Corrigé du DS du 04/03/14

ex1 : Si g est paramétrée par longueur d'arc, on a $g' = \tau$ et $g'' = kn$ où (τ, n) est orthonormée directe, d'où $k = \det(g', g'')$. On écrit $f = g \circ \theta$, où $\theta' = \|f'\|$ et on a

$$f' = g'(\theta).\theta'$$
$$f'' = g''(\theta)\,\theta'^2 + g'(\theta).\theta''$$

d'où
$$\det(f', f'') = \det\left(g'(\theta).\theta', g''(\theta).\theta'^2 + \cancel{g'(\theta).\theta''}\right)$$
$$= \theta'^3 \det(g'(\theta), g''(\theta))$$
$$= \|f'\|^3 . k.$$

ex2 : (1) (a) D'après le cours il existe $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ lisse telle que $g' = e^{i\theta}$ et θ vérifie alors $\theta' = k$.

D'où $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_a^b k(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\left[\theta\right]_a^b = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$

car $g'(a) = e^{i\theta(a)} = e^{i\theta(b)} = g'(b) \iff \theta(b) = \theta(a)\ [2\pi]$.

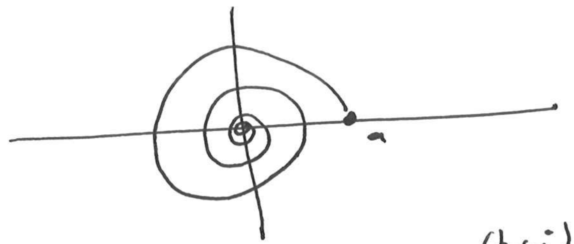
(1) (b) La courbure algébrique vaut 1, la courbure totale aussi.

Heuristiquement, la courbure totale est le nombre de tours (orientés) que fait le vecteur vitesse sur le cercle S^1.

(2) (a) La courbe intersecte l'axe des x $\iff$ $f(t) = ae^{bt}e^{it} \in \mathbb{R}$

$\iff$ $e^{it} \in \mathbb{R} \iff t = 0\ [\pi]$.

$\|f(t)\| = \|a e^{bt} e^{it}\| = a e^{bt} \|e^{it}\| = a e^{bt} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$ car $b < 0$.



(b) $\|f'(t)\| = \|a(b+i)e^{(b+i)t}\| = a\sqrt{b^2+1}\, e^{bt} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$.

La longueur est

$$\ell(f) = \int_0^\infty \|f'(t)\| dt = a\sqrt{b^2+1} \int_0^\infty e^{bt} dt = \frac{a\sqrt{b^2+1}}{b} \left[e^{bt}\right]_0^\infty = \frac{a\sqrt{b^2+1}}{-b}.$$

(c) On a $f''(t) = a(b+i)^2 e^{(b+i)t} = (b+i) f'(t)$.

D'après la formule rappellée en exercice 1,

$$k = \frac{\det(f', f'')}{\|f'\|^3} = \frac{\det(f', (b+i)f')}{\|f'\|^3}$$

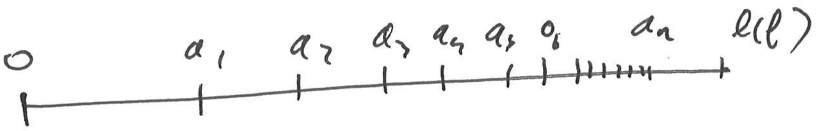
$$= \frac{\det(f', if')}{\|f'\|^3}$$

$$= \frac{\|f'\|^2}{\|f'\|^3}$$ puisque (f', if') est orthogonale directe

$$= \frac{1}{\|f'\|} > 0$$

et tend vers $+\infty$ d'après (b).

(d) Observons que $f'(t) = (b+i)\, f(t) = \lambda (b+i)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, lorsque $t = 0\ [\pi]$. De plus, $\lambda > 0$ si $t = 0\ [2\pi]$. Les vecteurs $f'(0), f'(2\pi)$, $f'(4\pi), \dots$ sont colinéaires positivement et en reparamétrant par longueur d'arc, on obtient un découpage de $[0, \ell(f)]$, $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$



en une infinité d'intervalles $[a_n, a_{n+1}]$ où $g'(a_n) = g'(a_{n+1})$. D'après 2 (a) et le fait que $k > 0$,

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} k(s)\,ds \in \mathbb{N}^*$$

d'où

$$\int_0^{\infty} k(s)\,ds = +\infty.$$

<u>ex)</u> (1) Observons que $\overrightarrow{Oc}(s) = c(s) - O$ et $c'(s) = \tau$.

On dérive $\langle \overrightarrow{Oc}, \overrightarrow{Oc} \rangle = r^2$

soit $2 \langle c'(s), \overrightarrow{Oc} \rangle = 0$.

et donc $\langle \tau, \overrightarrow{Oc} \rangle = 0$

(2) On pose $a(s) = \langle \overrightarrow{Oc}(s), \nu(s) \rangle$

$b(s) = \langle \overrightarrow{Oc}(s), \beta(s) \rangle$

et on écrit le vecteur $\overrightarrow{Oc}(s)$ dans le repère (τ, ν, β). Puisque $\langle \overrightarrow{Oc}, \tau \rangle = 0$, $\overrightarrow{Oc}$ est une combinaison linéaire de ν et β.

$$\overrightarrow{Oc} = a(s)\,\nu + b(s)\,\beta.$$

Puisque ν, β sont orthonormés,

$$\|\overrightarrow{Oc}\|^2 = a^2 + b^2.$$

(3) On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{Oc}\,' = c' = \tau &= a'\nu + a\nu' + b'\beta + b\beta' \\
&= a'\nu + a(-K\tau - T\beta) + b'\beta + b(T\nu) \\
&= (a' + bT)\,\nu + (b' - aT)\,\beta - aK\tau
\end{aligned}$$

$\left(\text{en utilisant les relations de Frenet} \quad \begin{aligned} \nu' &= -K\tau + T\beta \\ \beta' &= T\nu \end{aligned} \right)$

d'où $(1 + aK)\tau = (a' + bT)\,\nu + (b' - aT)\,\beta$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} 1 + aK = 0 \\ a' + bT = 0 \\ b' - aT = 0 \end{cases}$$

puisque (τ, ν, β) est une base.

On en déduit (K, T étant $\neq 0$)

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{K} \\ b = -\frac{a'}{T} = \left(\frac{1}{K}\right)' \frac{1}{T} \end{cases}$$

puis en utilisant $r^2 = a^2 + b^2$ que

$$r^2 = \left(\frac{1}{K}\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{K}\right)' \frac{1}{T}\right)^2 .$$