université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2014/2015** **DEVOIR MAISON 1** **Licence de Mathématiques** **Géométrie et Topologie (N1MA6014)** **A rendre le 02/03/2015**	Département Licence

Problème. On note $\ell_2(\mathbb{R})$ l'espace de Hilbert des suites réelles (x_n) de carré sommable, muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ et de sa distance associée d. On se propose de montrer le résultat suivant, version faible du théorème de plongement de Withney :

Théorème 1. *Soit M une variété séparée à base dénombrable. Alors il existe un plongement $\phi : M \to \ell_2(\mathbb{R})$. En particulier M est métrisable.*

On rappelle qu'on plongement est un homéomorphisme $M \to \phi(M)$ où $\phi(M)$ est muni de la topologie induite. Un espace X est métrisable si sa topologie provient d'une distance sur X.

Pour simplifier on suppose M de dimension fixe $m \in \mathbb{N}^*$. Pour démontrer le théorème, établir les étapes suivantes :

(1) Tout point d'une variété admet une base de voisinages compacts et métrisables.

(*Rappel : une collection $\mathcal{V} = (V_i)$ de voisinages de x est une base de voisinages en x si pour tout ouvert $U \ni x$, il existe $V_i \in \mathcal{V}$, $x \in V_i \subset U$*)

(2) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base d'ouverts de M. Alors $B = \{U_n \,|\, \overline{U}_n \text{ est métrisable}\}$ est encore une base d'ouverts.

Sous les hypothèses du théorème, M admet donc une base dénombrable d'ouverts d'adhérence métrisable, qu'on note encore $B = \{U_n\}$. Soit d_n une distance sur $\overline{U}_n$ compatible avec la topologie.

(3) La fonction $\phi_n : M \to [0,1]$, définie par $x \mapsto \min\{1, d_n(x, \partial U_n)\}$ si $x \in \overline{U}_n$, $\phi_n(x) = 0$ si $x \notin \overline{U}_n$, est continue sur M et non nulle sur U_n exactement.

(Rappel : si d est une distance sur X et $A \subset X$ non vide, $d(x, A) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$ est continue en la variable $x \in X$; on convient que $d(x, \emptyset) = +\infty$; on note $\partial A = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$ la frontière de A).

(4) La fonction $\phi : M \to \ell_2(\mathbb{R})$, $x \mapsto \left(\frac{\phi_n(x)}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et continue.

(5) ϕ est injective (*utiliser le fait que M est séparée*).

(6) $\phi : M \to \phi(M)$ est fermée.

(*On pourra établir que si $F \subset M$ est fermée, le complémentaire de $\phi(F)$ dans $\phi(M)$ est ouvert, en montrant que $d(\phi(x), \phi(F)) > 0$ si $x \notin F$, où d est la distance de $\ell_2(\mathbb{R})$*).

(7) Conclure.