université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2015/2016** **Parcours :** Licence de Mathématiques **UE :** Géométrie Différentielle (N1MA6011) **Date :** 18/03/2016 **Heure :** 8h30 **Durée :** 1h30 **Documents :** Non autorisés. **Calculette :** autorisée **Epreuve de Mr :** Bessières. **Sujet :** 1 page	**Collège ST**

Exercice 1 (Cours). (1) Soit A un arc géométrique et $p \in A$. Donner la définition de la bi-régularité de A, en fonction d'un paramétrage de A, et montrer qu'elle ne dépend pas du paramétrage.

(2) Montrer qu'une courbe régulière $f : I \to \mathbb{R}^n$ admet une paramétrisation par longueur d'arc. OU

(3) Soit $p, q \in \mathbb{R}^n$, on note $[p, q]$ le segment $[0, 1] \ni t \mapsto p + t(q - p)$. Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ une courbe régulière lisse joignant p à q. Montrer que $||q-p|| \leq L(\gamma)$ avec égalité si et seulement γ et $[p, q]$ sont équivalents.

(4) Donner l'énoncé du théorème de redressement des immersions.

(5) Donner un contre-exemple à ce que l'image d'une immersion soit une sous-variété (justifier).

(6) Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension d et $p \in M$. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ une submersion telle que $M = g^{-1}(\{0\}$. Montrer que l'espace tangent T_pM est égal à $\ker d_a g$.

Exercice 2. Soit $c : s \in \mathbb{R} \mapsto (x(s), y(s), z(s)) \in \mathbb{R}^3$ la courbe paramétrée donnée par :

$$\begin{cases} x(s) &= \frac{1}{2}\sin(s) \\ y(s) &= (\sin(s/2))^2 \\ z(s) &= \frac{\sqrt{3}}{2}s. \end{cases}$$

(1) Montrer que c est une courbe régulière paramétrée par longueur d'arc.

(2) Pour chaque $s \in \mathbb{R}$, calculer la courbure $K(s)$ et la torsion $T(s)$ de la courbe.

(3) Pour chaque $s \in \mathbb{R}$, donner explicitement le repère de Frenet $(t(s), n(s), b(s))$.

Exercice 3. Soit a, b, c trois nombres réels strictement positifs. On considère l'ellipsoide Σ d'équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

(1) Justifier que Σ est sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

(2) Soit L le demi-plan fermé de $\mathbb{R}^3$ défini par $y = 0$ et $x \geq 0$, V l'ouvert $\mathbb{R}^3 \setminus L$ (c'est-à-dire $\mathbb{R}^3$ privé de L), et $S = \Sigma \cap V$. Donner une paramétrisation $f : U \to S$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ définie par $f(A) = \det(A)$.

(1) Montrer que $f(I_n + hA) = 1 + htr(A) + o(h)$. En déduire la différentielle de f en l'identité, $d_{I_n} f(A)$.

(2) Soit M une matrice inversible. Déduire de la question précédente la différentielle de f en M, $d_M f(A)$.

(3) Montrer que $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}), \det M = 1\}$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ? Montrer que son espace tangent en I_n est l'ensemble $\{A \in M_n(\mathbb{R}), tr(A) = 0\}$.