université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2018/2019** **Parcours :** Licence de Mathématiques **UE :** Algébre bilinéaire et géométrie, 4TMQ405EX **Date :** 06/05/2019 **Heure :** 14h30 **Durée :** 3h00 **Documents :** Non autorisés. **Calculette :** autorisée **Epreuve de Mr :** Bessières. **Sujet :** 2 pages	**Collège Sciences Et Technologies**

On appréciera la qualité de la rédaction.

Exercice 1. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (justifier) :

1) Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe deux droites d_1, d_2 en somme directe telles que q soit définie positive sur d_1 et définie négative sur d_2. Alors q est de signature $(1, 1)$.

VRAI. Par définition, $\mathrm{sign}(q) = (p_+, p_-)$, où p_+ est la dimension maximale des sous-espaces vectoriels où q est définie positive et p_- est la dimension maximale des sous-espaces vectoriels où q est définie négative. Puisque q est définie positive sur d_1, on a $p_+ \geq 1$. Puisque q est définie négative sur d_2, elle n'est pas positive sur $\mathbb{R}^2$ donc $p_+ < 2$. On conclut que $p_+ = 1$ et de même que $p_- = 1$.

2) Soit E un espace euclidien, e une base orthonormée de E et e^* sa base duale. Alors $e_i^* = e_i^\flat$, où on rappelle que $x^\flat$ est la forme linéaire $y \mapsto \langle x, y\rangle$.

VRAI. Soit $x = \sum_j x_j e_j$. On a $e_i^*(x) = e_i^*(\sum_j x_j e_j) = \sum_j x_j e_i^*(e_j) = x_i$. On a aussi $e_i^\flat(x) = \langle e_i, \sum_j x_j e_j\rangle = \sum_j x_j \langle e_i, e_j\rangle = x_i$ puisque e est orthonormée. Donc $e_i^*(x) = e_i^\flat(x)$ pour tout x, et $e_i^* = e_i^\flat$.

3) Soit E un espace pré-hilbertien et $\{u_1, \dots, u_n\}$ une famille orthonormée de vecteurs de E. Soit $x \in E$, alors $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle^2$.

VRAI. Posons $\bar{x} = \sum_j \langle x, u_j\rangle u_j$. Alors $\bar{x} \perp x - \bar{x}$:

$$\begin{aligned}\langle \bar{x}, x - \bar{x}\rangle &= \langle \sum_j \langle x, u_j\rangle u_j, x\rangle - \langle \bar{x}, \bar{x}\rangle \\ &= \sum_j \langle x, u_j\rangle^2 - \langle \bar{x}, \bar{x}\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

puisque (u_j) est orthonormée. En écrivant $x = x - \bar{x} + \bar{x}$ et en utilisant Pythagore on obtient

$$\|x\|^2 = \|x - \bar{x}\|^2 + \|\bar{x}\|^2 \geq \|\bar{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle^2$$

Exercice 2. On munit $E = \mathbb{R}_3[X]$ de la forme bilinéaire définie par,

$$\forall P, Q \in E, \qquad \langle P, Q\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)x^2\,dx$$

1) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

On vérifie bilinéarité, symétrie et positivité en utilisant linéarité et positivité de l'intégrale. Supposons que $\langle P, P\rangle = 0$. La fonction $x \mapsto P^2(x)x^2$ étant positive continue d'intégrale nulle, on obtient par un résultat classique d'analyse qu'elle est identiquement nulle sur $[-1, 1]$. On en déduit que P^2 est nulle sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$, donc nulle sur $[-1, 1]$ par continuité (ou parce que c'est un polynôme avec une infinité de racines).

2) Déterminer la matrice du produit scalaire dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ (on pourra calculer $\langle X^i, X^j\rangle$ en fonction de $i + j$).

On a

$$\begin{aligned}
\langle X^i, X^j\rangle &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^i x^j x^2\,dx \\
&= \frac{1}{2(i+j+3)}\left[x^{i+j+3}\right]_{-1}^{1} \\
&= \begin{cases} 0 & , i+j \text{ impair} \\ \dfrac{1}{i+j+3} & , i+j \text{ pair} \end{cases}
\end{aligned}$$

donc la matrice de Gram du produit scalaire est

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/7 \\ 1/5 & 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 1/7 & 0 & 1/9 \end{pmatrix}$$

3) Déterminer la famille orthonormée obtenue de $(1, X, X^2)$ par l'algorithme de Gram-Schmidt.

On pose $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\|1\|} = \sqrt{3}$.

On pose $u_2 = X - \langle X, \varepsilon_1\rangle\varepsilon_1 = X - \langle X, \sqrt{3}\rangle\sqrt{3} = X$, puis $\varepsilon_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|} = \dfrac{X}{\|X\|} = \sqrt{5}X$.

On pose

$$\begin{aligned}
u_3 &= X^2 - \langle X^2, \varepsilon_1\rangle\varepsilon_1 - \langle X^2, \varepsilon_2\rangle\varepsilon_2 \\
&= X^2 - \langle X^2, \sqrt{3}\rangle\sqrt{3} - \langle X^2, \sqrt{5}X\rangle\sqrt{5}X \\
&= X^2 - 3/5
\end{aligned}$$

On calcule $\|u_3\|^2 = \langle X^2, X^2\rangle - 2\langle X^2, 3/5\rangle + (3/5)^2\langle 1, 1\rangle = 1/7 - 6/25 + 3/25 = 4/175$ et on pose alors $\varepsilon_2 = \frac{5\sqrt{7}}{2}(X^2 - 3/5)$. On obtient la base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

4) Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, ainsi que la distance $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$, le projeté orthogonal $p(X^3)$ se calcule donc par la formule

$$\begin{aligned}
p(X^3) &= \langle X^3, \varepsilon_1\rangle\varepsilon_1 + \langle X^3, \varepsilon_2\rangle\varepsilon_2 + \langle X^3, \varepsilon_3\rangle\varepsilon_3 \\
&= \langle X^3, \sqrt{3}\rangle\sqrt{3} + \langle X^3, \sqrt{5}X\rangle\sqrt{5}X + \langle X^3, \frac{5\sqrt{7}}{2}(X^2 - 3/5)\rangle\frac{5\sqrt{7}}{2}(X^2 - 3/5) \\
&= \frac{5}{7}X.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 = \|X^3 - 5X/7\|^2 = \frac{1}{9} - \frac{10}{49} + (\frac{5}{7})^2\frac{1}{5} = \frac{49 - 90 + 45}{441} = \cancel{\frac{1}{49}} = \frac{4}{441}$$

et donc $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \cancel{1/7} = 2/21$.

Exercice 3. Déterminer la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini dans la base canonique par

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\frac{x}{4} + \frac{3y}{4} - \frac{z\sqrt{6}}{4} \\ \frac{3x}{4} - \frac{y}{4} - \frac{z\sqrt{6}}{4} \\ \frac{x\sqrt{6}}{4} + \frac{y\sqrt{6}}{4} + \frac{z}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice de l'endomorphisme dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -\sqrt{6} \\ 3 & -1 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

On vérifie sans peine que les colonnes de A sont orthonormées, et que $\det A = -1$, donc que $A \in \mathrm{O}_3^-(\mathbb{R})$. On en déduit que $f \in \mathrm{O}^-(\mathbb{R}^3)$ est la composée d'une rotation d'axe l'espace propre E_{-1} et d'une symétrie orthogonale par rapport au plan $E_{-1}^\perp$. La résolution de $AX = -X$ conduit à $E_{-1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où on déduit immédiatement

$E_{-1}^{\perp} = \mathrm{vect}\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$. L'angle non orienté θ de la rotation est donné par $2\cos(\theta) + \det A = \mathrm{tr} A$, soit $2\cos(\theta) - 1 = 0$ donc $\cos(\theta) = 1/2$, d'où $\theta = \pi/3$. Dans la base orthonormée directe $(e_1, e_2, n) = (\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix})$, on calcule que

$$Ae_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-\sqrt{6}\\-\sqrt{6}\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$$

d'où l'on déduit que l'angle orienté est $\theta = 2\pi - \pi/3$.

Exercice 4. (u symétrique et $\mathrm{tr}(u) = 0$)
Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $u \in \mathrm{End}(E)$. On pose $\mathrm{tr}(u) := \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ où $A = [u]_{e\to e}$ est la matrice de u dans une base e quelconque.

1) Justifier que $\mathrm{tr}(u)$ ne dépend pas de e, et que si u est symétrique, alors $\mathrm{tr}(u)$ est la somme des valeurs propres de u.

   On rappelle que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Soient e, e' deux bases, et $P = [\mathrm{id}]_{e'\to e}$ la matrice de passage de e à e', alors

$$\mathrm{tr}([u]_{e'\to e'}) = \mathrm{tr}(P^{-1}[u]_{e\to e}P) = \mathrm{tr}([u]_{e\to e}PP^{-1}) = \mathrm{tr}([u]_{e\to e}).$$

   D'après le théorème spectral, un endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. Dans cette base, la matrice de u est diagonale et sa trace est la somme des valeurs propres.

2) On suppose u symétrique et $\mathrm{tr}(u) = 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un vecteur x non nul tel que $\langle u(x), x\rangle = 0$.

   Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u, et soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres correspondantes. Puisque e est libre, $x := \sum_{i=1}^{n} e_i$ est non nul. On a

$$\langle u(x), x\rangle = \langle \sum_i \lambda_i e_i, \sum_j e_j\rangle = \sum_{i,j} \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle = \sum_i \lambda_i = \mathrm{tr}(u) = 0.$$

   (b) En déduire qu'il existe une base orthonormée e telle que : $\forall i,\ \langle u(e_i), e_i\rangle = 0$.

   On procède par récurrence sur n. Pour $n = 1$, l'assertion est triviallement vraie. Supposons l'assertion vraie pour tout espace euclidien E de dimension n et tout endomorphisme symétrique u de E à trace nulle. Soient E euclidien de dimension $n+1$ et $u \in \mathrm{End}(E)$ à trace nulle. D'après la question (a) il existe $x \in E$ non nul tel que $\langle u(x), x\rangle = 0$. Soient x un tel vecteur, $e_1 = x/\|x\|$ et $v = (v_1, \ldots, v_n)$ une base orthonormée de $e_1^\perp$. Puisque (e_1, v) est orthonormée, la matrice $A \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de u dans cette base est symétrique. Soit $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice obtenue en enlevant à A la première ligne et la première colonne. La matrice B est symétrique. Elle représente dans la base v l'endomorphisme $p \circ u$, où p la projection orthogonale sur $e_1^\perp$. Il s'ensuit que $p \circ u$ est symétrique. Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $\{e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ de $e_1^\perp$ telle que $\langle p \circ u(e_i), e_i)\rangle = 0$ pour $i \geq 2$. Comme p restreinte à $e_1^\perp$ est l'application identité, on en déduit que $\langle u(e_i), e_i)\rangle = 0$ pour $i \geq 2$, prouvant la récurrence.

Exercice 5. Soient E un espace euclidien et $s \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme tel que $s \circ s = \mathrm{id}$.

1) Montrer que $E = \ker(s - \mathrm{id}) \oplus \ker(s + \mathrm{id})$. Quelle est la nature de s ?

On montre que $E = \ker(s - \mathrm{id}) + \ker(s + \mathrm{id})$ en écrivant que, pour tout $x \in E$,

$$x = \frac{x + s(x)}{2} + \frac{x - s(x)}{2}.$$

En effet, en utilisant $s \circ s = \mathrm{id}$, on voit que $s(\frac{x+s(x)}{2}) = \frac{s(x)+x}{2} = \frac{x+s(x)}{2}$ donc $\frac{x+s(x)}{2} \in \ker(s - \mathrm{id})$, et que $s(\frac{x-s(x)}{2}) = \frac{s(x)-x}{2} = -\frac{x-s(x)}{2}$ donc $\frac{x-s(x)}{2} \in \ker(s + \mathrm{id})$. On montre que la somme est directe en notant que pour $x \in \ker(s - \mathrm{id}) \cap \ker(s + \mathrm{id})$, on a $s(x) = x = -x$ donc $x = 0$. L'endomorphisme s est une symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{id})$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{id})$.

2) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) $s \in \mathrm{O}(E)$ (c'est-à-dire s est orthogonale),
   (b) $\ker(s - \mathrm{id}) \perp \ker(s + \mathrm{id})$,
   (c) $s = s^*$.

(a) $\Rightarrow$ (b) Soient $x \in \ker(s - \mathrm{id})$ et $y \in \ker(s + \mathrm{id})$, alors

$$\langle x, y\rangle = \langle s(x), s(y)\rangle = \langle x, -y\rangle = -\langle x, y\rangle = 0.$$

(b) $\Rightarrow$ (c). Soient $x \in \ker(s - \mathrm{id})$ et $y \in \ker(s + \mathrm{id})$. Ecrivons $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ selon la décomposition orthogonale $E = \ker(s - \mathrm{id}) \overset{\perp}{\oplus} \ker(s + \mathrm{id})$. Alors

$$\begin{aligned} \langle s(x_1 + x_2), y_1 + y_2\rangle &= \langle x_1 - x_2, y_1 + y_2\rangle \\ &= \langle x_1, y_1\rangle + 0 + 0 + \langle -x_2, y_2\rangle \\ &= \langle x_1 + x_2, y_1 - y_2\rangle \\ &= \langle x, s(y)\rangle \end{aligned}$$

donc $s^* = s$.
(c) $\Rightarrow$ (a) Puisque $s \circ s = \mathrm{id}$ implique $s = s^{-1}$, (c) dit que $s^{-1} = s^*$, d'où pour tous $x, y \in E$:
$$\langle s(x), s(y)\rangle = \langle x, s^*(s(y))\rangle = \langle x, s^{-1}(s(y))\rangle = \langle x, y\rangle.$$

3) Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $s_F \in \mathrm{O}(E)$ la symétrie orthogonale par rapport à F. Montrer que pour tout $g \in \mathrm{O}(E)$, on a $g \circ s_F \circ g^{-1} = s_{g(F)}$.

Notons $s = g \circ s_F \circ g^{-1}$. Puisque $\mathrm{O}(E)$ est un groupe, $s \in \mathrm{O}(E)$. On prouve que s est la symétrie orthogonale $s_{g(F)}$ en montrant que $s = \mathrm{id}$ sur $g(F)$ et $s = -\mathrm{id}$ sur $g(F)^\perp$. Soit $y \in g(F)$, c'est-à-dire $y = g(x)$ pour $x \in F$. Alors $s(y) = g \circ s_F \circ g^{-1}(g(x)) = g \circ s_F(x) = g(x) = y$, donc $s = \mathrm{id}$ sur $g(F)$. Puisque g est orthogonale, $g(F)^\perp = g(F^\perp)$. Soit $y \in g(F^\perp)$, c'est-à-dire $y = g(x)$ pour $x \in F^\perp$. Alors $s(y) = g \circ s_F \circ g^{-1}(g(x)) = g \circ s_F(x) = g(-x) = -g(x) = -y$, donc $g = -\mathrm{id}$ sur $g(F)^\perp$.

4) Soit $f \in \mathrm{O}(E)$ préservant toute droite vectorielle (c'est-à-dire telle que pour tout $x \in E$, $f(x)$ est colinéaire à x). Montrer que $f = \pm\mathrm{id}$.

Par hypothèse, pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda_x x$ où $\lambda_x \in \mathbb{R}$. Puisque $f \in \mathrm{O}(E)$, on peut supposer $\lambda_x \in \{-1, 1\}$. Puisque $f(0) = \pm 0$, il reste à montrer que $(\forall x \neq 0, f(x) = x)$ ou bien $(\forall x \neq 0, f(x) = -x)$. Supposons qu'il existe $x, y \in E$ non nuls que $f(x) = x$ et $f(y) = -y$. On a d'une part $f(x+y) = f(x) + f(y) = x - y$ et d'autre part $f(x+y) = \pm(x+y)$. En considérant les deux signes possibles, on en déduit $x = 0$ ou $y = 0$, une contradiction.

5) On appelle *centre* d'un groupe G le sous-groupe $\mathrm{Z}(G) = \{g \in G, \forall h \in G, gh = hg\}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les autres.
   (a) Montrer que $\mathrm{Z}(\mathrm{O}(E)) = \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$.

   Soit $g \in \mathrm{Z}(\mathrm{O}(E))$. Puisque g commute avec toutes les applications orthogonales, il commute en particulier avec toutes les symétries orthogonales S_F où F est une droite vectorielle. On a alors $s_{g(F)} = g \circ s_F \circ g^{-1} = s_F \circ g \circ g^{-1} = s_F$, ce qui implique $g(F) = F$ pour toute droite vectorielle. On déduit de 4) que $g \in \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$, donc $\mathrm{Z}(\mathrm{O}(E)) \subset \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$. Il est évident que réciproquement $\{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\} \subset \mathrm{Z}(\mathrm{O}(E))$.

   (b) Montrer que si $\dim E \geq 3$, alors $\mathrm{Z}(\mathrm{SO}(E)) = \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\} \cap \mathrm{SO}(E)$.

   Il est clair que $\{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\} \cap \mathrm{SO}(E) \subset \mathrm{Z}(\mathrm{SO}(E))$. Soit $g \in \mathrm{Z}(\mathrm{SO}(E))$. Si $\dim E$ est impaire, toute symétrie orthogonale S_F, où $\dim F = 1$, appartient à $\mathrm{SO}(E)$ (car $\dim F^\perp$ est paire). Dans ce cas, g commute avec toute telle symétrie orthogonale S_F. On conclut comme en (a) que $g \in \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$, en fait $g = \mathrm{id}$ car $-\mathrm{id} \notin \mathrm{SO}(E)$.

Si $\dim E$ est paire, toute symétrie orthogonale S_F, où $\dim F = 2$, appartient à $\mathrm{SO}(E)$. Dans ce cas, g commute avec toute symétrie orthogonale S_F où $\dim F = 2$. On déduit de 3) que $g(F) = F$ pour tout sous-espace vectoriel F de dimension 2. Si F, G sont deux tels sous-espaces, on a alors $g(F \cap G) = F \cap G$. Puisque $\dim E \geq 3$, toute droite vectorielle peut-être réalisée comme l'intersection $F \cap G$ de deux sous-espaces vectoriels de dimension 2. On en déduit que g préserve toute droite vectorielle et donc que $g \in \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$.

(c) Que vaut $\mathrm{Z}(\mathrm{SO}(E))$ lorsque $\dim E = 1$ et $\dim E = 2$?

Lorsque $\dim E = 1$, on a $E = \mathbb{R}$, $\mathrm{O}(E) = \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$ et $\mathrm{SO}(E) = \{\mathrm{id}\} = \mathrm{Z}(\mathrm{SO}(E))$. Lorsque $\dim E = 2$, $\mathrm{SO}(E)$ est isomorphe à S^1 et en particulier est abélien, donc $\mathrm{Z}(\mathrm{SO}(E)) = \mathrm{SO}(E)$.

(Indication : pour les questions (a) et (b) on pourra utiliser 3) en prenant pour F une droite ou un plan)