université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2016/2017** **Parcours :** Licence de Mathématiques **UE :** Algèbre bilinéaire et géométrie **Date :** 17/03/2017 **Heure :** 11h00 **Durée :** 1h30 **Documents :** Non autorisés. **Calculette :** autorisée **Epreuve de Mr :** Bessières. **Sujet :** 2 pages	**Collège ST**

Exercice 1 (Questions de cours). 1) Soit b la forme polaire d'une forme quadratique q, montrer que $b(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$.

2) Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (justifier) :

(a) Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de cône isotrope $I(q) = \{0\}$. Alors q ou $-q$ est positive.

(b) Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe deux droites d_1 et d_2 en somme directe telles que q soit définie positive sur d_1 et sur d_2. Alors q est définie positive.

Exercice 2. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie dans la base canonique par

$$q(x) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

1) Donner l'écriture matricielle de la forme polaire b de q.

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Déterminer $F^\perp$ et prouver que $F^\perp \supset N$, où N est le noyau de b.

3) Déterminer $F^{\perp\perp}$ et N, vérifier que $F^{\perp\perp} = F + N$.

Exercice 3. Déterminer la signature et une base orthogonale de $q_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, et la signature de $q_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, où

(a) $q_1(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3$.

(b) $q_2(x) = x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n (où $n \geq 1$). On définit pour tous $P, Q \in E$,

$$b(P,Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)\ dt.$$

1) Montrer que b définit une forme bilinéaire symétrique positive sur E.

2) Déterminer le cône isotrope $I(q)$, où q est la forme quadratique associée à b.

3) Montrer que le noyau de b est égal au cône isotrope, i.e. $N(b) = I(q)$, et en déduire le rang de b.

On définit, pour tout $P \in E$,

$$\ell(P) = \int_0^1 P'(t)\ dt, \quad \text{et} \quad q_1(P) = q(P) - (\ell(P))^2.$$

4) Montrer que ℓ est une forme linéaire sur E, et que q_1 est une forme quadratique.

5) Montrer que

$$q_1(P) = \int_0^1 \big(P'(t) - \ell(P)\big)^2 \; dt.$$

6) En déduire la signature de q_1 (on ne cherchera pas à réduire explicitement en carrés la forme q_1).