UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2013/2014** **Licence de Mathématiques** **DS de Géométrie Différentielle (N1MA6011)** **Date : 04/03/2013 Heure : 9h30 Durée : 1h20** Documents : Non autorisés. Calculette homologuée : autorisée Epreuve de Mr : Bessières. Sujet : 1 page	Département DL Licence

Exercice 1. Démontrer que la courbure algébrique k de $f : I \to \mathbb{R}^2$ régulière lisse satisfait

$$k = \frac{\det(f', f'')}{||f'||^3}.$$

Exercice 2 (Courbes de $\mathbb{R}^2$). (1) Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ lisse paramétrée par longueur d'arc, telle que $g'(a) = g'(b)$.

a) Démontrer que la quantité

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b k(s)\ ds,$$

qu'on appelle *courbure totale*, appartient à $\mathbb{Z}$ (on pourra utiliser un résultat du cours).

b) Que vaut la courbure totale de $[0, 2\pi] \ni t \to (\cos t, \sin t)$?

(2) On considère maintenant $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ d'équation $f(t) = ae^{(b+i)t}$, où $a > 0$ et $b < 0$. *Note : on s'épargnera des calculs en utilisant les complexes.*

a) Montrer que la courbe intersecte une infinité de fois l'axe des x et que $||f(t)|| \to 0$ quand $t \to \infty$. Représenter grossièrement l'image de f.

b) Montrer que $||f'(t)|| \to 0$ quand $t \to \infty$ et calculer la longueur de f.

c) Démontrer que la courbure algébrique de f satisfait $k(t) > 0$ pour tout $t > 0$ puis que $k(t) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$.

d) Démontrer, sans utiliser la dernière assertion de c) que f est de courbure totale infinie.

Exercice 3 (Courbe gauche tracée sur une sphère). On suppose que $c : I \to \mathbb{R}^3$ est une courbe lisse trirégulière (courbure et torsion ne s'annullent pas) paramétrée par longueur d'arc. On note (τ, ν, β) le repère de Frenet au point de paramètre s, K la courbure et T la torsion. On suppose c tracée sur la sphère de centre O et de rayon r, c'est-à-dire que pour tout s dans I, $||\overrightarrow{Oc}(s)||^2 = r^2$.

(1) Montrer que $\tau(s)$ et $\overrightarrow{Oc}(s)$ sont orthogonaux.

(2) En déduire qu'il existe des fonctions C^∞ a et b de I dans $\mathbb{R}$ vérifiant
$\forall s \in I, a(s)^2 + b(s)^2 = r^2$ et
$\forall s \in I, \overrightarrow{Oc}(s) = a(s)\nu(s) + b(s)\beta(s)$.

(3) Dériver cette dernière équation ; en déduire a et b en fonction de K et T.

(4) En déduire que K et T vérifient

$$r^2 = (\frac{1}{K})^2 + ((\frac{1}{K})'\frac{1}{T})^2.$$