Devoir Surveillé, durée 1h30

Exercice.

On rappelle que la *suspension* d'un espace topologique X est l'espace quotient

$$(X \times [-1,1])/\sim \quad \text{où} \quad \forall x, x' \in X, \begin{cases} (x,-1) & \sim & (x',-1) \\ (x,1) & \sim & (x',1) \end{cases}$$

Montrer que la suspension du cercle S^1 est homéomorphe à la sphère S^2.
(*On pourra factoriser une application convenable de* $S^1 \times [-1,1]$ *sur* S^2.)

Problème.

On note $\ell_2(\mathbb{R})$ l'espace de Hilbert des suites réelles (x_n) de carré sommable, muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ et de sa distance associée d. On se propose de montrer le résultat suivant, version faible du théorème de plongement de Withney :

Théorème 1. *Soit M une variété séparée à base dénombrable. Alors il existe un plongement $\phi : M \to \ell_2(\mathbb{R})$. En particulier M est métrisable.*

On rappelle qu'on plongement est un homéomorphisme $M \to \phi(M)$ où $\phi(M)$ est muni de la topologie induite. Un espace X est métrisable si sa topologie provient d'une distance sur X.

Pour simplifier on suppose M de dimension fixe $m \in \mathbb{N}^*$. Pour démontrer le théorème, établir les étapes suivantes :

(1) Tout point d'une variété admet une base de voisinages compacts et métrisables.

(*Rappel : une collection $\mathcal{V} = (V_i)$ de voisinages de x est une base de voisinages en x si pour tout ouvert $U \ni x$, il existe $V_i \in \mathcal{V}$, $x \in V_i \subset U$*)

(2) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base d'ouverts de M. Alors $B = \{U_n \,|\, \overline{U}_n \text{ est métrisable}\}$ est encore une base d'ouverts.

Quitte à renuméroter, on se ramène à $B = \{U_n\}$. Soit d_n une distance sur $\overline{U}_n$ compatible avec la topologie.

(3) La fonction $\phi_n : M \to [0,1]$, définie par $x \mapsto \min\{1, d_n(x, \partial U_n)\}$ si $x \in \overline{U}_n$, $\phi_n(x) = 0$ si $x \notin \overline{U}_n$, est continue sur M et non nulle sur U_n exactement.

(Rappel : si δ est une distance sur X et $A \subset X$ non vide, $\delta(x, A) = \inf\{\delta(x, y) \mid y \in A\}$ est continue en la variable $x \in X$; on convient que $\delta(x, \emptyset) = +\infty$) ; $\partial A = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$).

(4) La fonction $\phi : M \to \ell_2(\mathbb{R})$, $x \mapsto \left(\frac{\phi_n(x)}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et continue.

(5) ϕ est injective (*utiliser le fait que M est séparée*).

(6) $\phi : M \to \phi(M)$ est fermée.

(*On pourra établir que si $F \subset M$ est fermée, le complémentaire de $\phi(F)$ dans $\phi(M)$ est ouvert, en montrant que $d(\phi(x), \phi(F)) > 0$ si $x \notin F$, où d est la distance de $\ell_2(\mathbb{R})$*).

(7) Conclure.

(8) Question subsidiaire : à quelle situation correspond $\partial U_n = \emptyset$? Peut-on se ramener à $\partial U_n \neq \emptyset, \forall n$?