université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2018/2019** **Parcours :** Licence de Mathématiques **UE :** Algèbre bilinéaire et géométrie, 4TMQ405EX **Date :** 06/05/2019 **Heure :** 14h30 **Durée :** 3h00 **Documents :** Non autorisés. **Calculette :** autorisée **Epreuve de Mr :** Bessières. **Sujet :** 2 pages	**Collège Sciences Et Technologies**

On appréciera la qualité de la rédaction.

Exercice 1. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (justifier) :

1) Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe deux droites d_1, d_2 en somme directe telles que q soit définie positive sur d_1 et définie négative sur d_2. Alors q est de signature $(1, 1)$.
2) Soit E un espace euclidien, e une base orthonormée de E et e^* sa base duale. Alors $e_i^* = e_i^\flat$, où on rappelle que $x^\flat$ est la forme linéaire $y \mapsto \langle x, y\rangle$.
3) Soit E un espace pré-hilbertien et $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille orthonormée de vecteurs de E. Soit $x \in E$, alors $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle^2$.

Exercice 2. On munit $E = \mathbb{R}_3[X]$ de la forme bilinéaire définie par,

$$\forall P, Q \in E, \qquad \langle P, Q\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)x^2\, dx$$

1) Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2) Déterminer la matrice du produit scalaire dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ (on pourra calculer $\langle X^i, X^j\rangle$ en fonction de $i + j$).
3) Déterminer la famille orthonormée obtenue de $(1, X, X^2)$ par l'algorithme de Gram-Schmidt.
4) Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, ainsi que la distance $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

Exercice 3. Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini dans la base canonique par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\dfrac{x}{4} + \dfrac{3y}{4} - \dfrac{z\sqrt{6}}{4} \\ \dfrac{3x}{4} - \dfrac{y}{4} - \dfrac{z\sqrt{6}}{4} \\ \dfrac{x\sqrt{6}}{4} + \dfrac{y\sqrt{6}}{4} + \dfrac{z}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 4. (u symétrique et $\mathrm{tr}(u) = 0$)
Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $u \in \mathrm{End}(E)$. On pose $\mathrm{tr}(u) := \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ où $A = [u]_{e \to e}$ est la matrice de u dans une base e quelconque.

1) Justifier que $\mathrm{tr}(u)$ ne dépend pas de e, et que si u est symétrique, alors $\mathrm{tr}(u)$ est la somme des valeurs propres de u.
2) On suppose u symétrique et $\mathrm{tr}(u) = 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un vecteur x non nul tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.
   (b) En déduire qu'il existe une base orthonormée e telle que : $\forall i,\ \langle u(e_i), e_i \rangle = 0$.
   [*Indication :* récurrence]

Exercice 5. Soient E un espace euclidien et $s \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme tel que $s \circ s = \mathrm{id}$.

1) Montrer que $E = \ker(s - \mathrm{id}) \oplus \ker(s + \mathrm{id})$. Quelle est la nature de s ?

2) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) $s \in \mathrm{O}(E)$ (c'est-à-dire s est orthogonale),
   (b) $\ker(s - \mathrm{id}) \perp \ker(s + \mathrm{id})$,
   (c) $s = s^*$.

3) Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $s_F \in \mathrm{O}(E)$ la symétrie orthogonale par rapport à F. Montrer que pour tout $g \in \mathrm{O}(E)$, on a $g \circ s_F \circ g^{-1} = s_{g(F)}$.

4) Soit $f \in \mathrm{O}(E)$ préservant toute droite vectorielle (c'est-à-dire telle que pour tout $x \in E$, $f(x)$ est colinéaire à x). Montrer que $f = \pm\mathrm{id}$.

5) On appelle *centre* d'un groupe G le sous-groupe $\mathrm{Z}(G) = \{g \in G, \forall h \in G, gh = hg\}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les autres.
   (a) Montrer que $\mathrm{Z}(\mathrm{O}(E)) = \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$.
   (b) Montrer que si $\dim E \geq 3$, alors $\mathrm{Z}(\mathrm{SO}(E)) = \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\} \cap \mathrm{SO}(E)$.
   (c) Que vaut $\mathrm{Z}(\mathrm{SO}(E))$ lorsque $\dim E = 1$ et $\dim E = 2$?

   (Indication : pour les questions (a) et (b) on pourra utiliser 3) en prenant pour F une droite ou un plan)