RÉSUMÉ DE COURS
4TMQ405U Algèbre bilinéaire et géométrie
Semestre 4, 2017-2018

LAURENT BESSIÈRES
Institut de Mathématiques de Bordeaux

13 avril 2018

Ceci constitue le résumé de cours (prévisionnel) de l'UE d'algèbre bilinéaire et géométrie. Il contient les définitions, exemples et résultats qui seront vus au cours du semestre. Il ne contient pas les démonstrations, qui seront faites en cours. Les démonstrations sont une partie essentielle d'un cours de mathématiques : c'est l'endroit où l'on joue avec les définitions des objets qu'on s'est données et où on les éprouve pour extirper des objets des propriétés supplémentaires. Vous êtes fortement encouragés à les travailler. Des démonstrations simples ou des parties de démonstration sont susceptibles d'être posées lors des contrôles.

Ce recueil contient également au fil des pages des exercices, sous forme de Vrai-Faux, qui sont en général des applications assez simples des définitions ou des résultats. Vous êtes très fortement encouragés à préparer ces exercices :

1) C'est un bon moyen de tester votre compréhension des notions de cours, et de la renforcer.
2) Certains de ces exercices seront posés en "Questions de cours" lors du DS et du DST (sur 3-4 points).

Table des matières

INTRODUCTION

Le but du cours est de faire de la géométrie sur des espaces vectoriels. Pour cela on enrichit la structure d'espace vectoriel d'une structure supplémentaire : un *produit scalaire*. On connaît déjà sur $E = \mathbb{R}^3$ le produit scalaire (canonique) défini par la formule

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \tag{1}$$

Il a comme propriétés d'être

(a) bilinéaire, c'est-à-dire linéaire en chaque argument :

$$\begin{array}{rcll} \langle x+y, z\rangle & = & \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle & \\ \langle \lambda x, y\rangle & = & \lambda \langle x, y\rangle & \forall x, y, z \in E \\ \langle x, y+z\rangle & = & \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle & \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \langle x, \lambda y\rangle & = & \lambda \langle x, y\rangle & \end{array}$$

(b) symétrique :

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \qquad \forall x, y \in E$$

(c) défini :

$$\forall x \in E, \quad \langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

(d) positif :

$$\forall x \in E, \quad \langle x, x\rangle \geq 0.$$

On peut imaginer d'autres formules que (1) vérifiant les propriétés a-b-c-d, par exemple $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3$. Plus généralement, un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E sera simplement une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$, vérifiant les axiomes a-b-c-d. Cette notion est valide pour des espaces vectoriels de dimension infinie : par exemple sur $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$, on pourra considérer le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

Le but du cours est donc de faire la théorie des produits scalaires. Il sera avantageux d'étudier séparément les 4 axiomes a-b-c-d. Le premier chapitre est consacré aux applications bilinéaires et symétriques (vérifiant a-b). Cette étude peut-être faite dans le cadre plus général d'un espace vectoriel sur un corps K, avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, l'application bilinéaire étant à valeurs dans K. Par contre, on ne parlera de produit scalaire que lorsque $K = \mathbb{R}$. En effet, l'axiome de positivité (d) ne fait sens à priori que lorsque $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$. [1].

1. On peut définir sur des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels un avatar du produit scalaire, qu'on appelle produit scalaire *hermitien*, mais les axiomes de bilinéarité et symétrie doivent être remplacés. Inspiré par le fait que $|z|^2 = z\bar{z}_i n\mathbb{R}_+$ lorsque $z \in \mathbb{C}$, on considère des applications $b : E \times E \to K$ linéaires sur la première variable et *semi-linéaires* sur la seconde ($b(x, \lambda y + z) = \bar{\lambda} b(x, y) + b(x, z)$), et hermitiennes ($b(x, y) = \overline{(b(y, x))}$). Ceci assure que $b(x, x) \in \mathbb{R}$.

Chapitre A : Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Dans ce chapitre, E est un espace vectoriel sur un corps K, où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (on dira simplement que E est un K-espace vectoriel).

A.1 Formes bilinéaires et formes quadratiques

A.1.1 Formes bilinéaires symétriques

Définition A.1. Une **forme bilinéaire** sur E est une application $b : E \times E \to K$ linéaire en chaque argument, c'est-à-dire telle que pour tous $x, y, z \in E$ et $\lambda \in K$,

$$b(\lambda x + y, z) = \lambda b(x, z) + b(y, z) \tag{A.2}$$

$$b(x, \lambda y + z) = \lambda b(x, y) + b(x, z) \tag{A.3}$$

On dit que b est **symétrique** si

$$\forall x, y \in E, \quad b(x, y) = b(y, x) \tag{A.4}$$

On dit que b est **définie** si

$$\forall x \in E, \quad b(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \tag{A.5}$$

Lorsque $K = \mathbb{R}$, b est **positive** si

$$\forall x \in E, \quad b(x, x) \geq 0. \tag{A.6}$$

Une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive est un **produit scalaire**.

Exemple A.7. 1) Sur $E = K^n$, $b(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$, où $a_{ij} \in K$. On peut vérifier que $a_{ij} = b(e_i, e_j)$ où $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base canonique de E. On en déduit que b est symétrique si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i, j, ce qu'on peut vérifier à vue sur les exemples. Plus généralement, sur tout espace vectoriel de dimension finie, toute forme bilinéaire s'écrira sous la forme

$b(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ via le choix d'une base (voir section A.2.1).

2) Sur $E = \mathbb{R}[X]$ ou $E = C([0,1],\mathbb{R})$, $b(P,Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)\,dt$ définit une forme bilinéaire symétrique positive non définie (considérer $P = 1$), et $b(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ définit un produit scalaire.

L'ensemble $\{b : E \times E \to K\} = K^{E\times E}$ des applications de $E \times E$ dans K, hérite de la structure de K-espace vectoriel de K si on le munit des lois $(b_1 + b_2)(x,y) := b_1(x,y) + b_2(x,y)$ et $(\lambda b)(x,y) := \lambda.b(x,y)$.

On définit les sous-ensembles $\mathcal{B}(\mathbf{E}) = \{b : E \times E \to K \text{ bilinéaire}\} \subset K^{E\times E}$ et $\mathcal{S}(\mathbf{E}) = \{b : E \times E \to K \text{ bilinéaire symétrique}\} \subset \mathcal{B}(E)$.

Proposition A.8. *Les espaces $\mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{S}(E)$ sont des sous-espaces vectoriels du K-espace vectoriel $\{b : E \times E \to K\}$.*

Autrement dit une combinaison linéaire de formes bilinéaires (resp. symétriques) d'un espace vectoriel est une forme bilinénaire (resp. symétrique) sur cet espace vectoriel.

A.1.2 Formes quadratiques et polarisation

Définition A.9. Une application $q : E \to K$ est une **forme quadratique** s'il existe une forme bilinéaire symétrique $b \in \mathcal{S}(E)$ telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = b(x,x)$.

En dimension finie, cela correspond donc aux applications de la forme $q(x) = \sum a_{ij} x_i x_j$. Une forme quadratique détermine complètement la forme bilinéaire symétrique dont elle est issue :

Lemme A.10 (Formule de polarisation). *Si b est une forme bilinéaire symétrique telle que $q(x) = b(x,x)$ pour tout $x \in E$, alors*

$$\forall x, y \in E, \qquad b(x,y) = \frac{1}{2}\Big(q(x+y) - q(x) - q(y)\Big). \tag{A.11}$$

En conséquence, b est unique, appelée **forme polaire** de q. Il suffit donc de connaitre une forme bilinéaire symétrique sur la diagonale de $E \times E$ pour la connaître partout. Par extension on dit que q est définie, resp. positive, si sa forme polaire b l'est.

Exercice A.12. On a aussi

$$b(x,y) = \frac{1}{4}\Big(q(x+y) - q(x-y)\Big). \tag{A.13}$$

Exemple A.14. 1) $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x) = x_1^2 - x_2x_3$. On peut trouver sa forme polaire via la formule de polarisation (A.11), ou ce qui est plus rapide en général en polarisant "à vue" : on remplace

$$\begin{aligned} x_i^2 &\leadsto x_iy_i \\ x_ix_j &\leadsto \frac{1}{2}(x_iy_j + x_jy_i) \end{aligned}$$

On trouve $b(x,y) = x_1y_1 - \frac{1}{2}(x_2y_3 + x_3y_2)$ (qui est bien bilinéaire et symétrique).

2) Soit $\ell : E \to K$ une forme linéaire (c'est-à-dire une application linéaire de E dans K), alors $q(x) = (\ell(x))^2$ définit une forme quadratique, de forme polaire $b(x,y) = \ell(x)\ell(y)$. Plus généralement, étant donnés $\ell_1, \dots, \ell_k$ des formes linéaires sur E, et $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$ des scalaires, la combinaison linéaire des carrés des formes linéaires

$$q(x) = \alpha_1\ell_1(x)^2 + \cdots + \alpha_k\ell_k(x)^2 \tag{A.15}$$

définit une forme quadratique sur E.

Remarque A.16. Réciproquement le théorème de réduction A.48 montrera que si $\dim E < +\infty$, toute forme quadratique sur E peut s'écrire sous la forme (A.15), avec de plus des formes linéaires $\ell_1, \dots, \ell_k$ linéairement indépendantes. On remarque que la positivité de q se voit sur les α_i.

On définit $\mathcal{Q}(\mathbf{E}) = \{q : E \to K \text{ forme quadratique}\}$. C'est un sous-espace vectoriel du K-espace vectoriel des applications de E dans K. L'application de $\mathcal{S}(E)$ dans $\mathcal{Q}(E)$ qui envoie b sur q vérifiant $q(x) = b(x,x)$ est clairement linéaire, surjective par définition, et injective d'après la formule de polarisation A.10. En conséquence,

Proposition A.17. *$\mathcal{S}(E)$ est isomorphe à $\mathcal{Q}(E)$.*

Exercice A.18. (VRAI-FAUX) Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

(a) Une produit de formes bilinéaires est une forme bilinéaire.

(b) Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux formes linéaires sur E, alors $q(x) = \ell_1(x)\ell_2(x)$ définit une forme quadratique.

(c) Si q est une forme quadratique sur E alors $q(\lambda x) = \lambda q(x)$.

(d) Une forme quadratique bornée (c'est-à-dire telle que $|q(x)| \leq C$ pour C indépendant de x) est nulle.

A.2 Formes bilinéaires en dimension finie

A.2.1 Représentation matricielle

On suppose E de dimension finie (donc isomorphe à K^n). Soit $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E, et soit $b \in \mathcal{B}(E)$. Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, alors par bilinéarité on obtient

$$\begin{aligned} b(x,y) &= b\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_i^n x_i\, b\left(e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) \\ &= \sum_i^n x_i \sum_{j=1}^n y_j b(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j b(e_i, e_j). \end{aligned} \tag{A.19}$$

La forme bilinéaire b est donc déterminée par les valeurs $b(e_i, e_j) \in K$.

Définition A.20. On appelle matrice de b dans la base e la matrice

$$M(b)_e = \begin{pmatrix} b(e_1,e_1) & b(e_1,e_2) & \cdots & b(e_1,e_n) \\ b(e_2,e_1) & & & \vdots \\ \vdots & & b(e_i,e_j) & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ b(e_n,e_1) & \cdots & \cdots & b(e_n,e_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$$

où $b(e_i, e_j)$ est le coefficient en ligne i et colonne j. C'est le coefficient de $x_i y_j$ dans l'expression (A.19).

Exemple A.21. Soit $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, définie par $b(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2 + 6x_2y_3 + 7x_3y_1 + 8x_3y_2 + 9x_3y_3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors $M(b)_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Notons $\mathcal{M}_e : \mathcal{B}(E) \to \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ l'application qui à $b \in \mathcal{B}(E)$ associe la matrice $M(b)_e$.

Proposition A.22. *L'application $\mathcal{M}_e : \mathcal{B}(E) \to \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ est un isomorphisme.*

Proposition A.23. *Soit $b \in \mathcal{B}(E)$. Sont équivalents :*

(1) b est symétrique,

(2) Il existe une base e de E telle que $M(b)_e$ soit symétrique,

(3) Dans toutes les bases, la matrice de b est symétrique.

Corollaire A.24. $\dim \mathcal{B}(E) = n^2$ *et* $\dim \mathcal{S}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.

La proposition suivante permet d'exprimer $b(x, y)$ en termes de produit matriciel. Etant donnés $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ deux éléments de E, on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M(x)_e$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M(y)_e$ les matrices $n \times 1$ formées des coordonnées (il est important de prendre des vecteurs colonnes). On rappelle que l'opérateur transposée ${}^t : \mathbb{M}_{p\times m}(K) \to \mathbb{M}_{m\times p}(K)$ associe à une matrice A sa transposée ${}^tA$, définie par $({}^tA)_{ij} = A_{ji}$. On a donc ${}^tX = \big(x_1, \ldots, x_n\big)$.

Proposition A.25. *Soient* $b \in \mathcal{B}(E)$ *et* $M = M(b)_e$. *Alors, pour tous* $x, y \in E$,

$$b(x, y) = \big(x_1, \ldots, x_n\big) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tX \cdot M \cdot Y, \tag{A.26}$$

où le produit est le produit matriciel. De plus, M *est la seule matrice qui vérifie cette identité pour tous* $x, y \in E$.

La formule est cohérente en termes de dimensions car la définition du produit matriciel implique que

$$\begin{array}{rcll} (p \times m) \cdot (m \times q) & = & p \times q, \text{ donc} & \\ (n \times n) \cdot (n \times 1) & = & n \times 1, & (\text{ matrice} \times \text{vecteur colonne} = \text{vecteur colonne}) \\ (1 \times n) \cdot (n \times 1) & = & 1 \times 1, & (\text{vecteur ligne} \times \text{vecteur colonne} = \text{scalaire}) \end{array}$$

Ainsi l'exemple A.21 s'écrit

$$\begin{aligned} b(x, y) &= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2 + 6x_2y_3 + 7x_3y_1 + 8x_3y_2 + 9x_3y_3 \\ &= x_1(y_1 + 2y_2 + 3y_3) + x_2(4y_1 + 5y_2 + 6y_3) + x_3(7y_1 + 8y_2 + 9y_3) \\ &= \big(x_1, x_2, x_3\big) \cdot \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ 4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \\ 7y_1 + 8y_2 + 9y_3 \end{pmatrix} \\ &= \big(x_1, x_2, x_3\big) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Proposition A.27 (Formule du changement de base). *Soient* $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *et* $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ *deux bases de* E, *et soit* $b \in \mathcal{B}(E)$. *Si on note* $P = P_{e\to e'}$ *la matrice de passage* *de e à e', $M = M(b)_e$ et $M' = M(b)_{e'}$, on a alors*

$$M' = {}^tPMP. \tag{A.28}$$

Rappel. Par définition $P_{e\to e'} = M(\mathrm{id})_{e'\to e}$ est la matrice de l'endomorphisme identité id : $E \to E$, de la base e' vers la base e. Elle a pour j-ème colonne les coordonnées de e'_j dans la base e, c'est-à-dire $M(e'_j)_e$. En particulier on a la relation $M(x)_e = M(id)_{e'\to e}M(x)_{e'}$, soit $X = PX'$. Plus généralement si E, E' et E'' sont des espaces vectoriels de bases e, e' et e'' respectivement, et si $f : E \to E'$ et $g : E' \to E''$ sont des applications linéaires, on a la relation fondamentale $M(g \circ f)_{e\to e''} = M(g)_{e'\to e''}M(f)_{e\to e'}$.

Remarque A.29. La formule (A.28) n'est pas celle de changement de bases de matrices d'endomorphismes, qui fait intervenir $P^{-1}MP$. En effet on a ${}^tP \neq P^{-1}$ en général (sauf à le faire exprès...). La formule ici est plus simple : il est plus facile de calculer la transposée d'une matrice que son inverse.

Exercice A.30. (Mis à jour le 23.01.2018)

(1) Soit $f : E \to E$ une application linéaire et soit $b \in \mathcal{B}(E)$. On pose pour tous $x, y \in E$, $b_1(x, y) = b(f(x), y)$ et $b_2(x, y) = b(x, f(y))$. Montrer que $b_i \in \mathcal{B}(E)$ et calculer $M(b_i)_e$ en fonction des matrices $M(b)_e$ et $M(f)_{e\to e}$, où e est une base de E.

(2) Soit $f : E \to E'$ une application linéaire et soit $b' \in \mathcal{B}(E')$. On pose pour tous $x, y \in E$, $b(x, y) = b'(f(x), f(y))$. Montrer que $b \in \mathcal{B}(E)$ et déterminer $M(b)_e$ en fonction de $M(b')_{e'}$ et $M(f)_{e\to e'}$, où e, e' sont des bases de E, E' respectivement.

A.2.2 Rang et noyau d'une forme bilinéaire

Soit b une forme bilinéaire sur E.

Définition A.31. On suppose E de dimension finie. On appelle **rang** de b le rang de la matrice de b dans une base quelconque e de E, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(b) = \mathrm{rg}(M(b)_e)$.

Cette définition fait sens car $\mathrm{rg}(M(b)_e) = \mathrm{rg}(M(b)_{e'})$ si e' est une autre base (ceci découle de la relation $M' = {}^tPMP$, où on multiplie M par des matrices inversibles).

Définition A.32. On appelle noyau de b le sous-espace vectoriel de E :

$$N(b) = \{y \in E \mid b(x, y) = 0, \forall x \in E\}.$$

On dit que b est **non dégénérée** lorsque $N(b) = \{0\}$.

Exercice A.33. Prouver que $N(b)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition A.34. *On suppose E de dimension finie, et soit e une base de E. Soit $\varphi : E \to K^n$ l'isomorphisme envoyant $x \in E$ sur ses coordonnées $M(x)_e = X \in K^n$ dans la base e, alors $\varphi(N(b)) = \ker M(b)_e$, soit encore*

$$x \in N(b) \Leftrightarrow X \in \ker M(b)_e.$$

Corollaire A.35 (Formule du rang). *Sous les mêmes hypothèses,*

(1) $\dim N(b) + \mathrm{rg}(b) = \dim E$,

(2) b est non dégénérée $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(b) = \dim E \Leftrightarrow \det M(b)_e \neq 0 \Leftrightarrow M(b)_e$ est inversible.

Par extension on appelle rang, resp. noyau, d'une forme quadratique q le rang, resp. noyau, de sa forme polaire.

Remarque A.36. On peut se demander si on peut associer à une forme bilinéaire b, via les matrices $M(b)_e$, une application linéaire $E \to E$ (dépendant de b mais pas de e) de sorte que rang et noyau de b soient le rang et noyau de cette application linéaire. Une tentative naive est d'associer à b l'endomorphisme $f : E \to E$ de matrice $M(f)_{e \to e} = M(b)_e$. Cela ne marche pas, car l'endomorphisme $f' : E \to E$ défini par $M(f')_{e' \to e'} = M(b)_{e'}$, est différent de f dès que ${}^tP \neq P^{-1}$ (où $P = P_{e \to e'}$).

Il existe bien un lien entre application bilinéaire et application linéaire, mais il est plus subtil. Il requiert la notion de dualité.

A.2.3 Dualité, accouplement canonique

Définition A.37. On appelle **dual** de E, et on note $E^* = \mathscr{L}(E, K)$, le K-espace vectoriel des formes linéaires sur K.

On associe à tout $b \in \mathcal{B}(E)$ une application linéaire $f_b \in \mathscr{L}(E, E^*)$ comme suit. On définit

$$\begin{aligned} f_b : E &\to E^* \\ y &\mapsto b_y \end{aligned} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} b_y : E &\to K \\ x &\mapsto b(x,y) \end{aligned} \quad \text{est la forme linéaire}$$

On peut vérifier que f_b est linéaire grâce à l'identité $b(x, y) = f_b(y)(x)$. Mieux, on peut vérifier (exercice) que l'application $\mathcal{B}(E) \ni b \mapsto f_b \in \mathscr{L}(E, E^*)$ est un isomorphisme, de réciproque $\mathscr{L}(E, E^*) \ni f \mapsto b \in \mathcal{B}(E)$, où $b(x, y) := f(y)(x)$.

Proposition A.38. *Avec les conventions ci-dessus,*

(1) $\mathrm{rg}(b) = \mathrm{rg}(f_b)$,

(2) $N(b) = \ker f_b$.

Pour démontrer 1) on rappelle la notion de base duale :

Définition A.39. **(Base duale)**. Soit $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base E. On appelle **base duale** de e la base $e^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ de E^*, où les $e_i^* : E \to K$ sont définies par $e_i^*(e_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$ (symboles de Kronecker).

On rappelle qu'on peut voir que e^* est libre en évaluant l'identité $0 = \lambda_1 e_1^* + \ldots + \lambda_n e_n^*$ sur les e_j. Par ailleurs, pour $\ell \in E^*$ et $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a $l(x) = \sum_{i=1}^n x_i \ell(e_i) = \sum_{i=1}^n e_i^*(x)\ell(e_i)$, donc $\ell = \sum_{i=1}^n \ell(e_i)e_i^*$, ce qui montre que e^* est génératrice. Ceci étant dit, l'égalité $f_b(e_j) = \sum \lambda_k e_k^*$ implique $\lambda_k = f_b(e_j)(e_k)$. L'égalité matricielle $(b(e_i, e_j)) = (f_b(e_j)(e_i))$ dit alors que $M(b)_e = M(f_b)_{e \to e^*}$, d'où l'égalité des rangs.

Exercice A.40. (VRAI-FAUX) Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

(a) $\mathrm{rg}(b_1 + b_2) = \mathrm{rg}(b_1) + \mathrm{rg}(b_2)$.

(b) $N(b_1) \cap N(b_2) \subset N(b_1 + b_2)$.

(c) $N(b_1) \cap N(b_2) = N(b_1 + b_2)$.

(d) Soient $f : E \to E^*$ linéaire, et e, e' deux bases de E. Alors
$$M(f)_{e' \to e'^*} = {}^t P_{e \to e'} M(f)_{e \to e^*} P_{e \to e'}.$$

A.3 Orthogonalité

A.3.1 Orthogonalité relativement à une forme bilinéaire symétrique

Soit $b \in \mathcal{S}(E)$ une forme bilinéaire symétrique.

Définition A.41. Deux vecteurs $x, y \in E$ sont b-**orthogonaux** si $b(x, y) = 0$. Une famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de vecteurs de E est b-**orthogonale** si $b(v_i, v_j) = 0$ pour tous $i \neq j$. La famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est b-**orthonormée** si $b(v_i, v_j) = \delta_i^j$.

S'il n'y a pas d'ambiguité on dit simplement que les vecteurs sont orthogonaux. Un vecteur peut être orthogonal à lui-même : par exemple pour $b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ définie par $b(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à lui-même.

Définition A.42. Soit $A \subset E$ une partie de E. On appelle **b-orthogonal** de A l'ensemble

$$A^{\perp} = \big\{y \in E \mid b(x,y) = 0,\ \forall x \in A\big\}.$$

Proposition A.43. *Si $A \neq \emptyset$, $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E, égal à* $(\mathrm{vect}A)^{\perp}$.

En conséquence, si F est un sous-espace vectoriel de E, de base $\{v_1, \ldots, v_k\}$, alors $F^{\perp} = \{v_1, \ldots, v_k\}^{\perp} = \{y \in E \mid b(v_i, y) = 0,\ \forall i\}$.

Proposition A.44. *Avec les conventions ci-dessus :*
(1) $\{0\}^{\perp} = E$,
(2) $E^{\perp} = N(b)$,
(3) Si $A \subset E$ est non vide, $N(b) \subset A^{\perp}$.

Définition A.45. On appelle **cône isotrope** de $b \in \mathcal{S}(E)$ (et de sa forme quadratique q) l'ensemble

$$I(b) = \{x \in E \mid b(x,x) = 0\} = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$$

Les vecteurs de $I(b)$ sont dits **vecteurs isotropes** de b (et de q).

Remarque A.46. Le cône isotrope n'est pas un sous-espace vectoriel en général. Par exemple, pour $b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ définie par $b(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$, $I(b)$ est la réunion de deux droites $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = \pm x_2\}$. Le cône est toujours invariant par dilatation : si $x \in I(b)$, alors $\lambda x \in I(b)$ pour tout $\lambda \in K$. On a toujours $N(b) \subset I(b)$.

Exercice A.47. (VRAI-FAUX) Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

(a) La somme de deux vecteurs isotropes d'une forme quadratique est un vecteur isotrope.

(b) Si $q(x) > 0$ et $q(y) > 0$, alors $q(x+y) > 0$.

(c) Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$, alors $b(x,y) = \ell_1(x)\ell_2(y)$ définit une forme bilinéaire dégénérée.

A.3.2 Existence de bases orthogonales, théorème de réduction

Le résultat important ci-dessous montre l'existence de bases orthogonales en dimension finie. Expliquons d'abord pourquoi c'est intéressant. Considérons E un K-espace vectoriel de dimension finie, $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E, et $b \in \mathcal{S}(E)$. Alors e est b-orthogonale si et seulement si la matrice de b dans la base e est diagonale :

$$M(b)_e = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}.$$

En inspectant les a_i on peut connaitre tout ce qu'il y à savoir sur b : son rang (nombre de $a_i \neq 0$), une base du noyau (les e_i tels que $a_i = 0$), si elle positive (tous les $a_i \geq 0$) et définie positive (tous les $a_i > 0$). On peut tirer ses informations également de l'écriture de la forme quadratique $q(x) = b(x, x)$ dans e :

$$q(x) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2,$$

écriture qui équivaut à l'orthogonalité de e.

Théorème A.48 (Théorème de réduction). *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0\}$, et soit $b \in \mathcal{S}(E)$ une forme bilinéaire symétrique. Il existe alors une base b-orthogonale $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E. Quitte à renuméroter les e_i, la matrice de b dans la base e est de la forme*

$$M(b)_e = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a_i \in K, a_i \neq 0 \\ r = \mathrm{rg}(b). \end{array}$$

Les vecteurs $e_{r+1}, \ldots, e_n$ sont isotropes et forment une base du noyau $N(b) = E^{\perp}$.

Remarque A.49. D'un point de matriciel, partant d'une matrice $M \in \mathbb{M}_{n \times n}(K)$ symétrique, on cherche une matrice P inversible telle que ${}^tPMP$ soit diagonale. Ce n'est pas le même problème que celui de la diagonalisation des matrices, où on veut que $P^{-1}MP$ soit diagonale (sauf si ${}^tP = P^{-1}$...).

Corollaire A.50. *Soit q une forme quadratique sur E, de rang r. Il existe une base q-orthogonale $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E et des scalaires $a_1, \ldots, a_r \in K$, $a_i \neq 0$, tels que si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ alors*

$$q(x) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_r x_r^2.$$

Exercice A.51. (VRAI-FAUX) Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

(a) Si ℓ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, alors $(x, y) \mapsto \ell(x)\ell(y)$ est définie positive.

(b) La somme de deux formes quadratiques définies positives est définie positive.

(c) Supposons que q n'a pas de vecteur isotrope. Alors q ou $-q$ est définie positive.

A.3.3 La méthode de Gauss de décomposition en carrés

Le théorème de réduction ne produit pas de base orthogonale explicite. La méthode de Gauss de decompositions en carrés permet de le faire. C'est un algorithme qui produit, à partir d'une forme quadratique

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \tag{A.52}$$

exprimée dans une base quelconque $e = \{e_1, \dots, e_n\}$, des formes linéaires indépendantes $\ell_1, \dots, \ell_n \in E^*$ telles que

$$q(x) = a_1 \ell_1^2(x) + \cdots + a_n \ell_n^2(x), \quad (a_i \in K)$$

Le changement de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \vdots \\ \ell_n(x) \end{pmatrix}$ donne alors une base q-orthogonale. L'idée de la méthode de Gauss est de transformer l'expression (A.52) pour faire apparaître des carrés. On utilise deux types d'amorces, reposant sur les identités bien connues :

$$(I) \qquad a^2 + 2ab = (a+b)^2 - b^2 \tag{A.53}$$

$$(II) \qquad ab = \frac{1}{4}\big((a+b)^2 - (a-b)^2\big) \tag{A.54}$$

Evidement, il ne sert à rien de faire apparaitre des carrés à tout va, sous peine d'obtenir une décomposition non libre. On s'arrange pour tuer une variable x_i au moins à chaque itération. Traitons 2 exemples, utilisant chacun une des amorces selon qu'il existe déjà dans (A.52) un x_i^2 ou non.

Exemple A.55. Soit $q(x) = x_1^2 - x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$. Puisqu'il y a un x_1^2 on va utiliser l'amorce (I) en regroupant tous les x_1 :

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 - x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3, \\ &= x_1^2 + 2x_1(x_2 - 2x_3) \underbrace{- x_2^2 + 6x_3^2 - 8x_2x_3}_{\text{il n'y a plus de } x_1}. \end{aligned}$$

On a par (A.53), avec $a = x_1$ et $b = x_2 - 2x_3$,

$$\begin{aligned} q(x) &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - (\underbrace{x_2 - 2x_3}_{\text{il n'y a plus de } x_1})^2 - x_2^2 + 6x_3^2 - 8x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 \underbrace{- (x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2) - x_2^2 + 6x_3^2 - 8x_2x_3}_{\text{il n'y a plus de } x_1} \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - 2\left[x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2\right] \qquad (\text{ amorce (I) sur tous les } x_2) \\ &= (\underbrace{x_1 + x_2 - 2x_3}_{\ell_1(x)})^2 - 2\left[(\underbrace{x_2 + x_3}_{\ell_2(x)})^2 - 2(\underbrace{x_3}_{\ell_3(x)})^2\right] \end{aligned}$$

Vérifions que $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ est libre. Par construction ℓ_2 est nulle sur vect$\{e_1\}$ puisque ne contient pas la variable x_1, et ℓ_3 est nulle sur vect$\{e_1, e_2\}$. D'un autre coté, ℓ_i n'est pas nulle sur vect$\{e_i\}$, pour $i = 1, 2, 3$. En évaluant l'identité $0 = \lambda_1\ell_1 + \lambda_2\ell_2 + \lambda_3\ell_3$ sur les vecteurs e_1, e_2, e_3 successivement, on obtient alors $0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, prouvant que la famille $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ est libre dans E^*.

Remarque A.56. La décomposition obtenue n'est pas unique, car on aurait pu choisir de faire la première itération sur la variable x_2, ou la variable x_3. Il peut arriver également que le nombre de formes linéaires indépendantes obtenues soit strictement inférieur à la dimension de l'espace, c'est-à-dire qu'on peut aboutir à $q = a_1\ell_1^2 + \ldots + a_k\ell_k^2$, avec $k < n$. (c'est même sûr si $\mathrm{rg}(q) < n$ car on a alors $k = rg(q)$). Au besoin, on pourra toujours compléter $\{\ell_1, \ldots, \ell_k\}$ en une base $\{\ell_1, \ldots, \ell_k, \ell_{k+1}, \ldots, \ell_n\}$ de E^*, et écrire $q = a_1\ell_1^2 + \ldots + a_k\ell_k^2 + 0\ell_{k+1}^2 + \ldots + 0\ell_n^2$.

Exemple A.57. Soit $q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2x_3$ dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$.

On veut utiliser l'amorce (II), mais elle doit manger tous les termes en x_1 et x_2 (dans cette itération, on tue deux variables d'un coup). On doit donc préparer l'amorce. On le fait avec la formule

$$(II') \qquad \begin{aligned} ab + a\phi_1 + b\phi_2 &= \underbrace{(a+\phi_2)}_{A}\underbrace{(b+\phi_1)}_{B} - \phi_1\phi_2 \\ &= \frac{1}{4}\Big(\underbrace{(a+b+\phi_1+\phi_2)}_{A+B}{}^2 - \underbrace{(a-b+\phi_2-\phi_1)}_{A-B}{}^2\Big) - \phi_1\phi_2 \end{aligned}$$

où on a utilisé (A.54) sur AB. On a donc

$$\begin{aligned} q(x) &= 5\left(x_1x_2 + x_1\frac{6x_3}{5} + x_2\frac{3x_3}{5}\right) \\ &= 5\underbrace{\left(x_1 + \frac{3x_3}{5}\right)}_{A}\underbrace{\left(x_2 + \frac{6x_3}{5}\right)}_{B} - 5\underbrace{\frac{6x_3}{5}\frac{3x_3}{5}}_{\text{il n'y a plus de } x_1, x_2} \\ &= \frac{5}{4}\Big(\underbrace{x_1 + x_2 + \frac{9}{5}x_3}_{A+B=\ell_1(x)}\Big)^2 - \frac{5}{4}\Big(\underbrace{x_1 - x_2 - \frac{3}{5}x_3}_{A-B=\ell_2(x)}\Big)^2 - \frac{18}{5}(\underbrace{x_3}_{\ell_3(x)})^2 \end{aligned}$$

Par construction, ℓ_3 est nulle sur vect$\{e_1, e_2\}$ mais par sur vect$\{e_3\}$, ℓ_1 est nulle sur vect$\{e_1 - e_2\}$ mais pas sur vect$\{e_1 + e_2\}$, et ℓ_2 est nulle sur vect$\{e_1 + e_2\}$ mais pas sur vect$\{e_1 - e_2\}$. En évaluant $0 = \lambda_1\ell_1 + \lambda_2\ell_2 + \lambda_3\ell_3$ sur $e_1 + e_2$, $e_1 - e_2$ et e_3, on obtient que $\lambda_i = 0$ pour $i = 1, 2, 3$, prouvant que $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ est libre.

Méthode générale Soit E un K-espace vectoriel de dimension n, et q une forme quadratique sur E, non nulle. Dans une base $e = \{e_1, \cdots, e_n\}$, on peut écrire

$$q(x) = \sum_{i \leq j}^{n} a_{ij} x_i x_j \; = \sum_{i}^{n} a_{ii} x_i^2 \; + \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j.$$

Il y a 2 cas possibles : Cas 1 : il existe i tel que $a_{ii} \neq 0$. Quitte à renuméroter, on suppose $a_{11} \neq 0$. On regroupe tous les termes contenant x_1 :

$$\begin{aligned}
q(x) &= a_{11} x_1^2 \; + \; x_1 \underbrace{\sum_{2 \leq j} a_{1j} x_j}_{\ell(x)} + \underbrace{\sum_{2 \leq i \leq j} a_{ij} x_i x_j}_{q_2(x)} \\
&= a_{11} \left(x_1^2 + x_1 \frac{\ell(x)}{a_{11}} \right) \quad + \quad q_2(x) \\
&= a_{11} \left(\underbrace{x_1 + \frac{\ell(x)}{2a_{11}}}_{\ell_1(x)} \right)^2 \underbrace{- \frac{\ell(x)^2}{4a_{11}} + q_2(x)}_{q_3(x)} \\
&= a_{11} \ell_1^2(x) \; + \; q_3(x)
\end{aligned}$$

où q_3 est une forme quadratique nulle sur $\mathrm{vect}\{e_1\}$ puisque $\ell(x)$ et $q_2(x)$ ne dependent pas de x_1. On recommence avec q_3, qui restreinte à $\mathrm{vect}\{e_2, \ldots, e_n\}$, devient une forme quadratique sur un espace de dimension $n-1$.

Cas 2 $a_{ii} = 0$ pour tout i. Puisque $q \neq 0$ il existe $a_{ij} \neq 0$ et on peut supposer $a_{12} \neq 0$. On regroupe tous les termes en x_1 et x_2 :

$$q(x) \;=\; a_{12} x_1 x_2 \; + \; x_1 \underbrace{\sum_{3 \leq j} a_{1j} x_j}_{\phi_1(x)} + x_2 \underbrace{\sum_{3 \leq j} a_{1j} x_j}_{\phi_2(x)} + \underbrace{\sum_{3 \leq i < j} a_{ij} x_i x_j}_{q_2(x)}$$

On remarque que ϕ_1, ϕ_2 et q_2 sont nulles sur $\mathrm{vect}\{e_1, e_2\}$.

$$\begin{aligned}
q(x) &= a_{12} \left(x_1 x_2 \; + \; x_1 \frac{\phi_1}{a_{12}} + \; x_2 \frac{\phi_2}{a_{12}} \right) + q_2(x) \\
&= a_{12} \left(x_1 \; + \frac{\phi_2}{a_{12}} \right) \left(x_2 \; + \frac{\phi_1}{a_{12}} \right) - \frac{\phi_1 \phi_2}{a_{12}} + q_2(x) \\
&= \frac{a_{12}}{4} \left(\underbrace{x_1 + x_2 + \frac{\phi_2 + \phi_1}{a_{12}}}_{\ell_1(x)} \right)^2 - \frac{a_{12}}{4} \left(\underbrace{x_1 - x_2 + \frac{\phi_2 - \phi_1}{a_{12}}}_{\ell_2(x)} \right)^2 + q_3(x) \\
&= \frac{a_{12}}{4} \ell_1^2(x) \; - \; \frac{a_{12}}{4} \ell_2^2(x) \; + q_3(x)
\end{aligned}$$

où q_3 est une forme quadratique nulle sur $\mathrm{vect}\{e_1, e_2\}$. On recommence avec q_3. Un raisonnement par récurrence montre que :

Proposition A.58. *La méthode de Gauss décompose q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.*

Déduction de la base orthogonale

On suppose que $q = \alpha_1 \ell_1^2 + \cdots + \alpha_n \ell_n^2$, où $\{\ell_1, \cdots, \ell_n\}$ est libre dans E^* (au besoin, on a complété la famille libre produite par la méthode de Gauss en une base de E^*). On pose le changement de variable $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \vdots \\ \ell_n(x) \end{pmatrix}$, où les $\ell_i(x)$ sont exprimées en fonction des coordonnées de x dans la base e. Puisque $q(x) = \alpha_1 {x'_1}^2 + \cdots + \alpha_n {x'_n}^2$, la base $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ de E correspondante à ces coordonnées est q-orthogonale. L'identité $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$ nous dit que $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1}_{e\to e'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, qu'on inverse en $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P_{e\to e'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$.
(le fait que les formes linéaires ℓ_i soient indépendantes équivaut à l'inversibilité de la matrice). Les vecteurs colonnes de $P_{e\to e'}$ donnent alors les coordonnées de e' par rapport à e.

Exemple A.59. On poursuit l'exemple A.55, la méthode de Gauss a donné

$$q(x) = (\underbrace{x_1 + x_2 - 2x_3}_{x'_1})^2 - 2\left[(\underbrace{x_2 + x_3}_{x'_2})^2 - 2(\underbrace{x_3}_{x'_3})^2\right]$$

qui conduit à $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & +x_2 & -2x_3 \\ & x_2 & +x_3 \\ & & x_3 \end{pmatrix} = P^{-1}_{e\to e'} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. On inverse le système (ou la matrice) en

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & -x'_2 & -3x'_3 \\ & x'_2 & -x'_3 \\ & & x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = P_{e\to e'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

d'où $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e'_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dans la base e.

A.4 Classification des formes quadratiques en dimension finie

Une part des mathématiques consiste à classifier les objets mathématiques, c'est-à-dire à les regrouper en familles ayant des propriétés communes. Concernant les formes quadratiques d'un espace vectoriel E, on peut définir sur $\mathcal{Q}(E)$ une relation d'équivalence en demandant que $q_1 \sim q_2$ s'il existe un isomorphisme $f : E \to E$ tel que $q_2(f(x)) = q_1(x)$ pour tout $x \in E$.

(Exercice : vérifier que cela définit une relation d'équivalence.) Il est clair que f envoie $N(q_1)$ sur $N(q_2)$, que $\mathrm{rg}(q_1) = \mathrm{rg}(q_2)$, que f envoie une base q_1-orthogonale sur une base q_2-orthogonale, et plus généralement q_1 et q_2 auront les mêmes propriétés, du moment que celles-ci sont invariantes par isomorphisme. Il s'agit donc de trouver les classes d'équivalence de cette relation, de les décrire, et de trouver dans chaque classe un représentant plus joli que les autres, où propriétés et calculs sont plus simples.

On suppose E de dimension finie. On distingue les cas $K = \mathbb{C}$ et $K = \mathbb{R}$. Lorsque $K = \mathbb{C}$, la classe d'une forme quadratique sera déterminée par son rang. Lorsque $K = \mathbb{R}$, elle sera déterminée par un couple d'entiers (p_+, p_-) appelée la *signature* (cf section A.4.2).

A.4.1 Classification des formes quadratiques sur les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

Théorème A.60. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soit q une forme quadratique sur E de rang $\mathrm{rg}(q) = r$. Il existe alors une base q-orthogonale $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ de E telle que si $x = \sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i$,*

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2, \qquad M(b)_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Fixons e une base de E et notons q_r la forme quadratique s'écrivant $q_r(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2$ dans la base e. Alors que q est équivalente à q_r si et seulement si $\mathrm{rg}(q) = r$. La nécessité est claire. Réciproquement si $\mathbb{R}^q(q) = r$, soit ε une base q-orthonormée donnée par le théorème A.60, et $f : E \to E$ l'isomorphisme envoyant ε sur e, alors

$$\begin{aligned} q_r(f(x)) &= q_r\left(f\left(\sum x_i\varepsilon_i\right)\right) = q_r\left(\sum x_i f(\varepsilon_i)\right) = q_r\left(\sum x_i e_i\right) && \text{(A.61)} \\ &= x_1^2 + \dots + x_r^2 = q\left(\sum x_i\varepsilon_i\right) = q(x). && \text{(A.62)} \end{aligned}$$

Corollaire A.63. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Deux formes quadratiques sur E sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

A.4.2 Classification des formes quadratiques sur les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels (théorème de Sylvester)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et soit $q \in \mathcal{Q}(E)$ de forme polaire b. On dit que q est négative si $q(x) \leq 0$ pour tout $x \in E$.

Définition A.64. On appelle **signature** de b (et de q) le couple d'entiers (p_+, p_-) tel que

$$\begin{aligned} p_+ &= \max\{\dim(F)\ ;\ F \subset E \text{ sev tel que } q_{|F} \text{ soit définie positive}\} \\ p_- &= \max\{\dim(F)\ ;\ F \subset E \text{ sev tel que } q_{|F} \text{ soit définie négative}\} \end{aligned}$$

Observons que q est définie positive et définie négative sur $F = \{0\}$ donc l'ensemble des sous-espaces vectoriels sur lesquels q est définie positive, resp. définie négative, est non vide. La signature est donc bien définie. Si q est définie positive sur F_+ et définie négative sur F_-, alors $F_+ \cap F_- = \{0\}$, les deux espaces sont donc en somme directe. En conséquence $p_+ + p_- \leq n$.

Théorème A.65 (Théorème d'inertie de Sylvester). *Soit q une forme quadratique sur E de signature (p_+, p_-), et soit e une base q-orthogonale de E. Alors $M(b)_e$ est diagonale avec sur la diagonale p_+ termes strictements positifs, p_- termes strictement négatifs et $n - p_+ - p_-$ zéros. Le rang de q est $p_+ + p_-$.*

Corollaire A.66. *Soit q une forme quadratique sur E de signature $(p, r-p)$. Il existe alors une base q-orthogonale $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ de E telle que si $x = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$,*

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2, \qquad M(b)_\varepsilon = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

où I_p est la matrice identité de dimension p, 0_{n-r} la matrice nulle de dimension $n-r$. Si q est définie positive, $p = n$ et ε est q-orthonormée.

Corollaire A.67. *Deux formes quadratiques sur E sont équivalentes si et seulement si elles ont même signature.*

En particulier les produits scalaires de E, qui sont les formes quadratiques de signature $(n, 0)$, sont équivalents entre eux.

Remarque A.68. Il existe donc des décompositions q-orthogonales $E = F_+ \oplus F_- \oplus N(q)$, où q est définie positive sur F_+ et définie négative sur F_-. On peut vérifier en considérant $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ sur $\mathbb{R}^2$ qu'une telle décomposition n'est pas unique.

Exercice A.69. (VRAI-FAUX) Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

(a) La signature de la forme quadratique $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2)$ sur $\mathbb{R}^3$ est $(3, 0)$.

(b) Soit $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$ telle qu'il existe deux droites d_1 et d_2 en somme directe telles que q soit définie positive sur d_1 et sur d_2. Alors q est définie positive.

(c) Soit $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$ telle qu'il existe deux droites d_1 et d_2 en somme directe telles que q soit définie positive sur d_1 et définie négative sur d_2. Alors q est de signature $(1,1)$.

(d) La somme de deux formes quadratiques de signature $(1,1)$ est une forme quadratique de signature $(1,1)$.

A.5 Formes quadratiques positives, Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

Dans cette section E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Proposition A.70. *Si q est une forme quadratique définie, elle est positive ou négative.*

Théorème A.71 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit q une forme quadratique positive sur E, et b sa forme polaire. Alors pour tous $x, y \in E$,*

$$b^2(x,y) \leq q(x)q(y) \tag{A.72}$$

Si de plus q est définie, l'égalité est vraie si et seulement si x et y sont colinéaires.

Corollaire A.73. *Soit q une forme quadratique positive, alors $I(q) = N(q)$ et q est définie si et seulement si elle est non dégénérée.*

Proposition A.74 (Inégalité de Minkowski). *Soit q une forme quadratique positive sur E, alors*

$$\forall x, y \in E, \quad \sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)} \tag{A.75}$$

Chapitre B : espaces euclidiens et pré-hilbertiens

Dans tout ce chapitre E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

B.1 Produit scalaire, norme, distances euclidiennes

On rappelle qu'un **produit scalaire** sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Définition B.1. Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit **euclidien** s'il est de dimension finie, et **pré-hilbertien** sinon. La **norme euclidienne** associée à un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie par $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Exemple B.2. (1) $(\mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \sum x_i y_i)$ est euclidien.

(2) $(\mathbb{R}[X], \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt)$ est pré-hilbertien.

(3) $\ell^2(\mathbb{R}) = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^2 < \infty\}$ l'espace des suites réelles de carré sommable, est pré-hilbertien muni de $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$. Cette somme est bien définie car $2 \sum_{i=n}^m |x_i y_i| \leq \sum_{i=n}^m |x_i|^2 + |y_i|^2$ montre que la suite $n \mapsto \sum_{i=0}^n x_i y_i$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc converge.

Proposition B.3. *Tout norme euclidienne est une norme, c'est-à-dire satisfait, pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, \tag{B.4}$$

$$\|\lambda x\| \quad = \quad |\lambda| \|x\|, \tag{B.5}$$

$$\|x + y\| \quad \leq \quad \|x\| + \|y\|. \tag{B.6}$$

Proposition B.7. *Une norme est euclidienne si et seulement si elle vérifie* **l'identité du parallélogramme**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \qquad \forall x, y \in E \tag{B.8}$$

`Preuve:` Si la norme est euclidienne, on a par bilinéarité et symétrie, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$ et $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$, d'où en additionnant l'identité du parallélogramme. Reciproque en exercice de TD. □

On peut vérifier que la norme L^1, $||(x_1, x_2)||_1 = |x_1| + |x_2|$ sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas euclidienne.

Proposition B.9. *Toute norme sur un espace vectoriel définit une distance par la formule* $d(x,y) = \|x-y\|$. *On appelle* **distance euclidienne** *une distance ainsi obtenue.*

Soient x, y deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien. On a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\|y\|} \leq 1$. Il existe donc un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$.

Définition B.10. On appelle θ **l'angle non orienté** entre x et y, noté $\theta = \sphericalangle(x,y) = \arccos(\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|})$.

Théorème B.11 (Pythagore généralisé). *Soient x, y deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien ou pré-hilbertiens, alors*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \ + 2\cos(\sphericalangle(x,y))\|x\|\|y\|,$$

et en particulier $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ *si* $x \perp y$.
Si $u_1, \dots, u_k$ sont deux à deux orthogonaux $\|u_1 + \cdots + u_k\|^2 = \|u_1\|^2 + \cdots + \|u_k\|^2$.

Théorème B.12 (Toute forme linéaire sur un espace euclidien est le produit scalaire avec un vecteur). *Soit E un espace euclidien. Alors l'application $a \mapsto a^\flat$ de E dans E^*, qui associe à $a \in E$ la forme linéaire $a^\flat : x \mapsto \langle x, a\rangle$, est un isomorphisme.*

Remarque B.13. En conséquence, pour toute forme linéaire ℓ sur E il existe un unique $a \in E$ tel que $\ell(x) = \langle x, a\rangle$ pour tout $x \in E$. On note $a = \ell^\sharp$. Les applications $\flat : E \to E^*, a \mapsto a^\flat$ et $\sharp : E^* \to E, \ell \mapsto \ell^\sharp$, sont appelés **isomorphismes musicaux**. Ils ne dépendent pas d'un choix de bases sur E et E^* (mais dépendent du produit scalaire).

Exercice B.14. Si $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base orthonormée de E euclidien et $e^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ est sa base duale, alors $e_i^\flat = e_i^*$.

B.2 Orthogonalité

B.2.1 Bases orthogonales, orthogonalisation de Gram-Schmidt

Proposition B.15. *Dans un espace euclidien ou pré-hilbertien, toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.*

En divisant les vecteurs par leur norme on obtient une famille orthonormée. Il découle du corollaire A.66 que :

Théorème B.16 (Théorème fondamental des espaces euclidiens). *Tout espace euclidien admet une base orthonormée.*

Remarque B.17. Si $e = \{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base orthonormée de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, alors

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle \sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j \rangle = \sum_{i,j} x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_i x_i y_i = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

Autrement dit, à isomorphisme près (celui qui associe à x ses coordonnées dans une base orthonormée), il n'y a qu'un espace euclidien de dimension n : $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Entre deux espaces euclidiens E, F de dimension n, il existe donc un isomorphisme $f : E \to F$ tel que pour tous $x, y \in E$,

$$\langle x, y \rangle_E = \langle f(x), f(y) \rangle_F.$$

Pour les produits scalaires, il existe une autre méthode que la méthode de Gauss A.3.3 pour construire effectivement des bases orthogonales.

Proposition B.18 (Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt). *Soit E un espace euclidien ou pré-hilbertien, $(e_n)_n$ une famille (finie ou dénombrable) <u>libre</u> de vecteurs. Alors il existe une unique famille orthogonale $(u_n)_n$ telle que pour tout k,*

(1) $\mathrm{vect}\{e_1, \ldots, e_k\} = \mathrm{vect}\{u_1, \ldots, u_k\}$.

(2) La matrice de passage de $(e_1, \ldots, e_k)$ à $(u_1, \ldots, u_k)$ est triangulaire supérieure idempotente (la diagonale est constituée de 1).

Corollaire B.19. *Sous les mêmes hypothèses, il existe une unique famille orthonormée* $(\varepsilon_n)_n$ *telle que pour tout* k *,* $\mathrm{vect}\{e_1,\dots,e_k\} = \mathrm{vect}\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k\}$ *et* $\langle e_k, \varepsilon_k\rangle > 0$.

Remarque B.20. Puisque $\varepsilon_k \in \mathrm{vect}\{e_1,\dots,e_k\} = \mathrm{vect}\{u_1,\dots,u_k\}$, et est orthogonal à $\mathrm{vect}\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{k-1}\} = \mathrm{vect}\{e_1,\dots,e_{k-1}\} = \mathrm{vect}\{u_1,\dots,u_{k-1}\}$, on a nécessairement $\varepsilon_k = \pm\frac{u_k}{\|u_k\|}$, d'où l'unicité.

`Preuve:` (Orthogonalisation) On construit $(u_n)_n$ par récurrence. On pose $u_1 = e_1$. Ayant défini $u_1,\dots,u_k$ satisfaisant 1) et 2), on cherche un vecteur $u_{k+1} \in \mathrm{vect}\{e_1,\dots,e_{k+1}\}$, orthogonal à $\mathrm{vect}\{u_1,\dots,u_k\}$ et dont la composante sur e_{k+1} est 1. Le fait que $u_{k+1} \in \mathrm{vect}\{e_1,\dots,e_{k+1}\}$ impliquera que la matrice de passage soit triangulaire supérieure.

Pour définir u_{k+1} il suffit de retrancher à e_{k+1} sa contribution sur $\mathrm{vect}\{u_1,\dots,u_k\}$. Posant $\varepsilon_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$ pour $i \in \{1,\dots,k\}$, la famille $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k\}$ est une base orthonormée de $\mathrm{vect}\{u_1,\dots,u_k\}$. On pose donc

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= e_{k+1} - \langle e_{k+1}, \varepsilon_1\rangle\varepsilon_1 - \dots - \langle e_{k+1}, \varepsilon_k\rangle\varepsilon_k \\ &= e_{k+1} - \langle e_{k+1}, u_1\rangle\frac{u_1}{\|u_1\|^2} - \dots - \langle e_{k+1}, u_k\rangle\frac{u_k}{\|u_k\|^2} \end{aligned}$$

En effet, en cherchant $u_{k+1} = e_{k+1} + \lambda_1\varepsilon_1 + \ldots + \lambda_k\varepsilon_k \perp \varepsilon_i$, on trouve $0 = \langle u_{k+1}, \varepsilon_i\rangle = \langle e_{k+1}, \varepsilon_i\rangle + \lambda_i$ d'où les coefficients ci-dessus. □

Remarque B.21. Si $(e_n)_n$ est une famille libre d'un espace euclidien ou pré-hilbertien, et $F = \mathrm{vect}\{e_1,\dots,e_k\}$ un sous-espace vectoriel de E, l'orthogonalisation de Gram-Schmidt produit une famille orthogonale $(u_n)_n$ telle que $\{u_1,\dots,u_k\}$ est une base orthogonale de F, ce qu'on n'obtient pas à priori par la méthode de Gauss. En particulier, on peut compléter une base orthogonale d'un sous-espace F d'un espace euclidien en une base orthogonale de l'espace.

Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ dans une base orthonormée, alors $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ par Pythagore généralisé. Ceci se généralise à des sommes infinies, avec quelques précautions.

Proposition B.22. *Soit* E *un espace pré-hilbertien,* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille orthonormée de* E.

(1) (inégalité de Bessel) pour tout $x \in E$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \langle x, e_i\rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

(2) Si $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i e_i$, *(au sens que* $\|x - \sum_{i=0}^n x_i e_i\| \to 0$ *quand* $n \to \infty$, *où* $x_i \in \mathbb{R}$*), alors* $x_i = \langle x, e_i\rangle$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}$ *et*

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 = \|x\|^2.$$

Remarque B.23. Une famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que tout $x \in E$ s'écrive $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i e_i$ est appelée **base hilbertienne** de E. Ce n'est pas à priori une base au sens classique, où on demande que tout x soit combinaison linéaire finie des e_i (par exemple $\mathbb{R}[X]$ admet une base hilbertienne qui est une base au sens classique, mais $\ell_2(\mathbb{R})$ non). L'existence de base hilbertienne n'est pas garantie dans un espace pré-hilbertien quelconque. Une condition suffisante est que l'espace pré-hilbertien soit complet, c'est-à-dire que toutes les suites de Cauchy de E convergent dans E, pour la norme induite par le produit scalaire. Un espace pré-hilbertien complet est appelé **espace de Hilbert**, il admet toujours une famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\overline{\mathrm{vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\}} = E$, qui forme une base hilbertienne. Tout $x \in E$ s'écrivant alors $x = \sum_{i=0}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i$, on a $\sum_{i=0}^{\infty} \langle x, e_i\rangle^2 = \|x\|^2$ (égalité de Parseval). Ceci est traité dans le cours de L3 "Espaces de Hilbert-Analyse de Fourier".

B.2.2 Théorèmes de projection

Soit E un espace euclidien ou pré-hilbertien.

Définition B.24. Une partie $C \subset E$ est dite **convexe** si

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1], tx + (1-)ty \in C.$$

Définition B.25. Soit $A \subset E$ une partie non vide de E, et soit $x \in E$. On appelle **distance de** x **à** A,

$$d(x, A) = \inf_{y\in A} \|x - y\|.$$

Théorème B.26 (Projection sur un convexe). *Soit $C \subset E$ une partie convexe, non vide, complète. Alors pour tout $x \in E$,*

(1) Il existe un unique $p \in C$ tel que

$$d(x, C) = ||x - p|| \tag{B.27}$$

(2) p est l'unique point de C tel que

$$\forall y \in C, \quad \langle x - p, y - p\rangle \leq 0. \tag{B.28}$$

On appelle p le **projeté** *de x sur C.*

Exercice B.29. Montrer que $x \mapsto p = p_C(x)$ est 1-lipschitz sur E.

Corollaire B.30 (Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel). *Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel complet. Soit $x \in E$, alors*

(1) Il existe un unique $p \in F$ tel que

$$d(x, F) = ||x - p|| \tag{B.31}$$

(2) p est l'unique point de F tel que

$$\forall y \in F, \quad \langle x - p, y - p \rangle = 0. \tag{B.32}$$

Le point p est appelé **projeté orthogonal** *de x sur F.*

Corollaire B.33. *Sous les mêmes hypothèses,*

$$E = F \oplus F^{\perp} \tag{B.34}$$

Réciproquement, on peut définir la projection orthogonale à partir d'une décomposition orthogonale :

Définition B.35. Soit E un espace euclidien ou pré-hilbertien, qui admet une décomposition orthogonale $E = F \oplus F^{\perp}$. Tout $x \in E$ s'écrivant de manière unique $x = y + z$, avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$, on définit la **projection orthogonale sur** F comme étant l'application $p_F : E \to F$, $p_F(x) = y$.

Exercice B.36. Vérifier (avec Pythagore) que tour tout $y \in F$ on a $\|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$, avec égalité si et seulement si $y = p_F(x)$.

Remarque B.37. p_F est un endomorphisme de E, $p_F \circ p_F = p_F$, $\mathrm{Im}(p_F) = F$ et $\ker p_F = F^{\perp}$. Si $\{e_1, \ldots, e_k\}$ est une base orthonormée de F, alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i$ pour tout $x \in E$.

L'existence d'une décomposition orthogonale est garantie si F (et à fortiori si E) est de dimension finie, puisque qu'alors $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est isométrique à $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n})$ donc complet.

Corollaire B.38 (Décomposition orthogonale). *Soit E un espace euclidien, et soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors*

(1) $E = F \oplus F^{\perp}$.

(2) $\dim E = \dim F + \dim F^{\perp}$.

(3) $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Remarque B.39. Si E et F sont quelconques on peut avoir $F \oplus F^{\perp} \neq E$ et $(F^{\perp})^{\perp} \neq F$. Soit F le sous-espace vectoriel de $E = \ell^2(\mathbb{R})$ formé des suites à support fini, on note $e_n \in F$ la suite

$(0, \cdots, 0, 1, 0 \cdots)$ dont tous les termes sont nuls sauf le $(n+1)^{me}$ qui vaut 1. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de F (base au sens classique : tout $x \in F$ est une combinaison linéaire finie des e_i). Soit un vecteur $x = (x_n) \in \ell^2(\mathbb{R})$ orthogonal à F, alors $\langle x, e_n\rangle = x_n = 0$, pour tout entier n, donc $x = 0$. On a alors $F^\perp = \{0\}$, et donc $F \oplus F^\perp = F \neq E$ et $(F^\perp)^\perp = E \neq F$.

Proposition B.40. *Soit E un espace euclidien. Toute projection orthogonale p_F de E sur un sous-espace vectoriel F est diagonalisable dans une base orthonormée. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base orthonormée telle que* $\mathrm{vect}\{e_1, \ldots, e_k\} = F$, *alors*

$$M(p_F)_{e\to e} = \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{4em}}^{F}\ \overbrace{\hspace{4em}}^{F^\perp} \\ \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Définition B.41. Soit E un espace euclidien ou pré-hilbertien admettant une décomposition orthognale $E = F \oplus F^\perp$, on appelle **symétrie orthogonale par rapport à** F l'application $s_F : E \to E$ définie par $s_F(x) = y - z$, pour tout $x = y + z \in F \oplus F^\perp$.

On a $s_F(x) = 2p_F(x) - x$, soit aussi $p_F(x) = \frac{x + s_F(x)}{2}$.

Proposition B.42. *Toute symétrie orthogonale préserve le produit scalaire, c'est-à-dire vérifie*

$$\forall x, y \in E \qquad \langle s_F(x), s_F(y)\rangle = \langle x, y\rangle. \tag{B.43}$$

En particulier $\|s_F(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.

Proposition B.44. *Soit E un espace euclidien. Toute symétrie orthogonale s_F de E par rapport à un sous-espace vectoriel F est diagonalisable dans une base orthonormée. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base orthonormée telle que* $\mathrm{vect}\{e_1, \ldots, e_k\} = F$, *alors*

$$
M(s_F)_{e\to e} \quad = \quad \begin{array}{c} \overbrace{}^{F} \quad \overbrace{}^{F^\perp} \\ \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & & & \\ & & & -1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & 0 & & -1 \end{pmatrix} \end{array}
$$

B.2.3 Un exemple : les polynômes orthogonaux

On considère $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $\omega : I \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction C^1. Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on pose

$$
\langle P, Q \rangle_\omega = \int_I P(t)Q(t)\omega(t)\, dt \tag{B.45}
$$

(si I est non borné, on impose à ω de vérifier $|\int_I t^n \omega(t)\, dt| < \infty$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.)

Lemme B.46. $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ *est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}[X]$.

Remarque B.47. Le lemme est vrai sous l'hypothèse plus générale que $\omega : I \to \mathbb{R}_+$ est positive non identiquement nulle.

La base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ n'est pas orthogonale à priori. En fait elle ne l'est jamais, quelque soit I et ω.

Définition B.48. On appelle **polynômes orthogonaux** une base $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que P_n est de degré n pour chaque $n \in \mathbb{N}$, et $\langle P_n, P_m \rangle_\omega = 0$ pour tous $n \neq m$ dans $\mathbb{N}$.

Exemple B.49. Le procédé l'orthogonalisation de Gram-Schmidt appliqué à $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne des polynômes orthogonaux $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *unitaires*, c'est-à-dire telle que $P_n = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i$.

Par construction P_0 est constant et P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leq n-1$. On a une formule de récurrence :

Lemme B.50. *Soit* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des polynômes orthogonaux unitaires. Alors pour* $n \geq 1$,

$$
XP_n = P_{n+1} + a_n P_n + b_n P_{n-1},
$$

où $a_n = \frac{\langle XP_n, P_n\rangle_\omega}{\langle P_n, P_n\rangle_\omega}$ *et* $b_n = \frac{\langle XP_n, P_{n-1}\rangle_\omega}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle_\omega}$.

Une application à l'approximation.

Supposons I compact et $\omega = 1$, alors $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ est pré-hilbertien. La norme euclidienne associée est la norme L^2, soit $\|f\|_2^2 = \int_I f^2(t)\, dt$. Identifions $\mathbb{R}[X]$ avec les fonctions polynomiales sur I, on a alors abusivement $\mathbb{R}[X] \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Proposition B.51. *Soit* $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$*,* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des polynômes orthonormés. Alors pour* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$d_2(f, \mathbb{R}_n[X]) = d_2\left(f, \sum_{k=0}^{n} \langle f, P_k\rangle P_k\right).$$

On peut montrer que la distance tend vers 0 quand le degré $n \to \infty$, à l'aide du résultat suivant :

Théorème B.52 (Stone-Weirstrass). $\mathbb{R}[X]$ *est dense dans* $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ *pour la norme* $\|\cdot\|_\infty$.

On a, puisque $\|f\|_2^2 = \int_I f^2(t)\, dt \leq \int_I \|f\|_\infty^2(t)\, dt < C\|f\|_\infty^2$, que $\mathbb{R}[X]$ est aussi dense dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_2$). Il s'ensuit que $d_2(f, \mathbb{R}_n[X])$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.

B.3 Endomorphismes dans un espace euclidien

B.3.1 Endomorphismes adjoints

Définition B.53. Soit E un espace euclidien ou pré-hilbertien, et soit $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E. On dit que $f^* \in \mathrm{End}(E)$ est l'**endomorphisme adjoint** de f si

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle. \tag{B.54}$$

Remarque B.55. 1) On vérifie sans peine que si l'adjoint existe il est unique.
2) En inversant les variables x et y et par symétrie du produit scalaire, (B.54) équivaut à

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x, f(y)\rangle = \langle f^*(x), y\rangle. \tag{B.56}$$

Théorème B.57. *Soit* E *un espace euclidien et soit* $f \in \mathrm{End}(E)$ *un endomorphisme de* E*. Alors* f *admet un adjoint* f^**. Si* $\{e_i\}$ *est une base orthonormée de* E*, et* $A = M(f)_{e\to e}$*, alors la matrice* $A^* = M(f^*)_{e\to e}$ *de* f^* *dans la même base vaut* $A^* = {}^tA$.

L'adjoint f^* de f est donc une sorte de "symétrique" de f. On peut formaliser cette remarque comme suit. Dans un espace euclidien E, le produit scalaire induit une identification de E avec le dual E^* (cf. remarque B.13). De même il permet d'identifier $\mathscr{L}(E,E)$ avec $\mathcal{B}(E)$, par exemple via l'application

$$\begin{array}{ccl} \mathscr{L}(E,E) & \overset{\Theta}{\to} & \mathcal{B}(E) \\ f & \mapsto & b \\ & & b(x,y) := \langle x, f(y)\rangle. \end{array}$$

Il est clair que Θ est linéaire et injective. C'est donc un isomorphisme par égalité des dimensions de $\mathscr{L}(E,E)$ et $\mathcal{B}(E)$. Maintenant, si on définit ${}^t b \in \mathcal{B}(E)$ par ${}^t b(x,y) = b(y,x)$, on a

$$\Theta(f^*)(x,y) = \langle x, f^*(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle = \langle y, f(x)\rangle = {}^t b(x,y), \tag{B.58}$$

donc $\Theta(f^*) = {}^t b$. Prendre l'adjoint d'un endomorphisme correspond donc à prendre le symétrique de la forme bilinéaire associée (par l'isomorphisme Θ).

Remarque B.59. 1) Si e est une base orthonormée de E, et $b = \Theta(f)$, on voit immédiatement que $M(b)_e = M(f)_{e\to e}$. "Isomorpher" $\mathscr{L}(E,E)$ à $\mathcal{B}(E)$ à l'aide du produit scalaire revient donc, matriciellement, à identifier une matrice d'endomorphisme à une matrice de forme bilinéaire (en travaillant dans une base orthonormée). Notez que si e' est une autre base orthonormée, on a $M(b)_{e'} = M(f)_{e'\to e'}$. Les formules de changement de base nous disent qu'on doit donc avoir ${}^t PMP = P^{-1}MP$, où $P = P_{e\to e'}$. C'est possible car dans le cas de deux bases orthonormées, ${}^t P = P^{-1}$. (on dit que la matrice est **orthogonale**, cf section B.3.3).

2) Si on avait défini Θ par $b(x,y) = \langle f(x), y\rangle$, on aurait obtenu $M(f)_{e\to e} = {}^t M(b)_e$.

3) On a construit en section A.2.3 un isomorphisme $\mathscr{L}(E,E^*) \approx \mathcal{B}(E)$, notons le L, envoyant f sur b tel que $b(x,y) = f(y)(x)$. Si on note $K : \mathscr{L}(E,E) \to \mathscr{L}(E,E^*)$ l'isomorphisme envoyant g sur f tel que $f(y)(x) = \langle x, g(y)\rangle$, on voit que $\Theta = L \circ K$.

Exercice B.60. Si $e = \{e_i\}$ est une base quelconque de E, $A = M(f)_{e\to e}$ et $A^* = M(f^*)_{e\to e}$, alors $M = GA$ et $A^* = G^{-1}{}^t AG$, où G est la matrice de Gram du produit scalaire dans la base $\{e_i\}$, i.e. $G = (\langle e_i, e_j\rangle)$. (utiliser (B.54))

Exemple B.61. 1) Soit $E = \ell^2(\mathbb{R})$ muni que $\langle x, y\rangle = \sum x_i y_i$. Si note $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ les éléments de E, posons $f(x) = (0, x_0, x_1, \ldots)$ (décalage vers la droite). Alors $f \in \mathrm{End}(E)$ admet pour adjoint le décalage à gauche défini par $f^*(x) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, puisque

$$\langle f(x), y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_{i-1}y_i = \sum_{j=0}^{\infty} x_j y_{j+1} = \langle x, f^*(y)\rangle.$$

2) Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire vérifiant $\langle X^n, X^m\rangle = \delta_n^m$. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$ vérifiant par $f(X^n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si l'adjoint f^* existe, alors $1 = \langle f(X^n), 1\rangle = \langle X^n, f^*(1)\rangle$ pour tout n, ce qui est absurde puisque $f^*(1) \in \mathbb{R}[X]$ est de degré fini.

Proposition B.62. *Soient* $f, g \in \mathrm{End}(E)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*, alors*

(1) $f^{**} = f$, $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$,

(2) $(f+g)^* = f^* + g^*$, $(\lambda f)^* = \lambda f^*$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

(3) $\mathrm{rg} f^* = \mathrm{rg} f$, $\det f^* = \det f$.

On déduit de 1) et 2) que si f est un isomorphisme, alors f^* aussi et $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

Proposition B.63. *Soient* E *un espace euclidien et* $f \in \mathrm{End}(E)$*, alors*

(1) $\ker f^* = (\mathrm{Im} f)^{\perp}$ *et* $\mathrm{Im} f^* = (\ker f)^{\perp}$

(2) $F \subset E$ *est* f*-stable si et seulement si* $F^{\perp}$ *est* f^**-stable.*

Corollaire B.64. *Soit* E *un espace euclidien et* $f \in \mathrm{End}(E)$*, alors on a les décompositions orthogonales*

$$E = \ker f \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im} f^* = \ker f^* \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im} f.$$

B.3.2 Endomorphismes symétriques, ou autoadjoints

Définition B.65. Un endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ d'un espace euclidien ou pré-hilbertien est **symétrique**, ou **auto-adjoint**, si

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

Remarque B.66. 1) f est symétrique si et seulement si $f^* = f$.
2) f est symétrique si et seulement si la forme bilinéaire $b(x, y) := \langle f(x), y \rangle$ est symétrique.
3) Si $A = M(f)_{e \to e}$ où e est orthonormée, alors f est symétrique si et seulement ${}^tA = A$.

Exercice B.67. Dans une base e quelconque, $M(f)_{e \to e}$ n'est pas nécessairement symétrique si f l'est : montrer que f est symétrique si et seulement si ${}^tAG = GA$, où G est la matrice du produit scalaire dans la base e.

Les projections orthogonales et symétries orthogonales sont des endomorphismes symétriques, puisqu'ils admettent une matrice diagonale (donc symétrique) dans une base orthonormée (cf Propositions B.40 et B.44). En fait, le fait d'être symétrique caractérise, parmi les projections et symétries, les projections orthogonales et les symétries orthogonales. Si E a une décomposition en deux espaces supplémentaires $E = F \oplus G$ (non nécessairement orthogonaux), on définit la projection p_F et la symétrie s_F **parallèlement à** G en posant, pour $x = y + z \in F \oplus G$, $p_F(x) = y$ et $s_F(x) = y - z$. Alors

Lemme B.68. *(1) p_F est un endomorphisme symétrique $\Leftrightarrow G = F^{\perp}$.*
(2) s_F est un endomorphisme symétrique $\Leftrightarrow G = F^{\perp}$.

On voit donc qu'une symétrie est symétrique si et seulement si c'est une symétrie orthogonale. Ce phénomène de "rigidité" est en fait emblématique des endomorphismes symétriques, comme le montre l'important théorème suivant :

Théorème B.69 (Théorème spectral). *Soient E un espace euclidien et $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme symétrique, alors*

(1) f est diagonalisable.

(2) Les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. En conséquence f admet une base orthonormée de vecteurs propres, formée en prenant une base orthonormée de chaque sous-espace propre.

Remarque B.70. On réfère parfois à ce résultat par "diagonalisation simultanée" ou "orthogonalisation simultanée". En effet si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire de E et b la forme bilinaire symétrique définie par $b(x, y) = \langle f(x), y \rangle$, alors la base orthonormée de vecteurs propres de f orthogonalise simultanément $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et b. Maintenant soient q_1 et q_2 sont deux formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie, où q_1 est définie positive, on peut alors orthogonaliser simultanément q_1 et q_2 : soit f l'endomorphisme tel que $b_2(x, y) = b_1(x, f(y))$, où b_1 et b_2 sont les formes polaires de q_1 et q_2, b_1 étant un produit scalaire (avec les conventions de la page **??**, $f = \Theta(b_2)$ où Θ est défini en utilisant b_1). Puisque b_2 est symétrique, f est symétrique pour b_1 et la base q_1-orthonormée de vecteurs propres de f est q_2-orthogonale.

Corollaire B.71. *Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques sur un espace vectoriel E de dimension finie, où on suppose q_1 définie positive. Alors il existe une base de E qui est q_1-orthonomée et q_2-orthogonale.*

Corollaire B.72 (Théorème spectral, version matricielle). *Soit $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.*

(1) M est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

(2) Il existe une matrice $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1} = {}^tP$ et une matrice diagonale D telle que

$$ {}^tPMP = P^{-1}MP = D. $$

Une matrice P vérifiant $P^{-1} = {}^tP$ est dite **orthogonale** (voir section B.3.3).

Corollaire B.73. *Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, $b \in \mathcal{S}(E)$ une forme bilinéaire symétrique , e une base de E et $M = M(b)_e$. Alors b est un produit scalaire sur E si et seulement si les valeurs propres de M sont toutes strictement positives.*

Applications

Définition B.74. Soit E un espace euclidien, on dit qu'un endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ est positif, resp. négatif, resp. définie, si la forme bilinéaire définie par $b(x, y) = \langle f(x), y\rangle$ est positive, resp. négative, resp. définie.

Exercice B.75. Si E est euclidien et $f \in \mathrm{End}(E)$, alors $f \circ f^*$ et $f^* \circ f$ sont symétriques positifs, et définis si f^* est injectif, resp. f est injectif.

Proposition B.76 (Racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif). *Soit E un espace euclidien et soit $f \in \mathrm{End}(E)$ symétrique et positif, alors il existe un unique $g \in \mathrm{End}(E)$ symétrique et positif tel que $f = g \circ g$.*

Proposition B.77. *Soit E un espace euclidien non nul, et soit $f \in \mathrm{End}(E)$ symétrique, alors*

$$\begin{aligned}
\sup_{\|x\|=1} \langle f(x), x\rangle &= \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} &= \sup\{\mathrm{spec}(f)\} \\
\inf_{\|x\|=1} \langle f(x), x\rangle &= \inf_{\|x\|\neq 0} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} &= \inf\{\mathrm{spec}(f)\}
\end{aligned}$$

Rappelons que la matrice hessiène d'une application 2 fois dérivable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est la matrice de ses dérivées partielles secondes, c'est une matrice symétrique donc diagonalisable. On rappelle un résultat vu en analyse :

Proposition B.78. *Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^3, $p \in \mathbb{R}^2$ un point critique de F, et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de la matrice hessiènne de$F$ en p. Alors*

(1) Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors F admet un minimum local strict en p,

(2) Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, alors F admet un maximum local strict en p,

(3) Si $\lambda_1\lambda_2 < 0$, alors F admet un point selle en p.

B.3.3 Endomorphismes orthogonaux

Soit E un espace euclidien ou pré-hilbertien, non réduit à $\{0\}$.

B.3.3.1 Applications orthogonales et isométries

Définition B.79. Une application $f : E \to E$ est **orthogonale** si

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle, \tag{B.80}$$

C'est une **isométrie** si

$$\forall x, y \in E, \quad d(f(x), f(y)) = d(x, y). \tag{B.81}$$

Remarque B.82. 1) Une application orthogonale préserve l'orthogonalité : si $x \perp y$, alors $0 = \langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle$ donc $f(x) \perp f(y)$.

2) Une application orthogonale préserve la norme : $\forall x \in E$, $||f(x)|| = ||x||$.

3) Une application orthogonale préserve les angles :

$$\sphericalangle(f(x), f(y)) = \arccos\left(\frac{\langle f(x), f(y)\rangle}{||f(x)||||f(y)||}\right) = \arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle}{||x||||y||}\right) = \sphericalangle(x, y).$$

4) Une application orthogonale est linéaire (voir lemme B.83(1) ci-dessous).

5) Une application orthogonale est une isométrie :

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= ||f(x) - f(y)|| \\ &= ||f(x - y)|| \quad \text{(par linéarité)} \\ &= ||x - y|| \quad \text{(préserve la norme)} \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

6) Une isométrie n'est pas nécessairement linéaire, donc pas nécessairement orthogonale. Par exemple, pour $v \in E \setminus \{0\}$ fixé, la translation $x \mapsto x + v$ est une isométrie non linéaire. Cependant une isométrie fixant 0, et en particulier une isométrie linéaire, est orthogonale :

Lemme B.83. *Soit $f : E \to E$ une application.*

(1) Si f est orthogonale, alors elle est linéaire et injective. Si E est de dimension finie, alors f est un automorphisme (i.e. un isomorphisme de E dans lui-même).

(2) Si f est une isométrie fixant 0, alors f est orthogonale.

Si E est préhilbertien, une application orthogonale n'est pas nécessairement surjective : par exemple sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire tel que $\langle X^n, X^m\rangle = \delta_n^m$, l'endomorphisme engendré par $X^n \mapsto X^{n+1}$ est orthogonal mais pas surjectif.

On note $\mathrm{Aut}(E) \subset \mathrm{End}(E)$ le sous-groupe (pour la loi composition) formé par les automorphismes, $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{End}(E)$ l'ensemble des applications orthogonales de E, et $\mathrm{Isom}(E)$ l'ensemble des isométries.

Corollaire B.84. *Soit $f \in Isom(E)$. Alors il existe un unique couple $g \in O(E)$ et $v \in E$ tel que,*
$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x) + v.$$

Proposition B.85. *Soit $f \in \mathrm{Aut}(E)$. Sont équivalents :*

(1) f est orthogonal,

(2) f préserve la norme, ie $\forall x \in E$, $||f(x)|| = ||x||$.

(3) l'adjoint f^* existe et $f^* = f^{-1}$.
En dimension finie, également :

(4) Il existe une base orthononormée e telle que f transforme e une base orthonormée.

(5) f transforme toute base orthonormée en une base orthonormée.

(6) Si $A = M(f)_{e \to e}$ est la matrice de f dans une base orthonormée, alors ${}^tAA = I$. De manière équivalente, $A^tA = I$, ou ${}^tA = A^{-1}$.

Exercice B.86. Si e est une base quelconque de E, et $A = M(f)_{e \to e}$, alors f est orthogonale si et seulement si ${}^tAGA = G$, où G est la matrice de Gram du produit scalaire dans la base e.

Remarque B.87. (Club confusion) On prendra garde que

1) Une projection orthogonale n'est pas un endomorphisme orthogonal général ! (car pas injective, sauf quand c'est l'identité...)

2) Une symétrie orthogonale est orthogonale (cf prop. B.42). En fait, une symétrie est orthogonale comme application ssi c'est une symétrie orthogonale ssi elle est symétrique comme endomorphisme (cf lemme B.68).
Pour la première implication, soit f une symétrie et $E = E_1 \oplus E_{-1}$ la décomposition en sous-espaces propres correspondante, alors si on suppose f orthogonale comme application, i.e. $f^* = f^{-1}$, pour tous $x \in E_1$ et $y \in E_{-1}$, on a
$$\langle x, -y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, f^*(f(y))\rangle = \langle x, y\rangle = 0$$
donc $E_{-1} = E_1^{\perp}$, i.e. f est une symétrie orthogonale.

B.3.3.2 Groupe orthogonal et spécial orthogonal, orientation

Théorème B.88. *On suppose E euclidien. L'ensemble* $\mathrm{O}(E)$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}(E)$, *appelé* **groupe orthogonal** *de E. L'application déterminant* $\det : \mathrm{O}(E) \to \{-1, 1\} \subset (\mathbb{R}^*, \cdot)$ *est un morphisme de groupe. Le sous-groupe $SO(E) := \det^{-1}(\{1\})$ est appelé* **groupe spécial orthogonal** *ou* **groupe des rotations**, *ou* **groupe des isométries directes**.

On peut aussi noter $\mathrm{SO}(E) = \mathrm{O}^+(E)$ et $\mathrm{O}^-(E) = \det^{-1}(\{-1\}) \subset O(E)$. Contrairement à $\mathrm{O}^+(E)$, l'ensemble $\mathrm{O}^-(E)$ n'est pas un sous-groupe.

Exemple B.89. 1) Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan F, i.e. où $E = F \oplus F^\perp$ avec $\dim F^\perp = 1$, est un élément de $\mathrm{O}^-(E)$, qu'on appelle **réflexion**.

2) Plus généralement, si s est une symétrie orthogonale par rapport à F, alors $s \in \mathrm{SO}(E)$ si $\dim F^\perp$ est paire et $s \in \mathrm{O}^-(E)$ sinon.

Proposition B.90. *Soit $f \in \mathrm{O}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f, alors $\lambda \in \{-1, 1\}$.*

Du coup, c'est très restrictif d'être orthogonal et diagonalisable :

Proposition B.91. *Soit $f \in \mathrm{O}(E)$, alors f diagonalisable si et seulement si f est une symétrie orthogonale.*

En particulier un endomorphisme symétrique et orthogonal est une symétrie orthogonale.

Définition B.92. On appelle
$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I\} = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I\}$ le **groupe orthogonal**, et
$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ le groupe **spécial orthogonal**.

Proposition B.93. *Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Sont équivalents :*

(1) $X \mapsto AX$ est une une application orthogonale de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

(2) $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

(3) $A^tA = I$.

(4) Les lignes de A sont orthonormées dans $\mathbb{R}^n$.

(5) Les colonnes de A sont orthonormées dans $\mathbb{R}^n$.

Exemple B.94. $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est orthogonale.

Pour tout espace euclidien E de dimension n, et toute base orthonormée de E, les matrices orthogonales sont exactement les matrices des transformations orthogonales de E exprimées dans la base orthonormée. Formellement, si e est une base orthonormée de E, on a l'isomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{O}(E) & \longrightarrow & \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & M(f)_{e \to e} \end{array}$$

qui envoie $\mathrm{SO}(E)$ sur $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Proposition B.95. *Soient e, e' deux bases orthonormées de E, alors la matrice de passage $P_{e\to e'} = M(id)_{e'\to e}$ est orthogonale.*

On a dans ce cas $P^{-1} = {}^tP$, ce qui peut faciliter certains calculs.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. Notons $\mathbb{B} = \{e = \{e_1, \ldots, e_n\},\ e \text{ base de } E\}$ l'ensemble des bases ordonnées de E (les vecteurs sont numérotés de 1 à n).

Définition B.96. On dit que deux bases $e, e' \in \mathbb{B}$ ont **même orientation** si $\det(P_{e\to e'}) > 0$, sinon on dit qu'elle ont **orientation opposée**.

Ainsi, permuter 2 vecteurs dans une base en change l'orientation. Si e' s'obtient de e par permutation circulaire de n vecteurs, $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \mapsto e' = (e_2, e_3, \ldots, e_n, e_1)$, alors e et e' on tmême orientation si n est impair, et ont orientation opposée si n est pair (Exercice). Avoir la même orientation définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{B}$, formellement :

$$\forall e, e' \in \mathbb{B}, \quad e\,\mathcal{R}\,e' \Leftrightarrow \det(P_{e\to e'}) > 0.$$

Lemme B.97. *$\mathcal{R}$ est une relation d'equivalence sur $\mathbb{B}$, qui a exactement deux classes d'équivalence, appelées* **classes d'orientation***.*

`Preuve:` On a $e\mathcal{R}e$ puisque $P_{e\to e} = I_n$ est de déterminant 1. Si $e\mathcal{R}e'$, alors $e'\mathcal{R}e$ puisque $P_{e'\to e} = P_{e\to e'}^{-1}$ et que $\det P_{e'\to e} = \det P_{e\to e'}^{-1} = (\det P_{e\to e'})^{-1} > 0$. Supposons $e\mathcal{R}e'$ et $e'\mathcal{R}e''$. On a donc $\det P_{e\to e'} > 0$ et $\det P_{e'\to e''} > 0$. Rappelons que $P_{e\to e'} = M(id)_{e'\to e}$ et qu'étant données trois bases b, b', b'' on a la formule fondamentale de composition

$$M(g\circ f)_{b\to b''} = M(g)_{b'\to b''}M(f)_{b\to b'}.$$

On a donc

$$P_{e\to e''} = M(id)_{e''\to e} = M(id\circ id)_{e''\to e} = M(id)_{e'\to e}M(id)_{e''\to e'} = P_{e\to e'}P_{e'\to e''}$$

d'où $\det P_{e\to e''} = \det(P_{e\to e'})\det(P_{e'\to e''}) > 0$, ce qui montre que $e\mathcal{R}e''$. La relation "avoir la même orientation" est donc bien une relation d'équivalence. Il est clair qu'il y a au plus deux classes d'équivalence. Si $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors $e' = (-e_1, e_2, \ldots, e_n)$ a l'orientation opposée à e. Il y a donc exactement deux classes d'orientation. □

On a donc une partition $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2$, où toutes les bases de $\mathbb{B}_1$ ont même orientation, toutes les bases de $\mathbb{B}_2$ ont même orientation, et les bases de $\mathbb{B}_1$ ont l'orientation opposée à celles de $\mathbb{B}_2$.

Définition B.98. On dit que E est **orienté**, ou qu'on a fixé une **orientation** de E, si on a choisi une classe d'orientation. On dit alors que les bases de cette classe sont **directes**, et que celles de l'autre sont indirectes.

Pour fixer une orientation de E il suffit de choisir une base $e \in \mathbb{B}$, qui conduit à écrire la partition en classes $\mathbb{B} = \mathbb{B}^+ \cup \mathbb{B}^-$, où $\mathbb{B}^+$ est la classe d'orientation de e.

Exemple B.99. On oriente souvent $\mathbb{R}^n$ par la base canonique. Ainsi $(\vec{i}, \vec{j})$ dans $\mathbb{R}^2$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans $\mathbb{R}^3$ sont directes, $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ est directe mais $(\vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$ est indirecte.

Un automorphisme $f \in \mathrm{Aut}(E)$ respecte l'orientation, c'est-à-dire envoie une base sur une base de même orientation, si et seulement si $\det f > 0$. En effet, soit $e \in \mathbb{B}$, soit $e' = \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\} = f(e) \in \mathbb{B}$, on voit que

$$M(f)_{e \to e} = M(id)_{e' \to e} = P_{e \to e'},$$

et on se rappelle que $\det f$ se calcule comme le déterminant de la matrice de f dans une base quelconque (et ne dépend pas de la base), par exemple $\det f = \det M(f)_{e \to e}$, d'où l'assertion. Si E est euclidien, $f \in \mathrm{SO}(E)$ agit donc sur les bases orthonormées en préservant l'orientation.

Théorème B.100. *(Un peu de culture)*
Tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

`Preuve:` Soit G un groupe de cardinal n, un théorème de Cayley dit qu'alors G est isomorphe à un sous-groupe du groupe des permutations $\mathfrak{S}_n = \mathrm{Bij}(\{1, \ldots, n\})$, i.e. l'ensemble des bijections $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ muni de la loi de composition. On considère alors

$$\begin{array}{ccccl} G & \xrightarrow{\text{inj}} & \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \\ g & \longmapsto & \sigma & \longmapsto & f, \text{ où } f(e_i) = e_{\sigma(i)} \end{array}$$

On peut vérifier que la deuxième flèche est bien un morphisme de groupe et injective.

L'idée du théorème de Cayley est de considérer $\mathfrak{S}(G)$ le groupe des bijections de G dans lui-même. On peut injecter G dans $\mathfrak{S}(G)$, en faisant agir G sur lui-même par produit à gauche, i.e. à $g \in G$ on associe la bijection $\phi_g : G \to G$ définie par $\phi_g(h) = gh$, et on pose

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}(G) \\ g & \longmapsto & \phi_g : h \mapsto gh \end{array}$$

On peut aussi vérifier que c'est un morphisme de groupe injectif. Ensuite $\mathfrak{S}(G)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$ (numéroter de 1 à n les éléments du groupe...). $\square$

B.3.3.3 Groupe $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$

On rappelle que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}), \det A = 1\}$, et $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Proposition B.101. *Soit $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ unique modulo 2π tel que :*

(1) $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} =: R_\theta \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ représente une rotation d'angle θ, ou bien

(2) $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} =: S_\theta \in O_2^-(\mathbb{R})$ représente une symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire $\theta/2$.

Exercice B.102. Vérifier que

(a) Si on identifie $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ par $(x, y) \approx x + iy$, alors $R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx e^{i\theta}(x + iy)$.

(b) $R_\theta R_\beta = R_{\theta+\beta}$.

(c) S_θ est bien la matrice d'une symétrie orthogonale (tester sur les vecteurs propres)

(d) $S_\theta S_\beta = R_{\theta-\beta}$.

(b) implique que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est abélien, et en fait que l'application $(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \circ) \to (S^1 \subset \mathbb{C}, \cdot)$ définie par $R_\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un isomorphisme de groupe.

Corollaire B.103 (Angle orienté). *Soit E euclidien de dimension 2 orienté, et soit $u, v \in E \setminus \{0\}$. Alors il existe un unique $f \in \mathrm{SO}(E)$ tel que*

$$f\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{v}{\|v\|},$$

et un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que f soit représentée par R_θ dans toute base orthonormée directe. Dans toute base orthonormée directe $e = (e_1, e_2)$, on a

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}, \quad \sin(\theta) = \frac{\det(u, v)_e}{\|u\|\|v\|},$$

où $(u, v)_e = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ est la matrice des coordonnées de u, v dans la base e. L'angle θ est également déterminé par $f(e_1) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$.

On appelle θ l'**angle orienté** de u à v. Un changement d'orientation remplace θ par $2\pi - \theta$.

B.3.3.4 Groupe $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$

Soit e une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Proposition B.104. *Soit $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $A = M(f)_{e\to e}$. Il existe une base $e' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ orthonormée et telle que*

$$A' := \mathrm{M}(f)_{e'\to e'} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{pmatrix}, \quad (\det A \in \{-1, 1\})$$

Supposons $A \neq I_3$. Si $\det A = 1$, $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ représente une rotation d'axe $\mathrm{vect}\{e'_3\} = E_1$ et d'angle θ. Si $\det A = -1$, $A \in \mathrm{O}_3^-(\mathbb{R})$ représente la composée d'une rotation d'angle θ par rapport à l'axe E_{-1} et de la symétrie orthogonale par rapport à $E_{-1}^{\perp}$. On peut toujours supposer que e' a même orientation que e, quitte à remplacer e'_3 par $-e'_3$, sans changer A'. Par contre l'angle θ dépend de l'orientation du plan invariant $\mathrm{vect}\{e'_1, e'_2\}$, fixé par le choix (e'_1, e'_2). Remplacer (e'_1, e'_2) par une base orthonormée ayant même orientation ne change pas A', par contre remplacer (e'_1, e'_2) par une b.o. d'orientation opposée remplace θ par $-\theta$ modulo 2π, soit θ par $2\pi - \theta$ si on prend l'angle dans $[0, 2\pi[$.

Détermination d'un angle orienté de rotation

Il dépend donc d'un choix de la base e', et plus particulièrement de (e'_1, e'_2). Si l'espace ambient est orienté et qu'on impose à e' d'être directe, l'orientation du plan est déterminé par le choix du vecteur orthonormal $e'_3 = \vec{n}$. Supposons $A \neq \pm\mathrm{Id}$, notons $\varepsilon = \det A \in \{-1, +1\}$, et E_ϵ l'espace propre de dimension 1 associé à la valeur propre ϵ. Une orientation étant fixée, on peut déterminer l'angle orienté $\theta \in [0, 2\pi[$ en combinant les deux formules (B.105) et (B.106) ci-dessous. Rappelons que la trace d'une matrice est invariante par changement de base (car $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}A'P) = \mathrm{tr}(A'PP^{-1}) = \mathrm{tr}A'$), on a donc

$$\mathrm{tr}(A) = 2\cos(\theta) + \det A \tag{B.105}$$

Puisque $\cos\theta = \cos(2\pi - \theta)$, la formule détermine $\{\theta, 2\pi - \theta\}$ où $\theta \in [0, 2\pi[$. Ceci permet de déterminer l'angle <u>non orienté</u> entre $u \in E_\varepsilon^{\perp}$ et $f(u)$:

$$\sphericalangle(u, f(u)) = \min\{\theta, 2\pi - \theta\} = \arccos((\mathrm{tr}A - \det A)/2) \in [0, \pi]$$

L'angle orienté $\theta \in [0, 2\pi[$ satisfait

$$\sin(\theta) = \frac{\det\big(u, f(u), \vec{n}\big)_e}{\|u\|^2 \|\vec{n}\|} \tag{B.106}$$

où $u \in E_\varepsilon^{\perp}$ est un vecteur non nul du plan de rotation et e est orthonormée avec même orientation que e'. On peut vérifier cette formule en la calculant dans e' et utilisant $\big(u, f(u), \vec{n}\big)_e = P_{e\to e'} \cdot \big(u, f(u), \vec{n}\big)_{e'}$ et le fait que $\det P_{e\to e'} = 1$. On peut aussi calculer θ via l'expression

$$f(v_1) = \cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2$$

valable pour toute b.o. directe (v_1, v_2) de $E_\epsilon^\perp$.

Remarque B.107. On a aussi $\cos(\theta) = \dfrac{\langle u, f(u)\rangle}{\|u\|^2}$.

B.3.3.5 Produit vectoriel

Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté.

Définition B.108. On appelle **produit vectoriel** de deux vecteurs indépendants $x, y \in E$ le vecteur $x \wedge y \in E$ tel que :

(a) $x \wedge y$ est orthogonal à $\mathrm{vect}\{x, y\}$,

(b) $\|x \wedge y\| = |\sin\theta|\|x\|\|y\|$, où θ est l'angle (non orienté) entre x et y,

(c) $(x, y, x \wedge y)$ est une base directe de E.

Si x et y sont liés on pose $x \wedge y = 0$.

Remarque B.109. (1) La quantité $|\sin\theta|\|x\|\|y\|$ est l'aire du parallélogramme engendré par x et y.

(2) Si (x, y) est orthonormée alors $(x, y, x \wedge y)$ est orthonormée directe

(3) Si $\lambda > 0$, alors $(\lambda x) \wedge y = \lambda(x \wedge y) = x \wedge (\lambda y)$.

(4) $y \wedge x = -x \wedge y = (-x) \wedge y = x \wedge (-y)$.

Proposition B.110. *Soit $x, y \in E$, e une base oorthonormée directe de E. Alors*

(1) Soit $n \in E$ unitaire et orthogonal à x, y, alors

$$x \wedge y = \det\big(x, y, \vec{n}\big)_e \vec{n}$$

(2) $x \wedge y$ est l'unique vecteur de E tel que

$$\forall z \in E, \qquad \langle x \wedge y, z\rangle = \det\big(x, y, z\big)_e. \tag{B.111}$$

Corollaire B.112. *L'application $E \times E \to E \times E$, $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire alternée. Si $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ est orthonormée directe, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ on a*

$$x \wedge y = (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3$$

Proposition B.113. *On a pour tous $x, y, z \in E$:*

(1) **(Identité de Lagrange)**

$$\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle \tag{B.114}$$

(2) **(double produit vectoriel)**

$$x \wedge (y \wedge z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z \tag{B.115}$$

(3) **(Identité de Jacobi)**

$$x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) = 0. \tag{B.116}$$

B.3.3.6 Miscellannées : $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, décomposition polaire

Soit E un espace euclidien.

Théorème B.117. *Soit $f \in \mathrm{O}(E)$. Alors il existe une base orthonormée e de E telle que*

$$M(f)_{e\to e} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & & & \\ & & & & & & \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & & & & & \\ & & & & & & \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & & & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & & \cos(\theta_r) & -\sin(\theta_r) \\ & & & & & & & & & \sin(\theta_r) & \cos(\theta_r) \end{pmatrix}$$

On note que $f \in \mathrm{SO}(E)$ s'il a un nombre pair $2p$ de valeurs propres -1, qui correspondent à p rotations d'angle π sur des 2-plans deux à deux orthogonaux. On voit donc que $f \in \mathrm{SO}(E)$ si et seulement si c'est une composée de rotations ($p + r$ dans ce cas), ce qui justifie qu'on appelle $\mathrm{SO}(E)$ le groupe des rotations.

On appelle **refléxion** une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E, i.e. la symétrie orthogonale par rapport à $F \subset E$ où F est un sous-espace vectoriel de dimension $\dim F = \dim E - 1$.

Théorème B.118. *On suppose que* $\dim E = n \geq 2$. *Alors toute transformation orthogonale $f \in \mathrm{O}(E)$ s'écrit :*

$$f = s_1 \circ \cdots \circ s_r, \quad r \leq n$$

où les s_i sont des réflexions (la décomposition n'est pas unique).

Théorème B.119 (Décomposition polaire). *Tout automorphisme $f \in \mathrm{Aut}(E)$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$f = g \circ a$$

où g est orthogonal et a est auto-adjoint défini positif.

Index