| | | |
|---|---|---|
| université de BORDEAUX | **ANNEE UNIVERSITAIRE 2018/2019**<br>**Parcours :** Licence de Mathématiques<br>**UE :** Algèbre bilinéaire et géométrie<br>**Date :** 20/03/2019 **Heure :** 8h00 **Durée :** 1h20<br>**Documents :** Non autorisés. **Calculette :** autorisée<br>**Epreuve de Mr :** Bessières. **Sujet :** 1 page | **Collège Sciences Et Technologies** |

**Exercice 1.** Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (justifier).

(1) Soit $\ell_1, \ell_2$ deux formes linéaires sur $E$ un espace vectoriel de dimension $\geq 2$. Alors $b(x, y) = \ell_1(x)\ell_2(y)$ définit une forme bilinéaire dégénérée sur $E$.

(2) Soit $q_1, q_2$ deux formes quadratiques définies positives sur $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Alors $q_1 + q_2$ est une forme quadratique définie positive sur $E$.

(3) La norme $L^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ ($\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$) est euclidienne.

**Exercice 2.** Soit $q$ la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ définie par $q(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_3 + x_2x_3$. Donner la forme polaire de $q$ et déterminer signature, rang et si elle est définie positive.

**Exercice 3.** Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel formé des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $C^1$ (dérivable et de dérivée continue), et soit $w : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit sur $E \times E$ une fonction $b$ (dépendant de $w$) par

$$b(f, g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)w^2(t)\, dt$$

(1) Vérifier que $b$ est symétrique et bilinéaire. Est-elle positive ? Est-elle définie ?

(2) Soit l'hypothèse (H) : *$w$ s'annule en un nombre au plus fini de points.*

  (a) On suppose que (H) est vérifiée, déterminer le cône isotrope et le noyau de $b$.

  (b) Est-ce que (H) est nécessaire pour que le noyau de $b$ soit de dimension 1 ?

  (c) Soit $F \subset E$ le sous-espace vectoriel formé des fonctions nulles en 0. On suppose que (H) est vérifiée, montrer que $b$ restreinte à $F \times F$ est un produit scalaire.

(3) On suppose que $w$ est nulle sur $[0, 1/2]$ et affine sur $[1/2, 1]$ telle que $w(1) = 1$. Déterminer le cône isotrope de $b$.

(4) Soit $G \subset F$ le sous-espace vectoriel formé des fonctions polynomiales nulles en 0. Est-il possible que $b$ restreinte à $G \times G$ soit un produit scalaire si $w$ s'annule sur un intervalle ?