif, vu comme une représentation de G, E est semi-simple : il existe $E' \subset E$ un sous-espace G-invariant tel que $E = L_0 \oplus E'$. Considérons ensuite $W = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, E)$, et w_0 l'application linéaire telle que $w_0(E') = 0$ et que $w_0(e_0) = e_0$. Alors

$$G \subset \{g \in G(\psi) : g \cdot w_0 = w_0\} \subset \{g \in G(\psi) : g \cdot e_0 = e_0\} = G.$$

Cela dit G est bien le fixateur de $w_0 \in W = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, E)$. Or par définition, la représentation V de $G(\psi)$ est fidèle, la représentation W de $G(\psi)$ s'injecte dans la représentation ([1, 3.1 (i)])

$$\bigoplus_{i=1}^{n} V^{\otimes r_i} \otimes V^{\vee \otimes s_i}.$$

Enfin, comme ψ est nondégénérée, elle induit un isomorphisme de $G(\psi)$-representations $V \simeq V^\vee \otimes \mathbb{Q}(1)$. D'où

$$\bigoplus_{i=1}^{n} V^{\otimes r_i} \otimes V^{\vee \otimes s_i} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}(V^{\otimes r_i + s_i}, \mathbb{Q}(r_i)).$$

L'image de w_0 dans la dernière somme directe nous donne n applications multi-linéaires $t_i\colon V^{\otimes r_i + s_i} \to \mathbb{Q}(r_i)$ telles que

$$G = \{g \in G(\psi) : g \cdot t_i = t_i\}.$$

$\square$

Remarque 1.2.4. Soit $t\colon V^{\otimes m} \to \mathbb{Q}(r)$ une application multi-linéaire fixée par G. Alors

$$t(gu_1, \ldots, gu_m) = \nu(g)^r t(g_1, \ldots, u_n), \quad \forall g \in G.$$

Ainsi, pour $h \in X$, t définit un morphisme $(V, h)^{\otimes m} \to \mathbb{Q}(r)$ de structures de Hodge. Par suite, on a nécessairement $m = 2r$.

Soit (G, X) une donnée de Shimura de type de Hodge, et fixons une fois pour toute un plongement $(G, X) \hookrightarrow (G(\psi), X(\psi))$ pour un certain $\mathbb{Q}$-espace symplectique (V, ψ). Soient $t_1, \ldots, t_n$ les applications multi-linéaires sur V trouvés dans Lemme 1.2.3. Soit $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe ouvert compact. Posons $\mathcal{H}_K$ l'ensemble des triplets $((W, h), (s_i)_{0 \leq i \leq n}, \eta K)$ où

- (W, h) est une structure de Hodge rationnelle de type $(-1, 0), (0, -1)$;
- $s_0 \colon W \times W \to \mathbb{Q}$ est une forme bilinéaire telle que s_0 ou $-s_0$ soit une polarisation de (W, h) ;
- $s_i \colon W \times \cdots \times W \to \mathbb{Q}(r_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ des applications multi-linéaires ; et
- ηK est la K-orbite d'un $\mathbb{A}_f$-isomorphisme $\eta \colon V(\mathbb{A}_f) \to W(\mathbb{A}_f)$ envoyant ψ en $\mu \cdot s_0$, et t_i en $\mu^{r_i} \cdot s_i$ $(1 \leq i \leq n)$ pour un certain $\mu \in \mathbb{A}_f^\times$,

vérifiant la condition suivante :

(*) Il existe un isomorphisme $a \colon W \to V$ envoyant s_0 en $\lambda \cdot \psi$, s_i en $\lambda^{r_i} \cdot t_i$ $(1 \leq i \leq n)$ pour un scalaire $\lambda \in \mathbb{Q}^\times$, et h en un élément de X.[4]

Un isomorphisme $((W, h), (s_i), \eta K) \to ((W', h'), (s'_i), \eta' K)$ de deux objets de $\mathcal{H}_K$ est un isomorphisme $b \colon (W, h) \to (W', h')$ de structures de Hodge rationnelles tel que $b(s_0) = \delta s'_0$, s_i en $\delta^{r_i} \cdot s'_i$ pour un certain $\delta \in \mathbb{Q}^\times$, et $b \circ \eta = \eta' \bmod K$.

Proposition 1.2.5. *Il existe une bijection naturelle*

$$\mathcal{H}_K / \sim \longrightarrow \mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K.$$

Démonstration. Soit $((W, h), s, \eta K)$ un triplet appartenant à $\mathcal{H}_K$. Considérons un isomorphisme a dans la condition (*). Posons ah le morphisme suivant

$$\mathbb{S} \longrightarrow \mathrm{GL}(V(\mathbb{R})), \quad z \mapsto a \circ h(z) \circ a^{-1}.$$

Par la condition (*), ah est un caractère de G, et la composition $a \circ \eta \colon V(\mathbb{A}_f) \to V(\mathbb{A}_f)$ est une similitude symplectique de ψ, *i.e.*, $a \circ \eta \in G(\psi)$. De plus, $a \circ \eta$ laisse invariant t_i : en effet, avec les notations précédentes, on a

$$\lambda\mu \cdot \psi(a \circ \eta(u), a \circ \eta(v)) = \psi(u, v), \quad \forall\, u, v \in V,$$

d'où, $\nu(a \circ \eta) = \frac{1}{\lambda\mu}$. De même,

$$(\lambda\mu)^{r_i} \cdot t_i(a \circ \eta(u_1), a \circ \eta(u_2), \ldots) = t_i(u_1, u_2, \ldots),$$

ou encore

$$t_i(a \circ \eta(u_1), a \circ \eta(u_2), \ldots) = \nu(a \circ \eta)^{r_i} \cdot t_i(u_1, u_2, \ldots).$$

4. Cette condition entraîne que s_i est un tenseur de Hodge pour tout $1 \leq i \leq n$: en effet, comme a envoye s_i en $\lambda^{r_i} \cdot t_i$, on trouve $\lambda^{r_i} t_i(a(w_1), a(w_2), \ldots) = s_i(w_1, w_2, \ldots)$. Ainsi $\lambda^{r_i} t_i(a(h(z)(w_1)), a(h(z)(w_2)), \ldots) = s_i(h(z)(w_1), h(z)(w_2), \ldots)$. En d'autres termes, on obtient

$$\lambda^{r_i} t_i(ah(z)(a(w_1)), ah(z)(a(w_2)), \ldots) = s_i(h(z)(w_1), h(z)(w_2), \ldots).$$

Or a envoye h en le caractère ah de G, il s'ensuit que t_i est invariant par $ah(z)$. Par suite, $s_i(h(z)(w_1), h(z)(w_2), \ldots) = \lambda^{r_i} \cdot t_i(ah(z)(a(w_1)), ah(z)(a(w_2)), \ldots) = \lambda^{r_i}(z\bar{z})^{r_i} t_i(a(w_1), a(w_2), \ldots) = (z\bar{z})^{r_i} s_i(w_1, w_2, \ldots)$. Cela dit, s_i est un tenseur de Hodge de (W, h).

Cela dit $a \circ \eta$ laisse invariant t_i. Par suite, $a \circ \eta \in G(\mathbb{A}_f)$, et on obtient un élément $(ah, a \circ \eta) \in X \times G(\mathbb{A}_f)$. Sa classe dans $\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$ ne dépend pas du choix de a : soit a' un deuxième isomorphisme vérifiant la condition (*), on vérifie aisément que $(a'h, a' \circ \eta)$ diffère de $(ah, a \circ \eta)$ par l'élément $a' \circ a^{-1} \in G(\mathbb{Q})$. De plus, les objets isomorphes de $\mathcal{H}_K$ définissent le même objet de $\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$, d'où l'application :

$$\mathcal{H}_K/\sim \longrightarrow G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K, \quad \text{classe de } ((W,h),(s_i)_{0\leq i\leq n}, \eta K) \mapsto \text{classe de } (ah, a\circ\eta).$$

Cette application est surjective : pour $(h, \eta) \in X \times G(\mathbb{A}_f)$, l'image de $((V,h),(\psi,t_i)_{1\leq i\leq n}, \eta K)$ par l'application ci-dessus est la classe de (h,η). Elle est aussi injective : pour le voir, soient $((W,h),(s_i)_{0\leq i\leq n}, \eta K)$ et $((W',h'),(s'_i)_{0\leq i\leq n}, \eta' K)$ deux objets de $\mathcal{H}_K$ ayant la même image par l'application ci-dessus. Il existe donc $b \in G(\mathbb{Q})$ et $k \in G(K)$ tels que $(a'h', a' \circ \eta') = (b \cdot ah, (b \circ a \circ \eta) \cdot k)$. Alors $\iota := a'^{-1} \circ b \circ a$ donne un isomorphisme $\mathbb{Q}$-linéaire de $W \xrightarrow{\sim} W'$ envoyant s_0 en $\delta s'_0$ et s_i en $\delta^{r_i} s'_i$ $(1 \leq i \leq n)$, tel que $\iota \circ \eta = (a'^{-1} \circ b \circ a) \circ \eta = a'^{-1} \circ (a' \circ \eta' \circ k) = \eta' \circ k$. Il reste à voir que $\iota \colon W \to W'$ est un morphisme de structures de Hodge, ce qui résulte du fait que $a'h' = b \cdot ah$, ou d'une manière équivalente, $a' \circ h'(z) \circ a'^{-1} = b \circ (a \circ h(z) \circ a^{-1}) \circ b^{-1}$ pour tout $z \in \mathbb{S}$, ou encore, $h'(z) = \iota \circ h(z) \circ \iota^{-1}$ pour tout $z \in \mathbb{S}$. □

Comme dans le cas de Siegel, à partir de Proposition 1.2.5, on peut déduire aussi une interprétation modulaire de $\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C})$ en termes des variétés abéliennes complexes. On renvoie à [5, §7] pour les détails.

2 Variétés de Shimura de type PEL

Dans toute cette section, la lettre k désigne un corps de caractéristique nulle. Sauf mention du contraire, une k-algèbre est un anneau A (pas forcément commutatif) contenant k dans le centre tel que $\dim_k A < \infty$, et les modules sur un tel k-algèbre sont les modules à gauche de dimension finie sur k.

2.1 Algèbres à involution

Soit B une k-algèbre. On dit que B est **simple** si ses seuls idéaux bilatéraux sont 0 et B. On rappelle les propriétés fondamentales suivantes, qui seront utilisées dans les prochains numéros. On renvoie à [4] pour les détails.

1. Soit D une k-algèbre à division (c'est-à-dire, un corps gauche). Alors l'ensemble $\mathcal{M}_n(D)$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans D est une k-algèbre simple. Réciproquement, toutes k-algèbres simples sont forcément de cette forme. De plus, à isomorphisme près, il n'y a qu'un seul $\mathcal{M}_n(D)$-module simple : c'est $\mathcal{L} = D^n$, vu comme l'ensemble des vecteurs colonne à coefficients dans D. De plus, tout $\mathcal{M}_n(D)$-module est isomorphe à un produit fini de $\mathcal{L}$. En particulier, la catégorie de $\mathcal{M}_n(D)$-module est semi-simple.
2. (Théorème de Noether-Skolem) Soient $f, g \colon A \to B$ deux morphismes de k-algèbres avec A simple et B simple centrale (*i.e.*, B est simple et $k \subset B$ est bien le centre de B). Alors il existe un élément inversible $b \in B^\times$ tel que $f(a) = b \cdot g(a) \cdot b^{-1}$ pour tout $a \in A$.

3. Soit B une k-algèbre semi-simple, *i.e.,* un produit de k-algèbres simples
$$B = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n.$$
Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $\mathcal{M}_i$ le B_i-module simple, qu'on voit comme un B-module par la projection $B \to B_i$. Alors
   - À isomorphismes près, les seuls B-modules simples sont exactement $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n$;
   - La catégorie des B-modules est semi-simple. Ainsi, deux B-modules $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ sont isomorphisme si et seulement s'ils ont le même morphisme de trace, *i.e.*, pour tout $b \in B$, $\mathrm{Tr}(b|_{\mathcal{M}}) = \mathrm{Tr}(b|_{\mathcal{M}'})$.

Définition 2.1.1 (Algèbres à involution)**.** *Une involution d'une k-algèbre B est une application*
$$B \longrightarrow B, \quad b \mapsto b^*$$
telle que $(ab)^* = b^* a^*$ et que $a^{**} = a$. (Ainsi $1^* = 1$ et $\lambda^* = \lambda$ pour tout $\lambda \in k \subset B$).

Proposition 2.1.2 (Classification sur un corps algébriquement clos)**.** *Soit k un corps algébriquement clos et soit $(B, *)$ une k-algèbre semi-simple à involution. Alors $(B, *)$ est un produit de k-algèbres à involution simples de la forme suivante :*
- (type (A)) $\mathcal{M}_n(k) \times \mathcal{M}_n(k)$*, et* $(a, b)^* = (b^t, a^t)$ *;*
- (type (C)) $\mathcal{M}_n(k)$*, et* $b^* = b^t$ *;*
- (type (BD)) $\mathcal{M}_{2n}(k)$*, et* $b^* = J \cdot b^t \cdot J^{-1}$*, où* $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration. [5, §8, 8.3]. □

Plus généralement, une k-algèbre à involution $(B, *)$ est dite de type (A) (resp. de type (C), resp. de type (BD)) si les facteurs simples (en tant que $\bar{k}$-algèbre à involution) de $(B, *) \otimes_k \bar{k}$ sont tous de type (A) (resp. de type (C), resp. de type (BD)).

Remarque 2.1.3. Soit $(B, *)$ une k-algèbre à involution telle que B soit k-simple. Alors tous les facteurs simples de $(B, *) \otimes_k \bar{k}$ sont de même type. Pour le voir, remarquons d'abord que la k-algèbre B est ainsi simple, et
$$B \otimes_k \bar{k} = \bigoplus_{\rho \colon F_0 \hookrightarrow \bar{k}} B \otimes_{F_0, \rho} \bar{k}.$$
Il suffit donc de vérifier que $B \otimes_{F_0, \rho} \bar{k}$ sont de même type pour tous prolongements $\rho \colon F_0 \hookrightarrow \bar{k}$. Fixons dans la suite un tel prolongement $\rho \colon F_0 \subset \bar{k}$.
- Si F est de dimension 2 sur F_0, on a
$$B \otimes_{F_0} \bar{k} = B \otimes_F (F \otimes_{F_0} \bar{k}) \simeq \left(B \otimes_{F, \iota} \bar{k}\right) \times \left(B \otimes_{F, \iota'} \bar{k}\right),$$
où $\iota, \iota' \colon F \to \bar{k}$ sont les deux prolongements de F dans $\bar{k}$ au-dessus de ρ. Or B est une F-algèbre simple centrale, le changement de base $B \otimes_{F, \iota} \bar{k}$ reste simple central sur $\bar{k}$. Par suite, on trouve
$$B \otimes_{F_0} \bar{k} \simeq \mathcal{M}_n(\bar{k}) \times \mathcal{M}_n(\bar{k}).$$
L'involution induite sur le centre $F \otimes_{F_0} \bar{k} \simeq \bar{k} \times \bar{k}$ de $B \otimes_{F_0} \bar{k}$ permute ces deux facteurs simples. Par suite, l'involution sur $B \otimes_{F_0} \bar{k}$ permute également les deux facteurs simples de $B \otimes_{F_0} \bar{k}$. Donc $(B \otimes_{F_0} \bar{k}, *)$ est nécessairement de type (A) ;

– Si $F = F_0$, alors $B \otimes_{F_0,\rho} \bar{k} = B \otimes_{F,\rho} \bar{k} \simeq \mathcal{M}_n(\bar{k})$. Alors $(B \otimes_{F,\rho} \bar{k}, *)$ est de type (C) ou de type (BD). En plus, remplacer ρ par un autre prolongement consiste à twister $(B \otimes_{F,\rho} \bar{k}, *)$ par un automorphisme de $\bar{k}$, ce qui ne change pas évidemment le type.

2.2 Modules symplectiques et les groupes algébriques associés

Soit $(B, *)$ une k-algèbre semi-simple à involution. Un $(B, *)$**-module symplectique** est la donnée d'un couple (V, ψ), où
– V est un B-module ;
– $\psi \colon V \times V \to k$ une une forme bilinéaire alternée telle que $\psi(bu, v) = \psi(u, b^*v)$.
Soit $F \subset B$ le centre de B, et soit $F_0 = \{x \in F : x^* = x\}$.

Définition 2.2.1. *Pour R une k-algèbre commutative (au sens de géométrie algébrique), posons $G(R)$ l'ensemble des $g \in \mathbf{GSp}(\psi)(R) \subset \mathrm{Aut}_R(V \otimes_k R)$ commutant avec B. En d'autres termes,*

$$G(R) := \{g \in \mathrm{Aut}_{B\otimes_k R}(V \otimes_k R) : \psi(gu, gv) = \nu(g)\psi(u, v) \text{ pour un certain } \nu(g) \in R^\times\}.$$

Posons aussi $G_1 = \ker(\nu \colon G \to \mathbb{G}_m)$.

Remarque 2.2.2 (Représentabilité)**.** Le foncteur G est représentable par un sous-schéma en groupe fermé de $\mathbf{Gsp}(\psi)$. En effet, par [6, Exposé VIII, Corollaire 6.7], le centralisateur $Z_{\mathbf{GL}(V)}(B)$ de $B \subset \mathrm{GL}(V)$ dans $\mathbf{GL}(V)$ est représentable par un sous-schéma en groupe fermé. Par suite, $G = \mathbf{Gsp}(\psi) \bigcap Z_{\mathbf{GL}(V)}(B)$, et donc G_1 est représentable par un sous-schéma en groupes fermé de $\mathbf{Gsp}(\psi)$.

2.2.1 Exemple : type (A)

Soit F/k une k-algèbre séparable de degree 2. On note $x \mapsto x^\sigma$ l'unique k-automorphisme non trivial de F/k. Soit W un F-module libre de rang fini. Soit

$$\phi \colon W \times W \longrightarrow F$$

une forme hermitienne : c'est-à-dire, ϕ est une application bi-additive, non-dégénérée telle que $\phi(\lambda \cdot u, v) = \lambda \cdot \phi(u, v)$ et que $\phi(v, u) = \phi(u, v)^\sigma$ pour tout $u, v \in W$ et tout $\lambda \in F$. Posons $B = \mathrm{End}_F(W)$, munie de l'involution $*$ définie par ϕ.

Lemma 2.2.3. *Pour tout $\lambda \in F$, on a $\lambda^\sigma = \lambda^*$. De plus, $(B, *)$ est une k-algèbre à division de type* (A)*.*

Démonstration. Par définition, $\phi(\lambda u, v) = \lambda\phi(u, v) = \phi(u, \lambda^\sigma v)$. Ainsi $\lambda^\sigma = \lambda^*$. De plus, le centre de $B \otimes_k \bar{k}$ est $F \otimes_k \bar{k} \simeq \bar{k} \times \bar{k}$, et l'involution de $B \otimes_k \bar{k}$ permute les deux facteurs de $F \otimes_k \bar{k} = \bar{k} \times \bar{k}$. En particulier, l'involution $*$ permute les deux facteurs de $B \otimes_k \bar{k} \simeq \mathcal{M}_n(\bar{k}) \times \mathcal{M}_n(k)$. Par suite, B est de type (A). □

Soit en outre V_0 un F-module libre de rang fini, muni d'une forme hermitienne alternée $\psi_0 \colon V_0 \times V_0 \longrightarrow F$. Posons $V = W \otimes_F V_0$, muni de la forme bilinéaire $\psi \colon V \times V \to k$ telle que

$$\psi(w \otimes v, w' \otimes v') = \mathrm{Tr}_{F/k}(\phi(w, w')\psi_0(v, v')), \quad \forall\, w, w' \in W, \quad v, v' \in V_0.$$

Lemma 2.2.4. *(V,ψ) est un $(B,*)$-module symplectique.*

Démonstration. exercice. $\square$

La forme hermitienne alternée ψ définit une involution sur $\mathrm{End}_F(V) \simeq \mathrm{End}_F(W) \otimes_F \mathrm{End}_F(V_0) = B \otimes_F \mathrm{End}_F(V_0)$, qui est compatible avec l'involution $*$ sur B. Pour cette raison, on la note encore par $*$ dans la suite. Posons $C = \mathrm{End}_F(V_0)$, qui s'identifie naturellement à $\mathrm{End}_B(V) = Z_{\mathrm{End}_F(V)}(B) \subset \mathrm{End}_F(V)$: c'est une sous-F-algèbre de $\mathrm{End}_F(V)$ invariante par $*$, et la restriction de l'involution $*$ à $C \simeq \mathrm{End}_B(F)$ n'est rien d'autre que l'involution induite par la forme ψ_0 sur $C = \mathrm{End}_F(V_0)$. Ainsi

$$\begin{aligned} G(k) &= \{g \in \mathrm{End}_B(V)^\times : \psi(gu, gv) = \nu(g)\psi(u,v)\} \\ &\simeq \{g \in C^\times : \psi_0(gu, gv) = \nu_0(g)\psi_0(u,v) \text{ pour un } \nu_0(g) \in k^\times\} \\ &= \{g \in C^\times : \psi_0(u, g^*gv) = \nu_0(g)\psi(u,v) \text{ pour un } \nu_0(g) \in k^\times\} \\ &= \{g \in C^\times : g^*g \in k^\times\}. \end{aligned}$$

Plus généralement, soit R une k-algèbre commutative au sens de géométrie algébrique, alors

$$G(R) \simeq \{g \in (C \otimes_k R)^\times : g^*g \in R^\times\}, \quad \text{et} \quad G_1(R) \simeq \{g \in (C \otimes_k R)^\times : g^*g = 1\}.$$

Posons aussi G' le sous-groupe de G tel que

$$G'(R) \simeq \{g \in (C \otimes_k R)^\times : g^*g = 1,\ \det(g) = 1\},$$

où det est le morphisme $\mathrm{Res}_{F/k}\mathrm{GL}_F(V_0) \to \mathrm{Res}_{F/k}\mathbb{G}_{m,F}$ induit par le déterminant usuel sur $\mathrm{GL}_F(V_0)$.

Exemple 2.2.5. On suppose $F = k \times k$, $B = \mathcal{M}_n(k) \times \mathcal{M}_n(k)$ et que l'involution sur B est donnée par $(a,b)^* = (b^t, a^t)$. Soit $(V,\psi) = (W \otimes_F V_0, \mathrm{Tr}_{F/k}(\phi \otimes \psi_0))$ avec $W = F^n$, et ϕ une forme hermitienne induisant l'involution $*$ sur $B \simeq \mathrm{End}_F(W)$; et V_0 un F-module libre muni d'une forme hermitienne alternée ψ_0. En choisissant une base convenable de V_0 sur F, on peut supposer $V_0 = F^m = k^m \times k^m$, et que $\psi_0((x,x'),(y,y')) = (x^t \cdot y', -x'^t \cdot y)$. Ainsi, l'involution induite par ψ_0 sur $C = \mathrm{End}_F(V_0) = \mathcal{M}_m(k) \times \mathcal{M}_m(k)$ est $(a,b)^* = (b^t, a^t)$. Par suite, pour R une k-algèbre commutative (au sens de géométrie algébrique),

$$G(R) = \{g = (a,b) \in (C \otimes_k R)^\times = \mathrm{GL}_m(R) \times \mathrm{GL}_m(R) : b^t \cdot a = a^t \cdot b \in R^\times\},$$

et

$$G'(R) = \{g = (a,b) \in \mathrm{GL}_m(R) \times \mathrm{GL}_m(R) : b^t a = 1 \text{ et } \det(a) = \det(b) = 1\}.$$

On en déduit d'abord une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbf{GL}_m \longrightarrow G \xrightarrow{\nu} \mathbb{G}_{m,k} \longrightarrow 1,$$

où le premier morphisme est donné par $a \mapsto (a, (a^t)^{-1})$, et le deuxième morphisme ν est $(a,b) \mapsto a^t \cdot b$.[5] En particulier, G est un groupe réductif (donc connexe) sur k. De plus, $G' = \mathbf{SL}_m \hookrightarrow \mathbf{GL}_m$. En particulier, G' est un k-groupe semi-simple simplement connexe. Comme $G' = \ker(\det\colon G \to \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) \bigcap \ker(\nu)$, il s'ensuit que le groupe dérivé G^{der} de G est contenu dans G'. Or G' est semi-simple, on trouve $G' = G^{\mathrm{der}}$.

5. On vérifie aisément que ν est bien un morphisme de groupes.

Réciproquement, soit $(B,*)$ une k-algèbre semi-simple à involution de type (A) telle que $F := Z(B)$ soit de degré 2 sur k ; et que $B \simeq \mathcal{M}_n(F)$. Soit (V,ψ) un $(B,*)$-module symplectique tel que V soit libre sur F.

Lemma 2.2.6. *Le $(B,*)$-module symplectique (V,ψ) est de la forme décrite ci-dessus. Plus précisément, il existe*
- *un F-module W libre de rang fini, muni d'une forme hermitienne ϕ telle que $\phi(bu,v) = \phi(u,b^*v)$ pour tout $u,v \in W$; et*
- *un F-module V_0 libre de rang fini, muni d'une forme hermitienne alternée ψ_0,*

tels que $(V,\psi) = (W \otimes_F V_0, \mathrm{Tr}_{F/k}(\phi \otimes \psi_0))$.

Soit $W = F^n$ l'ensemble des vecteurs colonne à coefficients dans F. Alors $B = \mathrm{End}_F(W)$. L'existence de la forme ϕ induisant l'involution $*$ est assurée par le lemme suivant

Lemma 2.2.7. *Il existe une forme hermitienne $\phi\colon W\times W \to F$ telle que $*$ est l'involution induite par ϕ. De plus, à un scalaire dans $F_0^\times$ près, la forme ϕ est uniquement déterminé par $*$.*

Démonstration. Notons B' la F-algèbre tel que l'anneau sous-jacent soit B^{opp}, et que la multiplication d'un élément $b \in B$ par un scalaire $\lambda \in F$ est $\lambda^* b$. Alors $b \mapsto b^*$ définit un morphisme de F-algèbres

$$B \longrightarrow B', \quad b \mapsto b^*.$$

D'autre part, on a un deuxième morphisme $B \to B'$ de F-algèbres, en associant b à $b^{\sigma,t}$.[6] Par Noether-Skolem, il existe $a \in B$ tel que $b^* = (a^\sigma)^{-1} b^{\sigma,t} a^\sigma$,[7] ou encore $(b^*)^\sigma = a^{-1} b^t a$ pour tout $b \in B$. De plus, comme $b^{**} = b$, on a $a^{t,\sigma} = c \cdot a$ avec $c \in F$ tel que $c^2 = 1$. Quitte à multiplier a par un élément convenable de F, on peut supposer $c = 1$: en effet, soit $f \in F \setminus k$ tel que $f^2 \in k$. Alors $f^\sigma = -f$. Par suite, si $a^{t,\sigma} = -a$, alors $(fa)^{t,\sigma} = -fa^{t,\sigma} = fa$. Donc, quitte à remplacer a par fa, on peut supposer toujours $a^{t,\sigma} = a$. Ainsi, on peut considérer

$$\phi\colon W \times W \longrightarrow F, \quad (u,v) \mapsto u^t \cdot a \cdot v^\sigma,$$

qui est une forme hermitienne vérifiant les propriétés voulues. Il reste à voir l'unicité. Soit ϕ' une forme hermitienne induisant l'involution $*$. Soit $a' \in B = \mathcal{M}_n(F)$ telle que $\phi'(u,v) = u^t \cdot a' \cdot v^\sigma$. De plus, comme $\phi'(bu,v) = \phi'(u,b^*v)$, il s'ensuit que $b^t \cdot a' = a' \cdot b^{*,\sigma}$ pour tout $b \in B$. Par suite, on obtient

$$b^{*,\sigma} = a^{-1} \cdot b^t \cdot a = a'^{-1} \cdot b^t \cdot a', \quad \forall\, b \in B.$$

Donc $a' = c \cdot a$ avec $c \in F = Z(B)$. Or ϕ, ϕ' sont deux formes Hermitiennes, $a^{t,\sigma} = a$ et $a'^{t,\sigma} = a'$. Il en résulte que $c^\sigma = c$. C'est-à-dire $c \in F_0$. □

6. pour $b = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(F)$, $b^\sigma = (b_{ij}^*)$.

7. Lorsque $F = k \times k$, on peut écrire $B = B_1 \times B_2$, avec B_1, B_2 tous les deux égaux à $\mathcal{M}_n(k)$. Comme $(B,*)$ est de type (A), l'involution $*$ permute les deux facteurs simples de B, d'où deux morphismes de k-algèbres $B_1 \to B_2^{\mathrm{opp}}$, $b_1 \mapsto b_1^*$; et $B_2 \to B_1^{\mathrm{opp}}$, $b_2 \mapsto b_2^*$. Comme B_1, B_2 sont tous les deux simples centrales sur k, le théorème de Noether-Skolem nous donne deux éléments $a_1 \in B_1$ et $a_2 \in B_2$ tels que $b_1^* = a_2^{-1} b_1^t a_2$ et que $b_2^* = a_1^{-1} b_2^t a_1$ pour tout $b_1 \in B_1, b_2 \in B_2$. Par suite, dans $B = B_1 \times B_2$, on a $(b_1,b_2)^{*,\sigma} = (a_2,a_1)^{-1}(b_1,b_2)^t \cdot (a_2,a_1)$.

Remarque 2.2.8. Le lemme précédent montre qu'il y a une correspondance bijective entre l'ensemble des involutions $*$ de $\mathcal{M}_n(F)$ tel que $k = \{x \in F : x^* = x\}$ et les formes hermitiennes (ou les formes hermitiennes alternées) sur W à un scalaire dans F_0 près.

Démonstraction de Lemme 2.2.6. Montrons d'abord qu'il existe une forme hermitienne alternée Ψ sur V telle que $\psi = \mathrm{Tr}_{F/k}(\Psi)$ et que $\Psi(bu, v) = \Psi(u, b^*v)$. Pour ceci, remarquons premièrement que pour tout F-module libre de rang fini vectoriel L, le morphisme suivant induit par Tr est bijective :

$$t\colon \mathrm{Hom}_F(L, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(L, k), \quad f \mapsto \mathrm{Tr}_{F/k} \circ f.$$

Pour le voir, il suffit de remarquer que, comme F/k separable (k est caractéristique nulle), le morphisme t est injective, et les objets de deux côtés ont la même dimension sur k. Posons ensuite V' l'espace V sur lequel B agit à droite par $(v, b) \mapsto b^*v$. Posons $L = V \otimes_B V'$: c'est un F-module libre de rang fini, et ψ induit une application k-linéaire, encore notée ψ, de W dans k. D'après ce qui précède, il existe une application F-linéaire $\Psi\colon V \otimes_B V' \to F$ tel que $\psi = \mathrm{Tr}_{F/k}(\Psi)$. Autrement, on obtient une forme k-bilinéaire $\Psi\colon V \times V \to F$ telle que $\Psi(bu, v) = \Psi(u, b^*v)$. De plus, Ψ est nécessairement alternée car ψ l'est : en effet $u \otimes v \mapsto -\Psi(v, u)^\sigma$ est encore une application F-linéaire de L telle que $\mathrm{Tr}_{F/k}(-\Psi(v, u)^\sigma) = -\psi(v, u) = \psi(u, v)$ pour tout $u, v \in V$. D'où $\Psi(u, v) = -\Psi(v, u)^\sigma$ par l'injective du morphisme t ci-dessus. Ainsi, Ψ est une forme Hermitienne alternée sur V.

Maintenant, comme V est libre sur F, on peut écrire $V = W \otimes_F V_0$, où l'action de B est induite de celle de B sur W. De plus, $C := \mathrm{End}_F(V_0)$ s'identifie naturellement au centralisateur de B dans $\mathrm{End}_F(V)$. Ainsi, l'involution induite par ψ de $\mathrm{End}_F(V)$ laisse invariante C, qui nous fournit une involution, encore notée par $*$, sur C. Par la preuve de Lemme 2.2.7 (en tenant compte Remarque 2.2.8), l'involution $*$ sur C est induite par une forme Hermitienne alternée ψ_0 sur V_0. Par suite, $\phi \otimes_F \psi_0$ donne une forme Hermitienne alternée sur $V = W \otimes_F V_0$ induisant l'involution par ψ donc par Ψ sur $\mathrm{End}_F(V)$. Par l'unicité de Lemme 2.2.7 et de Remarque 2.2.8, $\Psi = \lambda \cdot \phi \otimes \psi_0$ pour $\lambda \in k^\times$. Ainsi, quitte à remplacer ψ_0 par λ, on trouve $\Psi = \phi \otimes \psi_0$, ce qui achève la preuve.

□

2.2.2 Exemple : type (C)

Soit $B = \mathrm{End}_k(W)$, muni de l'involution induite par une forme bilinéaire symétrique $\phi\colon W \times W \to k$. Alors $(B, *)$ est une k-algèbre simple à involution de type (C), avec $F = F_0 = k$. Soient V_0 est k-espace de dimension finie, et ψ une forme bilinéaire alternée sur V_0. Posons $V = W \otimes_k V_0$ et ψ la forme bilinéaire sur V telle que $\psi(w \otimes v, w' \otimes v') = \phi(w, w')\psi_0(v, v')$. Posons $C = \mathrm{End}_k(V_0)$. Comme dans le type (C), on vérifie aisément que, pour R une k-algèbre au sens de géométrie algébrique, on a

$$G(R) = \{g \in (C \otimes_k R)^* : \psi_0(gu, gv) = \nu(g)\psi(u, v)\} = \mathbf{Gsp}(\psi_0)(R),$$

et

$$G_1(R) = \{g \in \mathbf{Gsp}(\psi_0)(R) : \nu(g) = 1 \text{ et } \det(g) = 1\}.$$

En particulier, $G_1 = \mathbf{Sp}(\psi_0) \subset G = \mathbf{Gsp}(\psi_0)$.

Réciproquement, soit $(B, *)$ une k-algèbre à involution avec $B \simeq \mathcal{M}_n(k)$. Soit W le B-module simple. On a alors $B \simeq \mathrm{End}_k(W)$, et l'involution $*$ sur B est induite par une forme bilinéaire symétrique ϕ.[8] De plus, il existe un k-espace vectoriel V_0, muni d'une forme bilinéaire alternée ψ_0 tel que $(V, \psi) = (W \otimes_k V_0, \phi \otimes \psi_0)$. Par suite, on trouve $G = \mathbf{Gsp}(\psi_0)$ et $G_1 = \mathbf{Sp}(\psi_0)$.

2.2.3 Exemple : type (BD)

Soit $(B, *)$ une k-algèbre à involution de type (BD), avec $B \simeq \mathcal{M}_n(k)$. Soit W le B-module simple. Il existe alors une forme k-bilinéaire alternée ϕ sur W telle que l'involution induite sur $B \simeq \mathrm{End}_k(W)$ soit égale à $*$. Soit (V, ψ) un $(B, *)$-module symplectique. Comme dans le cas (C), en utilisant la correspondance entre les involutions de types (C) ou (BD) avec les formes bilinéaires symétriques ou alternées, on trouve un k-espace vectoriel V_0, muni d'une forme symétrique ψ_0 tel que $(V, \psi) = (W \otimes_k V_0, \phi \otimes \psi_0)$. Posons $C := \mathrm{End}_k(V_0)$. Il s'ensuit que, pour R une k-algèbre commutative (au sens de géométrique algébrique),

$$G(R) = \{g \in (C \otimes_k R)^\times : g^* g \in R^\times\}$$

et que

$$G_1(R) = O(\psi_0) = \{g \in (C \otimes_k R)^\times : g^* g = 1\}.$$

Néanmois, le groupe G n'est pas connexe en général : on a l'isogénie centrale suivante, induit par l'application de produit, de noyau $N = \langle(-\mathrm{id}, -1)\rangle \subset \mathrm{O}(\psi) \times \mathbb{G}_m$:

$$\mathrm{O}(\psi) \times \mathbb{G}_m \longrightarrow G,$$

où le morphisme $\mathbb{G}_m \to G \hookrightarrow \mathbf{GL}_k(V_0)$ est le tore central des matrices scalaires. Par suite, G est connexe si et seulement si la dimension $\dim_k V_0$ est impaire.[9] Lorsque $\dim_k V_0$ est paire, G contient deux composantes connexes. En tous cas, la composante neutre G^0 de G est un groupe réductif sur k, et le groupe dérivé de G^0 est $\mathrm{SO}(\psi_0)$.

2.2.4 Conséquences des calculs précédents

Remarque 2.2.9. Soit $(B, *)$ une k-algèbre à involution avec B simple. Soit (V, ψ) un $(B, *)$-module symplectique. Alors d'après les calculs ci-dessus, on a

1. Si $(B, *)$ est de type (A) (resp. de type (B)), alors $G_{1,\bar{k}}$ est un produit de groupes réductifs de type (A) (resp. de type (C)) dans la classification avec les diagram de Dynkin.
2. Si $(B, *)$ est de type (BD), le groupe $G_{1,\bar{k}}$ est un produit de groupes réductifs de type (B) ou de type (D). Par exemple, avec les notations des calculs dans le type (BD) ci-dessus, G_1 est de type (B) si la dimension $\dim_k(V_0)$ est impaire, et est de type (D) si la dimension $\dim_k(V_0)$ est paire.

Ceci explique en particulier la terminologie dans Proposition 2.1.2

---

8. Comme dans Lemme 2.2.7 et Remarque 2.2.8, il y a une correspondance bijective entre les involution sur $B \simeq \mathrm{End}_k(W)$ de type (C) (resp. de type (BD)) et les formes bilinéaire symétrique (resp. formes bilinéaires alternées) sur V.

9. Ceci résulte du fait que $(-\mathrm{id}, -1) \in (\mathrm{O}(\psi) \times \mathbb{G}_m)^0 = \mathrm{SO}(\psi) \times \mathbb{G}_m$ si et seulement si $\det(-\mathrm{id}) = 1$, ou encore, si et seulement si la dimension $\dim_k V_0$ est paire. Par suite, G est connexe si et seulement si N permute les deux composantes connexes de $\mathrm{O}(\psi) \times \mathbb{G}_m$, ou encore si et seulement si N n'est pas contenu dans $\mathrm{SO}(\psi_0) \times \mathbb{G}_m$.

Proposition 2.2.10. *Soit $(B,*)$ une k-algèbre semi-simple à involution de type (A) ou (C). Soit (V,ψ) un $(B,*)$-module symplectique. Alors G est réductif (donc connexe), de groupe dérivé G^{der} simplement connexe.*

Démonstration. On peut évidemment supposer $k=\bar{k}$ est algébriquement clos. Soit $(B,*)=\oplus_{i=1}^n(B_i,*)$ la décomposition de $(B,*)$ en produit de ses facteurs simples (en tant que $\bar{k}$-algèbre à division). Le B-module V se décompose comme $V=\oplus_{i=1}^n V_i$, où V_i est un B_i-module vu comme un B-module par la projection $B\to B_i$. Cette décomposition est une décomposition orthogonale : soient $u\in V_i$, $v\in\oplus_{j\neq i}V_j$, et soit $e_i=(0,\dots,0,1_{B_i},0,\dots,0)\in B$. Alors $e_i^*=e_i$, et $\psi(u,v)=\psi(e_i\cdot u,v)=\psi(u,e_i^*\cdot v)=0$. Par suite, la restriction ψ_i de ψ à V_i est non-dégénérée, et (V_i,ψ_i) est un $(B_i,*)$-module symplectique. De plus, pour tout $f\in\mathrm{End}_k(V)$ commutant avec l'action de B, on a nécessairement $f(V_i)\subset V_i$. Donc, $G\subset G(\psi_1)\times\cdots\times G(\psi_n)\hookrightarrow G(\psi)$ et on a le carré cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, hook] & \mathbb{G}_m \arrow[d, hook, "\text{diagonal}"] \\ G_1\times\cdots\times G_n \arrow[r, "\nu_1\times\cdots\times\nu_n"] & \mathbb{G}_m\times\cdots\times\mathbb{G}_m \end{tikzcd} .$$

Ainsi, pour démontrer la proposition, il suffit de traiter le cas où $n=1$. Par suite, $(B,*)$ est un k-module à involution simple de type (A) ou de type (C), et (V,ψ) est un $(B,*)$-module symplectique. Afin de pouvoir se ramener aux calculs qu'on a fait, il nous faut encore montrer que V est libre sur le centre F de B. Le cas où $(B,*)$ est de type (C) est immédiat : on a $F=k$ est un corps vu la classification des algèbres semisimples à involution. Supposons dans le reste de la preuve que $(B,*)$ est de type (A), Donc $B=B_1\times B_2$ avec B_1,B_2 deux les deux égaux à $\mathcal{M}_n(k)$. On écrit $V=V_1\times V_2$ où V_i est un B-module provenant d'un $\mathcal{M}_n(k)$-module via la projection de B sur B_i. Posons aussi $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$. Alors $e_1^*=e_2$. Supposons par symétrie que $V_1\neq 0$. Soit $V_1'\subset V_1$ un sous-B-module simple de V_1, et soit $v_1\in V_1'\setminus\{0\}$. Comme ψ est non-dégénéré, il existe $v\in V=V_1\times V_2$ tel que $\psi(v_1,v)\neq 0$. Ainsi

$$\psi_0(v_1,e_2v)=\psi_0(v_1,e_1^*v)=\psi_0(e_1v_1,v)=\psi_0(v_1,v)\neq 0.$$

Or $e_2v\in V_2$, en particulier $V_2\neq 0$. Quitte à remplacer v par e_2v, on peut supposer donc $v\in V_2$, noté par v_2 dans la suite. Soit $V_2'\subset V_2$ un sous-B-module simple de V contenant v_2. La forme bilinéaire ψ_0 induit alors une application

$$\iota\colon V_1'\longrightarrow V_2'^{\vee}:=\mathrm{Hom}_k(V_2',k).$$

Si l'on muni de l'action de B sur $V_2'^{\vee}$ par

$$(b\cdot f)(u)=f(b^*u),\quad \forall\, b\in B,\ f\in V_2'^{\vee},\ u\in V_2',$$

l'application ι est un morphisme de B-modules simples. De plus, ι est non nulle car $\iota(v_1)(v_2)=\psi_0(v_1,v_2)\neq 0$. Par suite, ι est un isomorphisme. En d'autres termes, la restriction de ψ_0 à $V':=V_1'\times V_2'$ est non-dégénée. On applique ensuite ce raisonnement au supplémentaire orthogonale de V' dans V, on obtient finalement un décomposition en tant que B-module : $V\simeq V'^{\oplus m}$. En particulier, V est libre sur $F=k\times k$ car c'est le cas pour $V'=V_1'\times V_2'$: effet, V_1,V_2 sont deux k-espaces vectoriels de la même dimension. $\square$

Remarque 2.2.11. Soit B une k-algèbre simple de centre F, munie d'une involution $*$. Supposons que $(B,*)$ est de type (A) ou (C). Soit (V,ψ) un $(B,*)$-module symplectique. La dimension réduite de V est par définition l'entier $m := \frac{\dim_F(V)}{[B:F]^{1/2}}$. Alors

1. Si $(B,*)$ est de type (A), $B \otimes_k \bar{k}$ est le produit de $\frac{[F:k]}{2}$-facteurs simples. Par suite, $G_{\bar{k}}^{\mathrm{der}} \simeq \mathbf{SL}_m^{[F:k]/2}$ (on remarque que, avec les notations dans le calcul du type (A), m est bien la dimension $\dim_F V_0$).
2. Si $(B,*)$ est de type (C), $B \otimes_k \bar{k}$ est le produit de $[F:k]$-facteurs simples. Par suite, $G_{\bar{k}}^{\mathrm{der}} \simeq \mathbf{Sp}_m^{[F:k]}$.

Remarque 2.2.12. Plus généralement, pour $(B,*)$ une k-algèbre à involution, le raisonnement de Proposition 2.2.10 montre que la composante neutre du groupe G est un groupe réductif.

2.3 Algèbres à involution positive

Soit B une $\mathbb{R}$-algèbre semi-simple à involution $*$.

Définition 2.3.1. *On dit que l'involution $*$ est **positive** si $\mathrm{Tr}_{B/\mathbb{R}}(b^*b) > 0$ pour tout $b \in B \setminus \{0\}$.*

Exemple 2.3.2. Les involutions naturelles sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathcal{M}_n(\mathbb{H})$ sont tous positives. De plus, on on vérifie aisément que, munis des involutions naturelles, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de type (C), $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de type (A), et $\mathcal{M}_n(\mathbb{H})$ est de type (BD) :[10] les deux premières assertions sont immédiates. Pour déterminer le type de $\mathcal{M}_n(\mathbb{H})$, on remarque que

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{H})_+ := \{a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{H}) : a^* = a\} = \{a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{H}) : \bar{a}^t = a\}$$

est de dimension $\frac{n(n-1)}{2} \cdot 4 + n = \frac{2n(2n-1)}{2}$. Par suite $\mathcal{M}_n(\mathbb{H})$ est nécessairement de type (BD).

Proposition 2.3.3 (cf. [5] Proposition 8.10)**.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Un certain B-module fidèle V possède une forme bilinéaire symétrique définite positive $\psi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ telle que $\psi(bu,v) = \psi(u,b^*v)$;*
2. *Tout B-module V possède une forme ψ vérifiant les conditions de (1) ;*
3. *L'involution $*$ est positive.*

Lemma 2.3.4 (cf. [3] Lemma 2.4)**.** *Soit $B = B_1 \times \cdots \times B_n$ une $\mathbb{R}$-algèbre semi-simple avec B_i ses facteurs simples sur $\mathbb{R}$. Soit $*$ une involution positive sur B. Alors $*$ préserve chaque facteur B_i.*

Démonstration. En général, l'involution $*$ permute les facteurs simples de B. Si $*$ ne préserve pas tous les facteurs simples de B, supposons par symétrique que $b_1^* \in B_2$ pour tout $b_1 \in B_1$. Par suite, $b_1^*b_1 = 0$, ce qui contredit au fait que $*$ est positive. $\square$

Lemma 2.3.5 (cf. [3] Lemma 2.11)**.** *Soit B une $\mathbb{R}$-algèbre semi-simples. Soient $*, \iota$ deux involutions positives sur B. Il existe alors $b \in B^\times$ tel que $x^\iota = c^{-1}x^*c$ avec $c = b^*b$.*

10. ou plus précisément, $\mathcal{M}_n(\mathbb{H})$) est de type (D) car le groupe G_1 associé est de type (D) dans la classification de Dynkin.

Proposition 2.3.6 (Classification des involutions positives sur $\mathbb{R}$)**.** *Soit $(B,*)$ une $\mathbb{R}$-algèbre à involution positive. Alors $(B,*)$ est isomorphe à un produit de $\mathbb{R}$-algèbres à involution positive suivantes :*
- *(type (A)) $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $a^* = \bar{a}^t$;*
- *(type (C)) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $a^* = a^t$;*
- *(type (D)) $\mathcal{M}_n(\mathbb{H})$, et $a^* = \bar{a}^t$.*

Démonstration. Par Lemme 2.3.4, on peut supposer B est une $\mathbb{R}$-algèbre simple. Ainsi, on a $B \in \{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathcal{M}_n(\mathbb{H})\}$. De plus, par Lemma 2.3.5, il existe $b \in B$ tel que la conjugaison par b induise un isomorphisme de $(B,*)$ à B munie de l'involution positive standard. □

Proposition 2.3.7. *Soit B une $\mathbb{R}$-algèbre semi-simple, munie d'une involution positive $*$. Soit (V,ψ) un $(B,*)$-module symplectique, et soit C le centralisateur de B dans $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Alors, à une conjugaison par un élément $c \in C^\times$ tel que $cc^* = 1$, il existe un unique morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $h\colon \mathbb{C} \to C$ tel que*
- *$h(\bar{z}) = h(z)^*$; et*
- *$(u,v) \mapsto \psi(u, h(i)v)$ est une forme symétrique définite positive.*

Démonstration. Soit $B = B_1 \times \cdots \times B_n$ la décomposition de B en produit de ses facteurs $\mathbb{R}$-simples. Par Lemme 2.3.4, B_i est invariante par l'involution $*$. Décompose ensuite V en $V = \oplus_i V_i$, où V_i est un B-module provenant d'un B_i-module par la projection $B \to B_i$. Clairement on peut supposer $V_i \neq 0$ pour tout i. [11] Soit ψ_i la restriction de ψ à V_i. Alors comme on a vu dans la preuve de Proposition 2.2.10, (V_i, ψ_i) est un $(B_i,*)$-module symplectique, et $C = \bigoplus_i \mathrm{End}_{B_i}(V_i) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Ainsi, pour prouver la proposition, on peut supposer $n = 1$. Donc B est une $\mathbb{R}$-algèbre simple, et son centre F est un corps. De plus, se donner un morphisme h vérfiant les conditions ci-dessus revient au même de se donner un élément $J \in C$ tel que

$$(**) \qquad J^2 = -1, \quad \psi(Ju, Jv) = \psi(u,v), \quad \psi(u, Ju) > 0 \text{ si } u \neq 0.$$ [12]

Selon le type de $(B,*)$, il y a trois cas à distinguer.

(1) : $(B,*)$ est de type (A), *i.e.*, $B = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ munie de l'involution standard $b^* = \bar{b}^t$. Décompose ensuite $(V,\psi) = (W \otimes_{\mathbb{C}} V_0, \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\phi \otimes \psi_0))$ comme dans les calculs du numéro précédent, avec ψ_0 une forme Hermitienne alternée sur V_0. Alors $C = \mathrm{End}_B(V) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_0)$. De plus, comme l'involution $*$ sur B est positive, il s'ensuit que la forme Hermitienne ϕ sur W est définite positive ou définite négative. [13] Quitte à remplacer ϕ par $-\phi$, on peut toujours supposer ϕ est définite positive. Ainsi, se donner un $J \in C$ vérifiant la condition $(**)$ revient au même de trouver $J \in C \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_0)$ telle que

$$(***) \qquad J^2 = -1, \quad \psi_0(Ju, Jv) = \psi_0(u,v), \quad \text{et que } \psi_0(u, Ju) > 0 \text{ si } u \neq 0.$$ [14]

11. Si $V_i = 0$ alors le facteur B_i est inutile dans la proposition.
12. Une fois qu'on a un tel J, on pose h telle que $h(a+bi) = a + bJ$.
13. Avec une base convenable, $\phi(u,v) = u^t \cdot a \cdot \bar{u}$ avec $a = \mathrm{diag}(1,\ldots,1,-1,\ldots,-1)$. Par suite, pour $b \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $b^* = a^{-1} \cdot \bar{b}^t \cdot a = a \cdot \bar{b}^t \cdot a$. Par suite, on a $bb^* = ba\bar{b}^t a$ et $\mathrm{Tr}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})/\mathbb{R}}(bb^*)$ est strictement positive (resp. strictement négative) pour tout b non nul si et seulement s'il n'y a pas de -1 (resp. pas de 1) sur la diagonale de a, *i.e.*, si et seulement si ϕ est définite positive ou définite négative.
14. Remarquons que $\psi_0(u, Ju) \in \mathbb{R}$.

Mais dans une base convenable $\{e_i\}$ de V_0 sur $\mathbb{C}$, la forme ψ_0 s'écrit sous la forme $\psi_0(u,v) = u^t a' \bar{v}$ avec $a' = \mathrm{diag}(i,\ldots,i,-i,\ldots,-i)$. Ainsi, pour l'existence de J, il suffit de prendre $J \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_0) = C$ dont la matrice dans $\{e_i\}$ est donnée par a'. Soit $J' \in C \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_0)$ un deuxième vérifiant la condition $(***)$. Soit u un vecteur propre de J'. Alors $J'(u)$ est égal à u ou $i\cdot u$, et donc $\psi_0(u,u) = \pm i \cdot \psi_0(u, Ju) \neq 0$. Soit V_0' le complémentaire orthogonal de $\mathbb{C}\cdot u \subset V_0$. Alors $V_0 = \mathbb{C}u \oplus V_0'$. En répétant ce qui précède un nombre fini de fois, on obtient donc une famille $\{u_1,\ldots,u_m\} \subset V_0$ telle que $Ju_\alpha = u_\alpha$ pour $1 \leq \alpha \leq s$, $Ju_\alpha = -iu_\alpha$ pour $s < \alpha \leq m$, et que V_0 se décompose en une somme directe orthogonale

$$V_0 = \bigoplus_{\alpha=1}^{m} \mathbb{C}u_\alpha.$$

De plus, quitte à remplacer u_α par λu_α avec $\lambda \in \mathbb{C}$ convenablement choisi, on peut supposer que $\psi_0(u_\alpha, u_\alpha)$ est un nombre complexe de module 1. Par suite, $\psi_0(u_\alpha,u_\alpha) = i$ pour $1 \leq \alpha \leq s$, et $\psi_0(u_\alpha,u_\alpha) = -i$ pour $s < \alpha \leq m$. Or $\{u_i\}$ est une base orthogonale pour la forme Hermitienne alternée, par le théorème de Sylvester dans le cas hermitien, [15] il s'ensuit que s est bien égal au nombre de i sur la diagonale de a. Ainsi, $c \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_0)$ donnée par $c(e_i) = u_i$ est telle que $\psi_0(cu,cv) = \psi_0(u,v)$, ou encore que $c^*c = 1$. De plus, $(c^{-1} \circ J \circ c)(e_\alpha) = c^{-1}(J(u_\alpha))$ est égal à ie_α pour $1 \leq i \leq s$, et est égal à $-ie_\alpha$ pour $s < i \leq m$. Autrement dit $c^{-1} \circ J' \circ c = J$, d'où l'uncité voulue.

(2) $(B,*)$ est de type (C), *i.e.*, $B = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ munie de l'involution standard $b^* = b^t$. En particulier, on a $(V,\psi) = (W \otimes_k V_0, \phi \otimes \psi_0)$ avec $W = \mathbb{R}^n$ muni de la forme $\phi(w_1,w_2) = w_1^t \cdot w_2$; et ψ_0 une forme bilinéaire alternée sur V_0 (donc V_0 est nécessairement de dimension paire $2m$ sur $\mathbb{R}$). Ainsi $C \simeq \mathrm{End}_k(V_0)$, et il suffit de trouver $J \in \mathrm{End}_k(V_0)$ vérifiant la condition $(**)$ en remplaçant (V,ψ) par (V_0,ψ_0). En choisissant une base $\{e_i\}$ convenable de V_0, on peut écrire ψ_0 sous la forme

$$\psi_0(u,v) = u^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \cdot v.$$

Soit $J \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V_0)$ dont la matrice dans $\{e_i\}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors J satisfait à la condition voulue. Pour voir l'uncité, soit $J' \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V_0)$ satisfaisant à $(**)$ (avec (V,ψ) remplacé par (V_0,ψ_0)). En particulier, pour tout $u \in V_0$, $\psi_0(u, J'u) \neq 0$. La restriction de ψ_0 à $\mathbb{R}u + \mathbb{R}J'u$ est alors non-dégénérée. Ainsi, en répétant ce qui précède un nombre fini de fois, on obtient une décomposition de V_0 en somme directe orthogonale

$$V_0 = \bigoplus_{\alpha=1}^{m} (\mathbb{R}u_\alpha + \mathbb{R}J'u_\alpha)$$

avec $u_1,\ldots u_m \in V_0$. Comme $\psi_0(u_i, J'u_i) > 0$, quitte à multiplier u_i par un scalaire, on peut supposer $\psi_0(u_i, J'u_i) = 1$. Considérons alors $c \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V_0)$ tel que $c(e_i) = J'u_i$ et $c(e_{m+i}) = u_i$. Par construction, $\psi_0(cu,cv) = \psi_0(u,v)$ pour tout $u,v \in V_0$, autrement

15. La différence entre le cas hermitien et le cas hermitien alterné est juste un facteur i.

dit, on a $c^*c = 1$. En plus, $(c^{-1} \circ J' \circ c)(e_i) = c^{-1}(J'(J'u_i)) = -c^{-1}(u_i) = -e_{m+i}$, et $(c^{-1} \circ J' \circ c)(e_{m+i}) = c^{-1}(J'(u_i)) = e_i$ pour $1 \leq i \leq m$. Donc $c^{-1} \circ J' \circ c$ et J ont la matrice dans la base $\{e_i\}$. Cela dit $J = c^{-1} \circ J' \circ c$, comme désiré.

(3) $(B, *)$ est de type (D), *i.e.*, $B = \mathcal{M}_n(\mathbb{H})$ munie de l'involution $b^* = \bar{b}^t$. On va traiter seulement l'existence de J. Comme dans (2), on a la décomposition analogue $(V, \psi) = (W \otimes_{\mathbb{H}} V_0, \mathrm{Tr}_{\mathbb{H}/\mathbb{R}}(\phi \otimes \psi_0))$, avec V_0 un $\mathbb{H}$-espace de dimension finie et ψ_0 est une forme hermitienne alternée sur V_0. Par [2, Chapter 1, 6.2.4], il existe une base $\{e_i\}_{1 \leq i \leq m}$ dans laquelle ψ_0 s'écrit sous la forme

$$\psi_0((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)) = \sum_{i=1}^{m} x_1 \cdot a_i \cdot \bar{y}_i,$$

où $a_i \in \mathbb{H}$ est tel que $\overline{a_i} = -a_i$. Ainsi, on peut considérer $J \in C \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{H}}(V_0)$ tel que $J(e_i) = -|a_i|a_i^{-1} \cdot e_i$. Alors pour $x = \sum x_i e_i$, on a $J(x) = \sum_i -|a_i|x_i a_i^{-1} e_i$, par suite

$$\psi_0(x, Jx) = -\sum_i x_i \cdot a_i \cdot \overline{|a_i|x_i a_i^{-1}} = \sum_i |a_i| \cdot x_i \cdot \overline{x_i}$$

est définite positive. De plus, on a $\psi_0(Jx, Jy) = \psi_0(x, y)$, et $J^2(e_i) = |a_i|a_i^{-1}|a_i|a_i^{-1} \cdot e_i = -e_i$, *i.e.*, $J^2 = -1$. □

Remarque 2.3.8. Soit $(B, *)$ une $\mathbb{R}$-algèbre simple à involution positive de type (A) ou (C). Soit (V, ψ) un $(B, *)$-module symplectique, et soit $h \colon \mathbb{C} \to \mathrm{End}_B(V)$ un morphisme vérfiant la condition de Proposition 2.3.7. En particulier, h définit une structure de Hodge de type $(-1, 0), (0, -1)$ sur V. Considérons le morphisme de trace

$$\mathrm{Tr} \colon B \longrightarrow C, \quad b \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(b | V(\mathbb{C})/F_h^0).$$

Par l'uncité de Proposition 2.3.7, le morphisme de trace Tr ne dépend pas du choix de h. De plus, la connaissance de $\dim V$ et de Tr déterminent complètement la classe d'isomorphismes du $(B, *)$-module (V, ψ). Plaçons-nous d'abord dans le cas où $(B, *)$ est de type (A). Comme dans la preuve de Proposition 2.3.7, décomposons (V, ψ) en $(W \otimes_{\mathbb{C}} V_0, \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\phi \otimes \psi_0))$. Clairement, la classe d'isomorphismes de (V, ψ) est déterminé par la dimension $\dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{C}} V_0 \cdot \dim_{\mathbb{C}} W$ et la forme Hermitienne alternée ψ_0. Choisissons une base convenable $\{e_i\}$ de V_0 sur $\mathbb{C}$ telle que la matrice de ψ_0 soit $D := \mathrm{diag}(i, \ldots, i, -i, \ldots, -i)$, et un morphisme h telle que la matrice de $J := h(i)$ dans la base $\{e_i\}$ soit D. Soit s le nombre de $i = \sqrt{-1}$ sur la diagonale de la matrice D. Alors la forme Hermitienne alternée s est déterminée par $\dim V_0$ et l'entier s. D'autre part, pour $b \in B$, on a $\mathrm{Tr}(b) = s \cdot \mathrm{Tr}(b|W)$. Donc la classe d'isomorphismes de (V, ψ) est déterminé par $\dim(V_0)$ et par s, donc par $(\dim(V), \mathrm{Tr})$. Le cas où $(B, *)$ est de type (C) peut être traité d'une manière similaire.

2.4 Variétés de Shimura de type PEL

Définition 2.4.1. *Une **donnée de Shimura de type PEL** est la donnée de* $(B, *, V, \psi, h)$*, où*

(i) B *est une* $\mathbb{Q}$*-algèbre semi-simple ;*

(ii) $*$ *est une involution positive sur* B *;*

(iii) (V,ψ) *est un* $(B,*)$*-module symplectique sur* $\mathbb{Q}$ *;*

(iv) $h\colon \mathbb{C} \to \mathrm{End}_B(V)_{\mathbb{R}}$ *est un morphisme de* $\mathbb{R}$*-algèbres à involution, où* $\mathrm{End}_B(V)$ *est muni de l'involution induite par* ψ *et* $\mathbb{C}$ *de la conjugaison complexe, telle que* $(u,v) \mapsto \psi(u,h(i)v)$ *soit une forme symétrique définite positive sur* $V(\mathbb{R})$*.*

Notation 2.4.2. Soit $(B,*,V,\psi,h)$ une donnée de Shimura de type PEL. Posons

$$G := \{g \in \mathrm{GL}_B(V) : g^*g \in \mathbb{Q}^\times\} \subset G(\psi), \quad \text{et} \quad G_1 := \{g \in \mathrm{GL}_B(V) : g^*g = 1\}.$$

Alors pour $z \in \mathbb{C}$, $h(z)^*h(z) = h(\bar{z})h(z) = |z|^2$. Ainsi $h(z) \in G$. De plus, h induit naturellement un morphisme de $\mathbb{R}$-schémas en groupes $\mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$, que l'on note encore par h. Posons enfin X la classe de $G(\mathbb{R})$-conjugaisons de $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{S}, G_{\mathbb{R}})$.

Remarque 2.4.3. Soit $h'\colon \mathbb{C} \to \mathrm{End}_B(V)_{\mathbb{R}}$ un deuxième morphisme vérifiant la condition de Définition 2.4.1 (iv), par [3, Lemma 4.3] h, h' sont conjugués par un élément de $G_1(\mathbb{R})$ (voir aussi Proposition 2.3.7).

Remarque 2.4.4. *Il est possible que* $X \subset X(\psi)^+$*. Par exemple, considérons* $B = \mathcal{M}_n(F)$ *avec* $F = \mathbb{Q}(i)$*, munie de l'involution standard* $b \mapsto \bar{b}^t$*. Posons* $V = F^n$ *et* ψ *la forme alternée donnée par*

$$\psi(u,v) = i \cdot u^t \cdot \bar{v} - i \cdot v^t \cdot \bar{u}.$$

Ainsi, $\mathrm{End}_B(V) \cong F$*, et donc* $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{m,F}$*. Par suite, la classe de* $G(\mathbb{R})$*-conjugaison de* h *ne contient qu'un seul élément, et donc* $X \subset X(\psi)^+$*. Remarquons que dans cet exemple, la dimension réduite est égale à* 1*. Plus généralement, si* $(B,*)$ *est de type (C), ou si* $(B,*)$ *est de type (A) et la dimension réduite de* V *est impaire, alors il existe un élément* $c \in \mathrm{End}_B(V)_{\mathbb{R}}$ *tel que* $c^*c = -1$*. Ainsi, pour* h *un morphisme de Définition 2.4.1 (iv),* $c \cdot h \in X(\psi)^-$*.*

Proposition 2.4.5 (cf. [3] Lemma 4.1)**.** *Le couple* (G,X) *satisfait aux conditions (SV1), (SV2) et (SV4).*

Démonstration. (SV1) : seuls les caractères $z/\bar{z}, 1, \bar{z}/z$ apparaissent dans la représentation $\mathbb{S} \xrightarrow{h} G \xrightarrow{\mathrm{ad}} \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(G)_{\mathbb{C}})$. En effet, h provient d'une structure complexe sur V, ainsi $V(\mathbb{C}) = V^{-1,0} \oplus V^{0,-1}$. Par suite, seuls les caractères $z/\bar{z}, 1, \bar{z}/z$ apparaissent dans la représentation $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V)_{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{S}$. Ainsi, étant une sous-représentation de $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V)_{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{S}$, $\mathrm{Lie}(G)_{\mathbb{C}}$ vérifie la condition (SV1).

(SV2) : $\theta := \mathrm{ad}(h(i))$ est une involution de Cartan sur G^{ad}. Comme G est réductif, le noyau N du morphisme naturel $G^{\mathrm{der}}(\mathbb{C}) \to G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{C})$ est fini et central. Faisons $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $G^{\mathrm{der}}(\mathbb{C})$ et sur $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{C})$ par $g \mapsto \theta(\bar{g})$. Par suite, on trouve une suite exacte

$$1 \longrightarrow N^{(\theta)}(\mathbb{R}) \longrightarrow G^{\mathrm{der}(\theta)}(\mathbb{R}) \longrightarrow G^{\mathrm{ad}(\theta)}(\mathbb{R}) \longrightarrow H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, N).$$

Ainsi, $G^{\mathrm{ad}(\theta)}(\mathbb{R})$ est compact (*i.e.*, θ est une involution de Cartan pour G^{ad}) si et seulement si $G^{\mathrm{der}(\theta)}$ est compact. Or si l'on prolonge G dans $G(\psi) = \mathbf{Gsp}(\psi)$, on a $G^{\mathrm{der}} \subset \mathbf{Sp}(\psi)$ et donc $G^{\mathrm{der}(\theta)}(\mathbb{R}) \subset \mathbf{Sp}^{(\theta)}(\psi)(\mathbb{R})$. Ainsi $G^{\mathrm{der}(\theta)}(\mathbb{R})$ car $\mathbf{Sp}^{(\theta)}(\psi)(\mathbb{R})$ l'est.

(SV4) : le morphisme de poids $\omega_X\colon \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \to \mathbb{S} \xrightarrow{h} G_{\mathbb{R}}$ est défini sur $\mathbb{Q}$. En effet, $r \in \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ agit sur $V_{\mathbb{C}} = V^{-1,0} \otimes V^{0,-1}$ par multiplication par r. Ainsi le morphisme

$$\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \xrightarrow{w_X} G_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbf{GL}(V)_{\mathbb{R}}$$

envoie r en $r \cdot \mathrm{id}$, donc il est défini sur $\mathbb{Q}$. Par suite, w_X l'est aussi.

□

Remarque 2.4.6. La condition (SV3) pour (G, X) n'est pas toujours remplie, *i.e.*, il est possible que la projection de $\mathbb{S} \xrightarrow{h} G \to G^{\mathrm{ad}}$ sur un $\mathbb{Q}$-facteur simple de G^{ad} soit trivial. Par exemple, soient $F = \mathbb{Q}(i)$ et $B = \mathcal{M}_n(F)$ munie de l'involution positive standard $b \mapsto b^* = \bar{b}^t$. Considérons un $(B, *)$-module $(V, \psi) = (W \otimes_F V_0, \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\phi \otimes \psi_0))$, avec $V_0 = F^m$, et ψ_0 la forme Hermitienne alternée dont la matrice dans la base canonique est $i \cdot I_m$. Par suite, $\psi_0(u, v) = i \cdot u^t \bar{v}$, et $G(\mathbb{R}) = \{b \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})^\times : \bar{b}^t \cdot b \in \mathbb{R}^\times\}$. En plus, $h\colon \mathbb{C} \to \mathrm{End}_B(V)_\mathbb{R} \simeq \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ est donnée par $z \mapsto i \cdot z$. Par suite, $\mathrm{im}(h)$ est contenu dans le centre de $\mathrm{End}_B(V)$ et donc l'image du morphisme associé $h\colon \mathbb{S} \to G$ est également contenu dans le centre de G. Par suite, le morphisme composé $\mathbb{S} \xrightarrow{h} G_\mathbb{R} \to G_\mathbb{R}^{\mathrm{ad}}$ est trivial.

Remarque 2.4.7. On conserve les notations ci-dessus. Pour $b \in B$, posons $t_b(u, v) := \psi(u, b \cdot v)$. Soit $g \in G(\psi)$. Alors g laisse invariant $t_b\colon V \times V \to \mathbb{Q}(1)$ si et seulement si $\psi(gu, bgv) = \nu(g)\psi(u, v)$, ou encore $\psi(gu, bgv) = \psi(gu, gbv)$ pour tout u, v, ou encore $gb = bg$. Soient $b_1, \ldots, b_n$ une famille d'éléments de B engendrant B en tant que $\mathbb{Q}$-algèbre. Posons $t_i = t_{b_i}\colon V \otimes V \to \mathbb{Q}(1)$. Alors G est le fixateur dans $G(\psi)$ de t_i $(1 \leq i \leq n)$.

2.5 Interprétation modulaire

Soient $(B, *, V, \psi, h)$ une donnée de Shimura de type PEL, et (G, X) la donnée de Shimura [16] associée.

Théorème 2.5.1. *Soit $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe ouvert compact. Alors $\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$ classifie les classes d'isomorphismes des quadruplets $((W, \kappa), s, i, \eta K)$ où*

- *(W, κ) est une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge de type $(-1, 0), (0, -1)$;*
- *s ou $-s$ est une polarisation de la structure de Hodge (W, h) ;*
- *$i\colon B \to \mathrm{End}(W, h)$ est un morphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres ; et*
- *$\eta\colon V(\mathbb{A}_f) \to W(\mathbb{A}_f)$ un isomorphisme $B \otimes \mathbb{A}_f$-linéaire envoyant ψ en un $\mathbb{A}_f^\times$-multiple de s*

vérifiant la condition suivante :

(*) il existe un isomorphisme B-linéaire $a\colon W \to V$ envoyant s en un $\mathbb{Q}^\times$-multiple de ψ tel que $a \cdot h \in X$.

Démonstration. Par le cas de Hodge (Proposition 1.2.5), $\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$ classifie les classes d'isomorphismes de $\mathcal{H}_K$ des quadruplets $((W, \kappa), (s_i)_{0 \leq i \leq n}, \eta K)$ où

- (W, κ) est une structure de Hodge rationnelle de type $(-1, 0), (0, -1)$;
- $s_0\colon W \times W \to \mathbb{Q}$ est une forme bilinéaire telle que s_0 ou $-s_0$ soit une polarisation de (W, κ) ;
- $s_i\colon W \times W \to \mathbb{Q}(1)$ $(1 \leq i \leq n)$ des applications multi-linéaires ; et
- ηK est la K-orbite d'un $\mathbb{A}_f$-isomorphisme $\eta\colon V(\mathbb{A}_f) \to W(\mathbb{A}_f)$ envoyant ψ en $\mu \cdot s_0$, et t_i en $\mu \cdot s_i$ $(1 \leq i \leq n)$ pour un certain $\mu \in \mathbb{A}_f^\times$,

vérifiant la condition suivante :

(**) Il existe un isomorphisme $a\colon W \to V$ envoyant s_0 en $\lambda \cdot \psi$, s_i en $\lambda \cdot t_i$ $(1 \leq i \leq n)$ pour un scalaire $\lambda \in \mathbb{Q}^\times$, et h en un élément de X.

Soit $((W, \kappa), (s_i)_{0 \leq i \leq n}, \eta K)$ un objet comme ci-dessus. Soit a un isomorphisme $\mathbb{Q}$-linéaire dans la condition $(**)$. Par transport de structure, on obtient une action de B sur

16. On rappelle que la condition (SV3) n'est néanmois pas toujours remplie

W, de sorte que l'isomorphisme a est B-linéaire : pour $b \in B$ et $w \in W$, $b \cdot w := a^{-1}(b \cdot (a(w)))$. Cette action ne dépond pas du choix de a : soit a' un deuxième isomorphisme vérfiant la condition $(**)$, alors $g := a' \circ a^{-1} \in G(\mathbb{Q}) \subset \mathrm{GL}_B(V)$, donc

$$a'^{-1}(b \cdot a'(w)) = (g \circ a)^{-1}(b \cdot (g \circ a)(w)) = a^{-1}(g^{-1}(b \cdot g(a(w)))) = a^{-1}(b \cdot a(w)).$$

De plus, pour tout $u, v \in W$,

$$s_i(u,v) = \lambda t_i(a(u), a(v)) = \lambda\psi(a(u), b_i \cdot a(v)) = \lambda\psi(a(u), a(b_i \cdot v)) = s_0(u, b_i \cdot v).$$

Par suite, le fait que s_i est un tenseur de Hodge pour (W, κ) entraîne que

$$s_0(\kappa(z) \cdot u, b_i \cdot (\kappa(z) \cdot v)) = |z|^2 s_0(u, b_i \cdot v) = s_0(\kappa(z)u, \kappa(z)(b \cdot v)), \quad \forall\, z \in \mathbb{S},\ u, v \in W.$$

L'action de B sur W commute donc au morphisme $\mathbb{S} \to \mathbf{GL}(W)$, et on obtient un morphisme $i\colon B \to \mathrm{End}(W, \kappa)$. D'une manière similaire, on voit que l'isomorphisme η est B-linéaire. On obtient ainsi un quadruplet $((W, \kappa), s_0, i, \eta K)$ de l'énoncé du théorème. Réciproquement, un objet de l'énoncé du théorème $((W, \kappa), s, i, \eta)$ correspond à l'objet $((W, \kappa), (s, s_i)_{1 \leq i \leq n}, \eta)$ de $\mathcal{H}_K$, où $s_i(u, v) := s(u, b_i \cdot v)$ pour tout $u, v \in W$.

$\square$

Il nous reste à reformuler la condition $(**)$ en une condition plus facile à manipuler. Soit (G, X) la donnée de Shimura associée à une donnée de Shimura de type PEL simple $(B, *, V, \psi, h)$. Pour tout $h \in X$, considérons le morphisme de trace

$$B \longrightarrow \mathbb{C}, \quad b \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(b | V(\mathbb{C})/F_h^0).$$

On vérifie aisément que cette application ne dépend pas du choix de h,[17] que l'on notera par Tr_X dans la suite.

Proposition 2.5.2. *On conserve les notations ci-dessus, et on suppose que B est une k-algèbre simple. Soit $((W, \kappa), s, i, \eta K)$ un quadruplet dans Théorème 2.5.1. S'il vérifie la condition $(*)$, alors*

(i) $s(bu, v) = s(u, b^* v)$ *;*

(ii) $\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(i(b) | W(\mathbb{C})/F_\kappa^0) = \mathrm{Tr}_X(b)$ *pour tout* $b \in B$*.*

Réciproquement, supposons le quadruplet $((W, \kappa), s, i, \eta K)$ vérfie les conditions (i) (ii) ci-dessus, alors la condition $(*)$ de Théorème 2.5.1 est remplie si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

1. *$(B, *)$ est de type (A) et de dimension réduite paire.*
2. *$(B, *)$ est de type (C).*

Démonstration. Supposons d'abord que le quadruplet $((W, \kappa), s, i, \eta K)$ vérifie la condition $(*)$, les propriétés (i) et (ii) sont alors immédiates grâce à l'existence d'un isomorphisme a de la condition $(*)$.

Réciproquement, on doit trouver un isomorphisme B-linéaire $\alpha\colon W \to V$ envoyant s en un $\mathbb{Q}^\times$-multiple de ψ : par Remarque 2.4.4 on a automatiquement $a\kappa \in X$. Dans la suite,

17. car pour $h' \in X$ un deuxième élément, il existe $c \in G(\mathbb{R})$ tel que $h' = ch$. Ainsi cet élément définit un isomorphisme de structures de Hodge $(V, h) \to (V, h')$, compatible aux actions de B sur les deux côtés.

on dénote $\underline{\mathrm{Isom}}_B((W,s),(V,\psi))$ le foncteur classifiant les B-isomorphismes de W dans V envoyant s en un multiple de ψ. L'existence de l'isomorphisme $\eta\colon V(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\sim} W(\mathbb{A}_f)$ implique en particulier $\underline{\mathrm{Isom}}_B((W,s),(V,\psi))(\mathbb{Q}_\ell) \neq \emptyset$ pour tout premier $\ell < \infty$. En particulier, $\underline{\mathrm{Isom}}_B((W,s),(V,\psi))$ est non vide, et c'est un espace principal homgène de G sur $\mathbb{Q}$. Montrons ensuite que $\underline{\mathrm{Isom}}_B((W,s),(V,\psi))(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, *i.e.*, il existe un isomorphisme $B\otimes\mathbb{R}$-isomorphisme $W(\mathbb{R}) \to V(\mathbb{R})$ envoyant s en un $\mathbb{R}$-multiple de ψ. Soit $B\otimes\mathbb{R} \simeq B_1 \times \ldots \times B_n$ la décomposition de $B\otimes\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$-algèbres simples, et décomposons $V\otimes\mathbb{R}$ et $W\otimes\mathbb{R}$ comme suit

$$(V,\psi)\otimes\mathbb{R} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n}(V_i,\psi_i), \quad (W,s)\otimes\mathbb{R} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n}(W_i,s_i),$$

tels que (V_i,ψ_i) et (W_i,s_i) soient des $(B,*)\otimes\mathbb{R}$-modules symplectique provennant par la projection évidente de $(B_i,*)$-modules symplectiques, encore noté par (V_i,ψ_i) et par (W_i,s_i). Comme h commute à l'action de B, $\mathrm{im}(h) \subset \mathrm{End}_{B_1}(W_1) \times \cdots \times \mathrm{End}_{B_n}(W_n)$. Posons κ_i la composition de κ avec la projection sur $\mathrm{End}_{B_i}(W_i)$, et $h_i\colon \mathbb{C} \to \mathrm{End}_{B_i}(V)$ la projection de $h\colon \mathbb{C} \to \mathrm{End}_B(V)_\mathbb{R}$ sur $\mathrm{End}_{B_i}(V_i)$. La condition (ii) ci-dessus entraîne que

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Tr}(b_i|W_i/F^0_{\kappa_i}) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Tr}(b_i|V_i/F^0_{h_i}), \quad \forall\ b_i \in B_i\ (1 \leq i \leq n).$$

D'où $\mathrm{Tr}(b_i|W_i/F^0_{\kappa_i}) = \mathrm{Tr}(b_i|V_i/F^0_{h_i})$ pour tout $b_i \in B_i$. Par suite, $(W_i,s_i) \simeq (V_i,\psi_i)$ en tant que $(B_i,*)$-module symplectique (Remarque 2.3.8). Il existe donc un $B\otimes\mathbb{R}$-isomorphisme $W(\mathbb{R}) \to V(\mathbb{R})$ envoyant s en un multiple de ψ, d'où l'assertion. Par conséquent, l'espace principal homogène $\underline{\mathrm{Isom}}_B((W,s),(V,\psi))$ possède des points locaux partout, ce qui entrîne que $\underline{\mathrm{Isom}}_B((W,s),(V,\psi))(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$ lorsque le morphisme suivant est injectif

$$H^1(\mathbb{Q},G) \longrightarrow \prod_{\ell\leq\infty} H^1(\mathbb{Q}_\ell,G),$$

en d'autre termes, lorsque le groupe G vérifie le *principe de Hasse*.

Lemma 2.5.3 ([5] Lemma 8.20)**.** *Soit G un groupe réductif de groupe dérivé G^{der} simplement connexe. Posons $T := G/G^{\mathrm{der}}$. Si le tore T vérifie le principe de Hasse, alors G l'est aussi.*

Il nous donc reste à prouver que sous l'une des conditions (1) et (2) ci-dessus, le tore $T = G/G^{\mathrm{der}}$ vérifie le principe de Hasse. Le cas où $(B,*)$ est de type (C) est immédiat. En effet, dans ce cas-là, G^{der} est le noyau G_1 du morphisme $\nu\colon G \to \mathbb{G}_m$. En particulier, $T = \mathbb{G}_m$, et $H^1(\mathbb{Q},T) = 0$. Donc T vérifie trivialement le principe de Hasse.

Supposons dans le reste de la preuve que $(B,*)$ est de type (A) et que la dimension réduite de V est paire. Soit F le centre de B et $F_0 := \{x \in F : x^* = x\}$. Pour $f \in F$, on note $\bar{f}$ l'image de f par le F_0-automorphisme non trivial de F.

Considérons d'abord $B = \mathcal{M}_n(F)$ munie de l'involution de type (A) standard, et le $(B,*)$-module symplectique $(V,\psi) = (W\otimes_F V_0, \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\phi\otimes\psi_0))$ où $W = F^n$, muni de la forme hermitienne $\phi(w_1,w_2) = w_1^t\cdot\overline{w_2}$; et $V_0 = F^m$ muni de la forme hermitienne alternée $\psi_0(v_1,v_2) = f\cdot v_1^t\cdot\overline{v_2}$ avec $f \in F$ tel que $\bar{f} = -f$. Ainsi, $C = \mathrm{End}_B(V) \simeq \mathcal{M}_m(F)$, et $c^* = \bar{c}^t$ pour tout $c \in C$. Considérons le morphisme suivant

$$\theta\colon G \longrightarrow \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,F} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}, \quad g \mapsto (\det(g),\nu(g)).$$

Alors $\ker(\theta) = G^{\mathrm{der}}$ de G, et $\mathrm{im}(\theta)$ est formé des éléments $(x, y) \in \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,F} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$ tels que $N_{F/F_0}(x) = y^m$. Comme m est un entier pair, on peut trouver un isomorphisme de $T \simeq \mathrm{im}(\theta)$ dans $T' = \ker(N_{F/F_0} \colon \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,F} \to \mathrm{Res}_{F_0/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,F_0}) \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,F} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$:

$$T \longrightarrow T', \quad (x, y) \mapsto (y^{-m/2}x, y).$$

On est amené donc à prouver que le tore T', ou encore le tore

$$D_1 := \ker(N_{F/F_0} \colon \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,F} \to \mathrm{Res}_{F_0/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,F_0})$$

satisfait au principe de Hasse. En d'autres termes, le morphisme canonique suivant est injectif :

$$\frac{F_0^\times}{N_{F/F_0}F^\times} \longrightarrow \prod_{v \leq \infty} \frac{F_{0,v}}{\mathrm{N}_{F_v/F_{0,v}}F_v^\times}. \tag{2}$$

Posons $\Gamma = \mathrm{Gal}(F/F_0)$ et considérons la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow F^\times \longrightarrow \mathbb{I}_F \longrightarrow \mathbb{C}_F \longrightarrow 0.$$

Comme $H^1(\Gamma, \mathbb{C}_F) = 0$ et que le groupe Γ est un groupe cyclique, $H_T^{-1}(\Gamma, \mathbb{C}_F) = 0$. On déduit alors que le morphisme $H_T^{-1}(\Gamma, F^\times) \to H_T^{-1}(\Gamma, \mathbb{I}_F)$ est injectif. Autrement dit, le morphisme (2) est injectif.

Pour traiter le cas général, soit B' une $\mathbb{Q}$-algèbre simple à involution de type (A) et de dimension réduite impaire, de centre F, tel que $n = [B : F]^{1/2}$. Soit (V', ψ') un $(B', *)$-module symplectique de dimension réduite m. Posons $C' = \mathrm{End}_{B'}(V')$. Vu la classification sur un corps algébriquement clos, $(B, *) \otimes \overline{\mathbb{Q}} \simeq (B', *) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$, et $(V, \psi) \otimes \overline{\mathbb{Q}} \simeq (V', \psi') \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ en tant que module symplectique. En particulier, on en déduit un isomorphisme $\alpha \colon C \otimes \overline{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} C' \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ de $\overline{\mathbb{Q}}$-algèbres à involution. En plus, par Noether-Skolem, deux tels isomorphismes sont conjugués par un élément $c \in C \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $c^*c = 1$. Soit donc $\beta \colon G \otimes \overline{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} G' \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ l'isomorphisme induit par un tel isomorphisme α. Alors pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, $\sigma(\beta) = \beta \circ \mathrm{int}(c)$ pour un certain $c \in G(\mathbb{Q})$. Cela dit, G' est une forme intérieure de G sur $\mathbb{Q}$. Posons $T' = G'/G'^{\mathrm{der}}$: c'est un quotient caractéristique de G'. Il s'ensuit que T' est lui-même une forme intérieure de T sur $\mathbb{Q}$. Or T est commutatif, toute forme intérieure est triviale. Par suite, $T' \simeq T$ et T' satisfait aussi au principe de Hasse. Ceci achève la preuve dans le cas général. □

Références

[1] P. Deligne, Hodge cycles on abelian varieties

[2] M. -A. Knus, Quadratic and hermitian forms over rings.

[3] R. Kottwitz, Points on some Shimura varieties over finite fields

[4] J. Milne, Class field theory.

[5] J. Milne, Introduction to Shimura varieties, notes en ligne

[6] SGA3..