| | | |
|---|---|---|
| université de BORDEAUX | **ANNEE UNIVERSITAIRE 2018/2019**<br>**Parcours :** Licence de Mathématiques<br>**UE :** Algèbre bilinéaire et géométrie<br>**Date :** 20/03/2019 **Heure :** 8h00 **Durée :** 1h20<br>**Documents :** Non autorisés. **Calculette :** autorisée<br>**Epreuve de Mr :** Bessières. **Sujet :** 1 page | **Collège Sciences Et Technologies** |

**Exercice 1.** Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (justifier).

(1) Soit $\ell_1, \ell_2$ deux formes linéaires sur $E$ un espace vectoriel de dimension $\geq 2$. Alors $b(x,y) = \ell_1(x)\ell_2(y)$ définit une forme bilinéaire dégénérée sur $E$.

Pour tous $x, y \in E$, les applications $b(\cdot, y) = \ell_1(\cdot)\ell_2(y)$ et $b(x,\cdot) = \ell_1(x)\ell_2(\cdot)$ sont linéaires donc $b$ est bilinéaire. Par définition, $b$ est dégénérée si son noyau $N(b) = \{y \in E \mid b(x,y) = 0, \forall x \in E\}$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Cela revient à dire qu'il existe $y \neq 0$ tel que $\ell_1(\cdot)\ell_2(y)$ est identiquement nulle, donc $b$ est dégénérée si $\ker \ell_2 \neq \{0\}$. La formule du rang donne $\dim \ker \ell_2 + \dim \operatorname{Im} \ell_2 = \dim E \geq 2$. Puisque $\operatorname{Im} \ell_2 \subset \mathbb{K}$ est de dimension $\leq 1$, on a $\dim \ker \ell_2 \geq 1$ donc $\ker \ell_2 \neq \{0\}$.

(2) Soit $q_1, q_2$ deux formes quadratiques définies positives sur $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Alors $q_1 + q_2$ est une forme quadratique définie positive sur $E$.

L'ensemble des formes quadratiques de $E$ forme un espace vectoriel, donc $q_1 + q_2$ est une forme quadratique. Par hypothèse, $q_i(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$ et $i = 1, 2$, donc $(q_1 + q_2)(x) = q_1(x) + q_2(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$, donc $q_1 + q_2$ est positive. De plus, $0 = q_1(x) + q_2(x) \geq q_1(x) \geq 0$ implique que $q_1(x) = 0$, donc que $x = 0$ puisque $q_1$ est définie. Donc $q_1 + q_2$ est définie.

(3) La norme $L^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ ($\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, x_2|\}$) est euclidienne.

Une norme est euclidienne si et seulement si elle vérifie l'identité du parallèlogramme

$$\forall x, y, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

En testant $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$, on trouve $\|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 = 1 + 1 = 2$ et $2\|x\|_\infty^2 + 2\|y\|_\infty^2 = 4$, donc $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas euclidienne.

**Exercice 2.** Soit $q$ la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ définie par $q(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_3 + x_2x_3$. Donner la forme polaire de $q$ et déterminer signature, rang et si elle est définie positive.

La forme polaire $b$ de $q$ est définie par

$$b(x,y) = x_1y_1 - 2x_2y_2 + \frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2).$$

La décomposition de Gauss en somme de carrés donne

$$\begin{aligned} q(x) &= (x_1 + x_3/2)^2 - x_3^2/4 - 2x_2^2 + x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_3/2)^2 - 2\left(x_2^2 - x_2x_3/2 + x_3^3/8\right) \\ &= (x_1 + x_3/2)^2 - 2\left((x_2 - x_3/4)^2 - x_3^2/16 + x_3^2/8\right) \\ &= (x_1 + x_3/2)^2 - 2(x_2 - x_3/4)^2 - x_3^2/8 \end{aligned}$$

donc $q$ est de signature $(1,2)$ et de rang 3. Puisque $q$ est de signature $(1,2)$, elle n'est ni définie, ni positive. Par exemple, $q(2,\sqrt{2},0) = 0$ montre que $q$ n'est pas définie et $q(-2,1,4) = -2$ montre que $q$ n'est pas positive.

**Exercice 3.** Soit $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel formé des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $C^1$ (dérivable et de dérivée continue), et soit $w : [0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On définit sur $E \times E$ une fonction $b$ (dépendant de $w$) par

$$b(f,g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)w^2(t)\,dt$$

(1) Vérifier que $b$ est symétrique et bilinéaire. Est-elle positive ? Est-elle définie ?

Pour tous $f, g \in E$

$$\begin{aligned} b(f,g) &= \int_0^1 f'(t)g'(t)w^2(t)\,dt \\ &= \int_0^1 g'(t)f'(t)w^2(t)\,dt \\ &= b(g,f) \end{aligned}$$

donc $b$ est symétrique. Puisque $b$ est symétrique, $b$ est bilinéaire si $b$ est linéaire en la première variable. Soient $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} b(\lambda f + g, h) &= \int_0^1 (\lambda f + g)'h'w^2\,dt \\ &= \int_0^1 (\lambda f' + g')h'w^2\,dt \\ &= \int_0^1 \lambda f'h'w^2 + g'h'w^2\,dt \\ &= \lambda \int_0^1 f'h'w^2\,dt \; + \int_0^1 g'h'w^2\,dt \\ &= \lambda b(f,h) + b(g,h) \end{aligned}$$

donc $b$ est bilinéaire. Pour tout $f \in E$, on a $f'^2 w^2 \geq 0$ d'où $b(f,f) = \int_0^1 f'^2 w^2\,dt \geq 0$, donc $b$ est positive. Si $f$ est la fonction constante $f(t) = 1$ pour tout $t \in [0,1]$, alors $f' = 0$ donc $b(f,f) = 0$, mais $f \neq 0_E$ donc $b$ n'est pas définie.

(2) Soit l'hypothèse (H) : *$w$ s'annule en un nombre au plus fini de points.*

(a) On suppose que (H) est vérifiée, déterminer le cône isotrope et le noyau de $b$.

Montrons que le cône isotrope et le noyau de $b$ sont formés des fonctions constantes, c'est-à-dire que $I(b) = N(b) = E_{\text{cst}} := \{f \in E \mid f(t) = f(0), \forall t \in [0,1]\}$. Notons que pour tout $f \in E$, $f'$ est continue sur $[0,1]$, ainsi que $f'^2 w^2$. Soit $f \in I(b)$, alors $0 = b(f,f) = \int_0^1 f'^2 w^2 \, dt$. Puisque $f'^2 w^2$ est une fonction continue positive d'intégrale nulle, il s'ensuit par un résultat classique d'analyse que $f'^2 w^2 = 0$, donc que $f'(t)w(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Soit $J \subset [0,1]$ l'ensemble fini (possiblement vide) des zéros de $w$. Puisque $w(t) \neq 0$ sur $[0,1] \setminus J$, il s'ensuit que $f'(t) = 0$ sur $[0,1] \setminus J$. L'ensemble $J$ étant fini et $f'$ continue, ceci implique que $f' = 0$ sur $[0,1]$. En effet, si $f'(t_0) \neq 0$ alors $f'(t) \neq 0$ sur un voisinage de $t_0$ par continuité, ce qui contredit la finitude de $J$. On déduit de $f' = 0$ que $f$ est constante, donc $I(b) \subset E_{\text{cst}}$. Réciproquement, il est clair que toute fonction constante est dans le cône isotrope, donc $I(b) = E_{\text{cst}}$. Puisque $b$ est une forme bilinéaire positive, un résultat du cours nous dit que $N(b) = I(b)$. On peut montrer directement que $N(b) = E_{\text{cst}}$ comme suit. On a toujours $N(b) \subset I(b) = E_{\text{cst}}$. D'autre part, si $c \in E_{\text{cst}}$ est constante, on a $b(f,c) = \int_0^1 f' 0 w^2 \, dt = 0$ pour tout $f \in E$ donc $c \in N(b)$, et donc $E_{\text{cst}} \subset N(b)$.

(b) Est-ce que (H) est nécessaire pour que le noyau de $b$ soit de dimension 1 ?

Observons d'abord que, quelque soit $w$, le noyau de $b$ contient $E_{\text{cst}}$ les fonctions constantes, puisque $b(f,c) = 0$ pour tous $f \in E$ et $c \in E_{\text{cst}}$. Comme $E_{\text{cst}} \approx \mathbb{R}$ par l'application $f \mapsto f(0)$, $\dim E_{\text{cst}} = 1$. Donc $\dim N(b) \geq 1$ et $\dim N(b) = 1$ si et seulement si $N(b)$ est formé exactement des constantes. La condition (H) n'est pas nécessaire pour que $\dim N(b) = 1$. On a également $\dim N(b) = 1$ si l'ensemble $J \subset [0,1]$ des zéros de $w$ est dénombrable. En effet on a $I(b) = E_{\text{cst}} = N(b)$ dans ce cas : si $f \in I(b)$, alors l'argument de la question (a) montre que $f' = 0$ sur $[0,1] \setminus J$. Si $f'(t_0) \neq 0$ alors $f'(t) \neq 0$ sur un voisinage de $t_0$ par continuité, ce qui contredit la dénombrabilité de $J$. Donc $f' = 0$ sur $[0,1]$, donc $f = c \in E_{\text{cst}}$.

(c) Soit $F \subset E$ le sous-espace vectoriel formé des fonctions nulles en 0. On suppose que (H) est vérifiée, montrer que $b$ restreinte à $F \times F$ est un produit scalaire.

Puisque (H) est vérifiée, on sait d'après (a) que $I(b) = E_{\text{cst}}$. On en déduit que $F \cap I(b) = \{0\}$ puisqu'une fonction constante nulle en 0 est identiquement nulle. Il s'ensuit que $b$ restreinte à $F \times F$ est définie. Puisqu'elle est bilinéaire, symétrique et positive, c'est un produit scalaire.

(3) On suppose que $w$ est nulle sur $[0,1/2]$ et affine sur $[1/2,1]$ telle que $w(1) = 1$. Déterminer le cône isotrope de $b$.

Montrons que le cône isotrope de $b$ est formé des fonctions $f \in E$ qui sont constantes sur $[1/2, 1]$. En effet, $f \in I(b)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} 0 = b(f,f) &= \int_0^1 f'^2 w^2 \, dt \\ &= \int_0^{1/2} f'^2 w^2 \, dt + \int_{1/2}^1 f'^2 w^2 \, dt \\ &= \int_{1/2}^1 f'^2 w^2 \, dt \end{aligned}$$

Comme $f'^2 w^2$ est continue positive sur $[1/2, 1]$, ceci équivaut à $f'^2 w^2 = 0$ sur $[1/2, 1]$ et donc à $f' = 0$ sur $]1/2, 1]$ puisque $w(t) > 0$ si $t > 1/2$.

(4) Soit $G \subset F$ le sous-espace vectoriel formé des fonctions polynomiales nulles en 0. Est-il possible que $b$ restreinte à $G \times G$ soit un produit scalaire si $w$ s'annule sur un intervalle ?

Oui. Considérons la fonction $w$ définie en (3). Soit $P \in G \cap I(b)$, alors $P$ est une fonction polynomiale nulle en 0 et constante sur $[1/2, 1]$. Une fonction polynomiale constante sur $[1/2, 1]$ est constante, et puisque $P(0) = 0$, on conclut que $P = 0$. Donc $G \cap I(b) = \{0\}$, ce qui signifie que $b$ restreinte à $G \times G$ est définie. C'est donc un produit scalaire.