université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2014/2015** **Parcours :** Licence de Mathématiques **UE :** Géométrie et Topologie (N1MA6014) **Date :** 25/03/2015 **Heure :** 11h00 **Durée :** 1h30 **Documents :** Non autorisés. **Calculette :** autorisée **Epreuve de Mr :** Bessières. **Sujet :** 1 page	**Collège ST**

Exercice 1 (Question de cours)**.** Soit X un espace topologique et Y un ensemble.

(1) Définir la notion de variété de dimension m sur X

(2) Définir la notion d'atlas de dimension m sur Y.

(3) Préciser comment est définie la topologie de variété associée à un atlas sur Y. Montrer que c'est une topologie.

Exercice 2. On considère l'ensemble $Y \subset \mathbb{R}^2$ défini par $Y = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$.

(1) Montrer que $(Y, \mathscr{T})$, où $\mathscr{T}$ est la topologie induite, n'est pas une variété.

(2) Montrer que Y admet un atlas de 1-variété (indication : chercher un atlas à 3 cartes).

(3) Montrer que est Y admet un atlas de 1-variété, pour lequel il est homéomorphe à $Z =]0,1[\cup]2,3[\cup]4,5[\subset \mathbb{R}$ muni de la topologie induite.

Exercice 3. Soit $X = \{(x,n) \mid x \in [0,1], n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}^2$ et $Z = \{(x, x/n) \mid x \in [0,1], n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}^2$. On définit $g : X \to Z$ par $g(x,n) = (x, x/n)$.

(1) Représenter succintement X et Z.

(2) Montrer que g est surjective continue.
On définit un espace quotient X^* en identifiant tous les $(0,n)$ de X en un point, qu'on note $*$. On note $p : X \to X^*$ l'application quotient.

(3) Justifier que g passe au quotient en une bijection continue $f : X^* \to Z$.

(4) Montrer que Z n'est pas compact, en déduire que X^* n'est pas compact.

(5) Montrer que pour $\alpha > 0$, $p([0,\alpha[\times\{n\})$ n'est pas ouvert dans X^*, mais que si $\alpha_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$p\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} [0,\alpha_n[\times\{n\}\right)$$
est ouvert dans X^*.

(6) Montrer que f n'est pas un homéomorphisme (Indication : considérer la suite $x_n = (1/n, n)$ dans X, montrer que $f(x_n)$ converge mais pas $p(x_n)$).

(7) Montrer que X^* et Z ne sont pas homéomorphes.