ALGÈBRE BILINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE
Résumé de cours, 2018-2019

LAURENT BESSIÈRES
Institut de Mathématiques de Bordeaux

12 mai 2020

Table des matières

INTRODUCTION

Ces notes constituent le résumé de cours de l'UE d'algèbre bilinéaire et géométrie (4TMQ405U). Il contient définitions, exemples, exercices, résultats et leurs démonstrations. Les démonstrations sont une partie essentielle d'un cours de mathématiques : c'est l'endroit où l'on joue avec les définitions des objets pour en extraire de nouvelles propriétés. Il est conseillé de les travailler. Des démonstrations simples ou des parties de démonstration sont susceptibles d'être posées lors des contrôles.

Ce recueil contient également au fil des pages des exercices, sous forme de Vrai-Faux, qui sont en général des applications assez simples des définitions ou des résultats. Vous êtes encouragés à préparer ces exercices :

1) C'est un bon moyen de tester votre compréhension des notions de cours, et de la renforcer.
2) Certains de ces exercices seront posés en "Questions de cours" lors du DS et du DST (sur 3-4 points).

La notion fondamentale de ce cours. Le but est de faire de la géométrie sur des espaces vectoriels, pour cela la structure d'espace vectoriel est enrichie d'une structure supplémentaire : un *produit scalaire*. Sur $E = \mathbb{R}^n$ le produit scalaire canonique est défini par

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Il a comme propriétés d'être

(a) bilinéaire, c'est-à-dire linéaire en chaque argument : $\forall x, y, z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \langle \lambda x + y, z\rangle &= \lambda\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \\ \langle x, \lambda y + z\rangle &= \lambda\langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \end{aligned}$$

(b) symétrique :

$$\forall x, y \in E, \qquad \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$$

(c) défini :

$$\forall x \in E, \qquad \langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

(d) positif :

$$\forall x \in E, \qquad \langle x, x\rangle \geq 0.$$

Plus généralement, un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une application

$$\langle \cdot, \cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$$

vérifiant les axiomes (a)(b)(c)(d). Cette notion fait sens en dimension infinie : sur $E = C([0,1], \mathbb{R})$ par exemple,

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$$

est un produit scalaire. Le but du cours est donc de faire la théorie des produits scalaires. Il est avantageux d'étudier séparément les 4 axiomes. Le chapitre A est consacré aux applications bilinéaires et symétriques (vérifiant (a)et (b)). Cette étude est faite dans le cadre plus général d'un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'application bilinéaire étant à valeurs dans $\mathbb{K}$. Le chapitre B est consacré aux produits scalaires. Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. En effet, l'axiome de positivité (d) ne fait sens à priori que lorsque $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$. [1].

1. On peut définir sur des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels un avatar du produit scalaire, qu'on appelle produit scalaire *hermitien*, mais les axiomes de bilinéarité et symétrie doivent être remplacés. Inspiré par le fait que $|z|^2 = z\bar{z} \in \mathbb{R}_+$ lorsque $z \in \mathbb{C}$, on considère des applications $b : E \times E \to \mathbb{K}$ linéaires sur la première variable et *semi-linéaires* sur la seconde ($b(x, \lambda y + z) = \bar{\lambda} b(x, y) + b(x, z)$), et hermitiennes ($b(x, y) = \overline{b(y, x)}$). Ceci assure que $b(x, x) \in \mathbb{R}$.

Chapitre A : Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Dans ce chapitre, E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ (on dit que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel), où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

A.1 Formes bilinéaires et formes quadratiques

A.1.1 Formes bilinéaires symétriques

Définition A.1. Une **forme bilinéaire** sur E est une application $b : E \times E \to \mathbb{K}$ linéaire en chaque argument, c'est-à-dire telle que pour tous $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$b(\lambda x + y, z) = \lambda b(x, z) + b(y, z) \tag{A.2}$$

$$b(x, \lambda y + z) = \lambda b(x, y) + b(x, z) \tag{A.3}$$

On dit que b est **symétrique** si

$$\forall x, y \in E, \quad b(x, y) = b(y, x) \tag{A.4}$$

On dit que b est **définie** si

$$\forall x \in E, \quad b(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \tag{A.5}$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, b est **positive** si

$$\forall x \in E, \quad b(x, x) \geq 0. \tag{A.6}$$

Un **produit scalaire** sur E est par définition une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive.

Exemple A.7. 1) En dimension finie. Considérons $E = \mathbb{R}^n$. Le produit scalaire standard est défini par

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Soient des scalaires $a_{ij} \in \mathbb{K}$ $(i, j \in \{1, \dots, n\})$ alors

$$b(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \tag{A.8}$$

définit une forme bilinéaire sur $E = \mathbb{K}^n$. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de E, alors $b(e_k, e_l) = a_{kl}$. Si b est symétrique alors $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i, j. La réciproque est vraie (voir la proposition A.25). Plus généralement, sur toute une forme bilinéaire sur E de dimension finie peut s'écrire sous la forme (A.8) via le choix d'une base (voir section A.2.1).

2) En dimension infinie. Sur $E = \mathbb{R}[X]$ ou $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$, alors

$$b_1(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt \qquad b_2(P, Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)\, dt$$

définissent des formes bilinéaires symétriques positives. La forme b_1 est un produit scalaire alors que b_2 est non définie (considérer $P = 1$).

L'ensemble $\mathbb{K}^{E\times E} = \{b : E \times E \to \mathbb{K}\}$ des applications de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$, hérite de la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}$, muni des lois $(b_1 + b_2)(x, y) := b_1(x, y) + b_2(x, y)$ et $(\lambda b)(x, y) := \lambda.b(x, y)$. On définit $\mathcal{B}(E) = \{b \in \mathbb{K}^{E\times E}$ bilinéaire$\}$ et $\mathcal{S}(E) = \{b \in \mathcal{B}(E)$ symétrique$\}$.

Proposition A.9. *Les espaces $\mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{S}(E)$ sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^{E\times E}$.*

Démonstration. On vérifie qu'une combinaison linéaire de formes bilinéaires (resp. bilinéaires symétriques) sur E est une forme bilinénaire (resp. bilinéaire symétrique) sur E. C'est immédiat. □

A.1.2 Formes quadratiques, polarisation

Définition A.10. Une application $q : E \to \mathbb{K}$ est une **forme quadratique** s'il existe une forme bilinéaire symétrique $b \in \mathcal{S}(E)$ telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = b(x, x)$.

Une forme quadratique détermine complètement la forme bilinéaire symétrique dont elle est issue :

Lemme A.11 (Formule de polarisation). *Si b est une forme bilinéaire symétrique telle que $q(x) = b(x, x)$ pour tout $x \in E$, alors*

$$\forall x, y \in E, \qquad b(x, y) = \frac{1}{2}\Big(q(x + y) - q(x) - q(y)\Big). \tag{A.12}$$

Démonstration. Pour tous $x, y \in E$ on a

$$\begin{aligned} q(x+y) &= b(x+y, x+y) \\ &= b(x, x+y) + b(y, x+y) \\ &= b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) + b(y,y) \\ &= q(x) + 2b(x,y) + q(y) \end{aligned}$$

□

Ainsi la forme bilinéaire symétrique b est déterminée par ses valeurs sur la diagonale de $E \times E$. En conséquence, b est unique, appelée **forme polaire** de q.

Exercice A.13 (Formule de polarisation bis). On a aussi

$$b(x,y) = \frac{1}{4}\Big(q(x+y) - q(x-y)\Big). \tag{A.14}$$

Par extension on dit qu'une forme quadratique q est définie, resp. positive, si sa forme polaire b l'est. De manière équivalente

Définition A.15. Une forme quadratique $q : E \to \mathbb{K}$ est **définie** si $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, et dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

positive	si	$q(x) \geq 0, \forall x \in E$
négative	si	$q(x) \leq 0, \forall x \in E$

Exemple A.16. 1) En dimension finie. Sur $\mathbb{K}^n$ la forme quadratique associée au produit scalaire standard est $q(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ (c'est le carré de la norme euclidiene). Plus généralement les formes quadratiques se mettent sous la forme $q(x) = \sum a_{ij} x_i x_j$. Par exemple $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x) = x_1^2 - x_2 x_3$, est une forme quadratique, ni définie, ni positive. On peut trouver sa forme polaire via la formule de polarisation (A.12), ou en polarisant "à vue" en remplaçant $x_i x_j$ par $\frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$, soit

$$\begin{aligned} x_i^2 &\rightsquigarrow x_i y_i \\ x_i x_j &\rightsquigarrow \frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i) \end{aligned}$$

Ainsi $b(x,y) = x_1 y_1 - \frac{1}{2}(x_2 y_3 + x_3 y_2)$ (qui est bien bilinéaire et symétrique) est la forme polaire de q.

2) Soit $\ell : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire (on rappelle que c'est simplement une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$, par exemple $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1$, et que $E^* := \{\ell : E \to \mathbb{K} \text{ linéaire }\}$ est appelé le *dual* de E). Alors $q(x) = \ell(x)^2$ définit une forme quadratique : clairement $b(x,y) = \ell(x)\ell(y)$ est la forme polaire de q. Plus généralement, étant donnés $\ell_1, \ldots, \ell_k \in E^*$, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$,

$$q = \alpha_1 \ell_1^2 + \cdots + \alpha_k \ell_k^2 \tag{A.17}$$

est une forme quadratique sur E, de forme polaire $b(x,y) = \sum_i \alpha_i \ell_i(x)\ell_i(y)$.

Remarque A.18. En dimension finie, toute forme quadratique sur E peut s'écrire sous la forme (A.17), avec de plus les $\ell_1, \dots, \ell_k$ linéairement indépendantes (voir le théorème de réduction A.51). En conséquence q est positive si et seulement si les α_i sont tous positifs.

On définit $\mathcal{Q}(E) = \{q : E \to \mathbb{K} \text{ forme quadratique}\}$. C'est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications de E dans $\mathbb{K}$. L'application $b \in \mathcal{S}(E) \mapsto q \in \mathcal{Q}(E)$ où $q(x) = b(x,x)\,\forall x$, est clairement linéaire, surjective par définition, et injective d'après la formule de polarisation A.11. En conséquence,

Proposition A.19. *$\mathcal{S}(E)$ est isomorphe à $\mathcal{Q}(E)$.*

Exercice A.20. (VRAI-FAUX) Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

(a) Une produit de formes bilinéaires est une forme bilinéaire.

(b) Si $\ell_1, \ell_2 \in E^*$, alors $q = \ell_1\ell_2 \in \mathcal{Q}(E)$.

(c) Si $q \in \mathcal{Q}(E)$ alors $q(\lambda x) = \lambda q(x)$.

(d) Une forme quadratique bornée (c'est-à-dire telle que $|q(x)| \leq C$ pour C indépendant de x) est nulle.

A.2 Formes bilinéaires en dimension finie

A.2.1 Représentation matricielle

On suppose E de dimension finie (donc isomorphe à $\mathbb{K}^n$). Soit $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E, et soit $b \in \mathcal{B}(E)$. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, alors par bilinéarité

$$\begin{aligned} b(x,y) &= b\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i\, b\left(e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j b(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j b(e_i, e_j). \end{aligned} \tag{A.21}$$

La forme bilinéaire b est donc déterminée par les valeurs $b(e_i, e_j) \in \mathbb{K}$.

Définition A.22. On appelle **matrice de b dans la base** e la matrice

$$[b]_e := \begin{pmatrix} b(e_1,e_1) & b(e_1,e_2) & \cdots & b(e_1,e_n) \\ b(e_2,e_1) & & & \vdots \\ \vdots & & b(e_i,e_j) & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ b(e_n,e_1) & \cdots & \cdots & b(e_n,e_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$$

où $b(e_i, e_j)$ est le coefficient en ligne i et colonne j. C'est le coefficient de x_iy_j dans l'expression (A.21).

Exemple A.23. Soit $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $b(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors $[b]_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Proposition A.24. *L'application $b \in \mathcal{B}(E) \mapsto [b]_e \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Notons f l'application $b \mapsto [b]_e$. Soient $b_1, b_2 \in \mathcal{B}(E)$ et $\lambda \in K$. Soit e une base de E. Puisque $(\lambda b_1 + b_2)(e_i, e_j) = \lambda b_1(e_i, e_j) + b_2(e_i, e_j)$ (pour tout i, j), on a $[\lambda b_1 + b_2]_e = \lambda[b_1]_e + [b_2]_e$. Autrement dit, f est linéaire. La formule (A.21) montre que f est injective. Etant donné $M = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, la fomule $b(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j$ (où les x_i, y_j sont les coordonnées de x, y dans la base e) définit une forme bilinéaire $b \in \mathcal{B}(E)$ telle que $[b]_e = M$. Autrement dit, f est surjective. $\square$

Proposition A.25. *Soient $b \in \mathcal{B}(E)$ et e une base de E. Sont équivalents :*

(1) b est symétrique,

(2) $[b]_e$ symétrique.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) est évident. Pour la réciproque, soit $x, y \in E$, alors

$$\begin{aligned} b(x,y) &= \sum_{i,j} x_iy_ib(e_i,e_j) && \text{(d'après (A.21))} \\ &= \sum_{i,j} x_iy_jb(e_j,e_i) && \text{(par symétrie de la matrice)} \\ &= \sum_j y_jb\left(e_j, \sum_i x_ie_i\right) && \text{(linéarité à droite)} \\ &= b\left(\sum_j y_je_j, \sum_i x_ie_i\right) && \text{(linéarité à gauche)} \\ &= b(y,x) \end{aligned}$$

$\square$

Corollaire A.26. $\dim \mathcal{B}(E) = n^2$ *et* $\dim \mathcal{S}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration. Cela découle de l'isomorphisme entre $\mathcal{B}(E)$ et $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, et entre $\mathcal{S}(E)$ et l'ensemble des matrices symétriques de $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. $\square$

La proposition suivante permet d'exprimer $b(x,y)$ en termes de produit matriciel. Etant donnés $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, notons $[x]_e := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ la matrice $n \times 1$ (un vecteur colonne) formé des coordonnées de x dans la base e. L'opérateur Transposée ${}^t : \mathbb{M}_{p\times m}(\mathbb{K}) \to \mathbb{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ est l'isomorphisme qui associe à une matrice A de taille $p \times m$ la matrice ${}^tA$ de taille $m \times p$, définie par $({}^tA)_{ij} = A_{ji}$. On a donc ${}^t[x]_e = \big(x_1, \dots, x_n\big)$ une matrice $1 \times n$ (un vecteur ligne).

Proposition A.27. *Soient* $b \in \mathcal{B}(E)$ *et* $M = [b]_e$. *Alors, pour tous* $x, y \in E$,

$$b(x,y) = {}^t[x]_e \cdot [b]_e \cdot [y]_e = \big(x_1, \dots, x_n\big) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{A.28}$$

où le produit est le produit matriciel. De plus, M *est la seule matrice qui vérifie cette identité pour tous* $x, y \in E$.

Démonstration. Observons que la formule est cohérente en termes de dimensions car par définition du produit matriciel,

$$\begin{array}{rcll} (p\times m)\cdot(m\times q) & = & p\times q, & \text{et en particulier} \\ (n\times n)\cdot(n\times 1) & = & n\times 1, & (\text{ matrice} \cdot \text{vecteur colonne} = \text{vecteur colonne}) \\ (1\times n)\cdot(n\times 1) & = & 1\times 1, & (\text{vecteur ligne} \cdot \text{vecteur colonne} = \text{scalaire}) \end{array}$$

En particulier le produit matriciel ${}^t[x]_e \cdot [y]_e = \sum_i x_i y_i$ n'est rien d'autre que le produit scalaire standard dans $\mathbb{K}^n$ de $[x]_e$ et $[y]_e$. Vérifions la formule (A.28). On a

$$b(x,y) = \sum_i x_i \sum_j y_j b(e_i, e_j) = \sum_i x_i z_i = {}^t[x]_e \cdot [z]_e$$

où on a posé $z_i = \sum_j y_j b(e_i, e_j)$ et $z = \sum_i z_i e_i$. Or on a $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, d'où le résultat. L'application de (A.28) à $x = e_k$ et $y = e_\ell$ donne $b(e_k, e_\ell) = M_{k\ell}$, d'où l'unicité de la matrice. $\square$

Sur l'exemple A.23 :

$$\begin{aligned}
b(x,y) &= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2 \\
&= x_1(y_1+2y_2) + x_2(3y_1+4y_2) \\
&= (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} y_1+2y_2 \\ 3y_1+4y_2 \end{pmatrix} \\
&= (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Rappel (Matrice d'une application linéaire, matrice de passage)**.** Soit $g : (E,e) \to (E',e')$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels munis de bases e, e' respectivement. La **matrice de g entre les bases e et e'** est par définition

$$[g]_{e\to e'} := \big([g(e_1)]_{e'} \cdots [g(e_n)]_{e'}\big)$$

dont la j-ème colonne est formée des coordonnées de $g(e_j)$ dans la base e'. On a la relation $[g(x)]_{e'} = [g]_{e\to e'}[x]_e$. Dans le cas particulier $E = F$ et $g = \mathrm{id}$ on obtient

$$[\mathrm{id}]_{e\to e'} := \big([e_1]_{e'} \cdots [e_n]_{e'}\big)$$

qu'on appelle **matrice de passage de la base e' à la base e** (attention à l'ordre). Alors

$$[x]_{e'} = [\mathrm{id}]_{e\to e'} \cdot [x]_e.$$

Soit $h : (E',e') \to (E'',e'')$ linéaire, alors

$$[h \circ g]_{e\to e''} = [h]_{e'\to e''} \cdot [g]_{e\to e'}.$$

En particulier $[\mathrm{id}]_{e\to e'} \cdot [\mathrm{id}]_{e'\to e} = [\mathrm{id}]_{e'\to e'} = I_n$ donc $[\mathrm{id}]_{e\to e'}$ et $[\mathrm{id}]_{e'\to e}$ sont inverses l'une de l'autre.

Proposition A.29 (Formule du changement de base). *Soient e, e' deux bases de E, et soit $b \in \mathcal{B}(E)$. Soit $P = [\mathrm{id}]_{e'\to e}$ la matrice de passage de e à e', $M = [b]_e$ et $M' = [b]_{e'}$, alors*

$$M' = {}^tPMP. \tag{A.30}$$

Démonstration. Soit $x, y \in E$, alors

$$\begin{aligned}
b(x,y) &= {}^t[x]_e \cdot M \cdot [y]_e \\
&= {}^t([\mathrm{id}]_{e'\to e} \cdot [x]_{e'}) \cdot M \cdot [\mathrm{id}]_{e'\to e} \cdot [y]_{e'} \\
&= {}^t[x]_{e'} \cdot {}^tP \cdot M \cdot P \cdot [y]_{e'} \\
&= {}^t[x]_{e'} \cdot M' \cdot [y]_{e'}
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant vraie tous x, y, on conclut à l'égalité des matrices $M' = {}^tP \cdot M \cdot P$. □

Remarque A.31. La formule (A.30) est différente de celle du changement de bases de matrices d'endomorphismes, qui fait intervenir $P^{-1}MP$.

Exercice A.32. Soient $f_1, f_2 : E \to E'$ deux applications linéaires et soit $b' \in \mathcal{B}(E')$. On pose pour tous $x, y \in E$, $b(x,y) = b'(f_1(x), f_2(y))$. Montrer que $b \in \mathcal{B}(E)$ et calculer $[b]_e$ en fonction des matrices $[b']_{e'}$ et $[f_1]_{e \to e'}$ et $[f_2]_{e \to e'}$, où e, e' sont des bases de E, E' respectivement.

A.2.2 Rang et noyau d'une forme bilinéaire

Soit b une forme bilinéaire sur E.

Définition A.33. On suppose E de dimension finie. On appelle **rang** de b le rang de la matrice de b dans une base quelconque e de E, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(b) = \mathrm{rg}[b]_e$.

Cette définition fait sens car $\mathrm{rg}[b]_e = \mathrm{rg}[b]_{e'}$ pour toute base e', ceci découlant de la relation $[b]_{e'} = {}^tP[b]_eP$, où P est inversible.

Définition A.34. On appelle **noyau** de b le sous-espace vectoriel de E :

$$N(b) = \{y \in E \mid b(x,y) = 0, \forall x \in E\}.$$

On dit que b est **non dégénérée** lorsque $N(b) = \{0\}$.

Exercice A.35. Prouver que $N(b)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Par extension on appelle rang, resp. noyau, d'une forme quadratique q le rang, resp. noyau, de sa forme polaire.

Proposition A.36. *On suppose E de dimension finie, et soit e une base de E. Soit $\varphi : x \in E \to [x]_e \in \mathbb{K}^n$ l'isomorphisme de coordonnées. Alors $\varphi(N(b)) = \ker[b]_e$, soit encore*

$$x \in N(b) \Leftrightarrow [x]_e \in \ker[b]_e.$$

Démonstration. Soit $y \in E$, alors

$$\begin{aligned} y \in N(b) &\iff b(x,y) = 0,\ \forall x \in E \\ &\iff {}^t[x]_e \cdot [b]_e \cdot [y]_e = 0,\ \forall x \in E \\ &\iff [b]_e \cdot [y]_e = 0 \\ &\iff [y]_e \in \ker[b]_e \end{aligned}$$

□

Corollaire A.37 (Formule du rang). *Sous les mêmes hypothèses,*

(1) $\dim N(b) + \mathrm{rg}(b) = \dim E$,

(2) b *est non dégénérée* $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(b) = \dim E \Leftrightarrow \det[b]_e \neq 0 \Leftrightarrow [b]_e$ *est inversible.*

Démonstration. Soit e une base de E, alors $f : X \in \mathbb{K}^n \mapsto [b]_e \cdot X \in \mathbb{K}^n$ est un endomorphisme. La formule du rang pour les applications linéaires donne $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{K}^n$, et donc $\dim \ker[b]_e + \mathrm{rg}[b]_e = \dim E$. □

Remarque A.38. On peut définir l'endomorphisme $f : E \to E$ en posant $[f]_{e \to e} = [b]_e$, alors $\ker f = N(b)$ et $\mathrm{rg} f = \mathrm{rg}(b)$. L'endomorphisme dépend de la base : si e' est une autre base, l'endomorphisme $f' : E \to E$ défini par $[f']_{e' \to e'} = [b]_{e'}$, est différent de f dès que ${}^tP \neq P^{-1}$ (où $P = [\mathrm{id}]_{e \to e'}$). Cependant, on peut associer formes bilinéaires et applications linéaires, indépendamment du choix d'une base, en passant par le dual.

A.2.3 Dualité, accouplement canonique

Définition A.39. On appelle **dual** de E, et on note $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des formes linéaires sur E.

On associe à tout $b \in \mathcal{B}(E)$ une application linéaire $f_b \in \mathscr{L}(E, E^*)$ comme suit. On définit

$$\begin{array}{rl} f_b : E \to E^* & \\ y \mapsto b_y & \end{array} \quad \text{où} \quad \begin{array}{rl} b_y : E \to \mathbb{K} & \\ x \mapsto b(x,y) & \end{array} \quad \text{est la forme linéaire}$$

La forme bilinéaire et l'application linéaire sont liées par la relation fondamentale

$$b(x, y) = f_b(y)(x),$$

qui montre que f_b est linéaire. De plus (exercice) l'application $\mathcal{B}(E) \ni b \mapsto f_b \in \mathscr{L}(E, E^*)$ est un isomorphisme, de réciproque $\mathscr{L}(E, E^*) \ni f \mapsto b \in \mathcal{B}(E)$, où $b(x, y) := f(y)(x)$.

Définition A.40. (Base duale). Soit $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base E. On appelle **base duale** de e la base $e^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ de E^*, où les $e_i^* : E \to \mathbb{K}$ sont définies par

$$e_i^*(e_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Lemme A.41. e^* *est une base de* E^*.

Démonstration. On montre que e^* est libre en évaluant l'identité $0 = \lambda_1 e_1^* + \ldots + \lambda_n e_n^*$ sur les e_j. Par ailleurs, pour $\ell \in E^*$ et $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a $\ell(x) = \sum_{i=1}^n x_i \ell(e_i) = \sum_{i=1}^n e_i^*(x)\ell(e_i)$, donc $\ell = \sum_{i=1}^n \ell(e_i)e_i^*$, ce qui montre que e^* est génératrice. □

Proposition A.42. *Avec les conventions ci-dessus,*

(1) $[b]_e = [f_b]_{e \to e^*}$,

(2) $\mathrm{rg}(b) = \mathrm{rg}(f_b)$,

(3) $N(b) = \ker f_b$.

Démonstration. (1) L'égalité $f_b(e_j) = \sum \lambda_k e_k^*$ évalué sur e_i implique $f_b(e_j)(e_i) = \lambda_i$. Autrement dit, la i-ème coordonnée de $[f_b(e_j)]_{e^*}$ est $f_b(e_j)(e_i)$. L'égalité $b(e_i, e_j) = f_b(e_j)(e_i)$ permet de conclure.
(2) est une conséquence de (1).
(3) Soit $y \in E$, alors $y \in N(b) \Leftrightarrow \forall x \in E,\ b(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E,\ f_b(y)(x) = 0 \Leftrightarrow f_b(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \ker f_b$. □

Exercice A.43. (VRAI-FAUX) Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

(a) $\mathrm{rg}(b_1 + b_2) = \mathrm{rg}(b_1) + \mathrm{rg}(b_2)$.

(b) $N(b_1) \cap N(b_2) \subset N(b_1 + b_2)$.

(c) $N(b_1) \cap N(b_2) = N(b_1 + b_2)$.

(d) Soient $f : E \to E^*$ linéaire, et e, e' deux bases de E. Alors

$$[f]_{e' \to e'^*} = {}^t[\mathrm{id}]_{e' \to e}[f]_{e \to e^*}[\mathrm{id}]_{e' \to e}.$$

A.3 Orthogonalité

A.3.1 Orthogonalité relativement à une forme bilinéaire symétrique

Soit $b \in \mathcal{S}(E)$ une forme bilinéaire symétrique.

Définition A.44. Deux vecteurs $x, y \in E$ sont b-**orthogonaux** si $b(x,y) = 0$. Une famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ de vecteurs de E est b-**orthogonale** si $b(v_i, v_j) = 0$ pour tous $i \neq j$. La famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ est b-**orthonormée** si $b(v_i, v_j) = \delta_i^j$.

S'il n'y a pas d'ambiguité on dit simplement que les vecteurs sont orthogonaux. Un vecteur peut être orthogonal à lui-même : par exemple pour $b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ définie par $b(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à lui-même.

Définition A.45. Soit $A \subset E$ une partie de E. On appelle b**-orthogonal** de A l'ensemble

$$A^{\perp} = \{x \in E \mid b(x,a) = 0, \forall a \in A\}$$

des éléments orthogonaux à tous les éléments de A.

Proposition A.46. *Pour tout $A \subset E$, $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E, égal à $(\mathrm{vect} A)^{\perp}$.*

Démonstration. Notez que $\emptyset^{\perp} = E$ et $(\mathrm{vect}\emptyset)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = E$ également donc la proposition est vérifiée pour $A = \emptyset$. Supposons $A \neq \emptyset$ et soient $x, y \in A^{\perp}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $a \in A$, alors $b(\lambda x + y, a) = \lambda b(x,a) + b(y,a) = 0$ puisque $x, y \in A^{\perp}$. Comme a est quelconque, $\lambda x + y \in A^{\perp}$, ce qui montre que $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel. Il est clair que si $A \subset B$ alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$. En conséquence $(\mathrm{vect} A)^{\perp} \subset A^{\perp}$. Pour l'inclusion réciproque soit $x \in A^{\perp}$. Un élément de $\mathrm{vect} A$ est de la forme $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$, où $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $a_i \in A$. Comme $b(x, \sum_i \lambda_i a_i) = \sum_i \lambda_i b(x, a_i) = 0$, on conclut que $x \in (\mathrm{vect} A)^{\perp}$. $\square$

En conséquence, si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, $x \in F^{\perp}$ si et seulement si x est orthogonal à une base de F (si $F = \mathrm{vect}\{v_1, \ldots, v_k\}$, $F^{\perp} = \{v_1, \ldots, v_k\}^{\perp} = \{x \in E \mid b(x, v_i) = 0, \forall i\}$).

Proposition A.47. *Avec les conventions ci-dessus :*

(1) $\{0\}^{\perp} = E$,

(2) $E^{\perp} = N(b)$,

(3) Pour tout $A \subset E$, $N(b) \subset A^{\perp}$.

Démonstration. Exercice. $\square$

Définition A.48. On appelle **cône isotrope** de $b \in \mathcal{S}(E)$ (et de sa forme quadratique q) l'ensemble

$$I(b) = \{x \in E \mid b(x,x) = 0\} = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$$

Les vecteurs de $I(b)$ sont dits **vecteurs isotropes** de b (et de q).

Remarque A.49. Le cône isotrope n'est pas un sous-espace vectoriel en général. Par exemple, pour $b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ définie par $b(x,y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$, $I(b)$ est la réunion de deux droites $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = \pm x_2\}$. Le cône est toujours invariant par dilatation : si $x \in I(b)$, alors $\lambda x \in I(b)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. On a toujours $N(b) \subset I(b)$.

Exercice A.50. (VRAI-FAUX) Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

(a) La somme de deux vecteurs isotropes d'une forme quadratique est un vecteur isotrope.

(b) Si $q(x) > 0$ et $q(y) > 0$, alors $q(x+y) > 0$.

(c) Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux formes linéaires sur E un espace vectoriel de dimension ≥ 2, alors $b(x,y) = \ell_1(x)\ell_2(y)$ définit une forme bilinéaire dégénérée.

A.3.2 Existence de bases orthogonales, théorème de réduction

Dans cette section on montre le premier résultat important de ce cours : l'existence de bases orthogonales en dimension finie. C'est intéressant pour les raisons suivantes : étant donné E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de base $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $b \in \mathcal{S}(E)$, alors e est b-orthogonale si et seulement si la matrice $[b]_e$ est diagonale :

$$[b]_e = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}.$$

Les a_i contiennent toute l'information possible sur b : son rang (nombre de $a_i \neq 0$), une base du noyau (les e_i tels que $a_i = 0$), si elle positive (tous les $a_i \geq 0$) et définie positive (tous les $a_i > 0$). On peut tirer ses informations également de l'écriture de la forme quadratique $q(x) = b(x,x)$ dans e :

$$q(x) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2,$$

écriture qui équivaut à l'orthogonalité de e.

Théorème A.51 (Théorème de réduction). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0\}$, et soit $b \in \mathcal{S}(E)$ une forme bilinéaire symétrique. Alors il existe alors une base b-orthogonale $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E. Quitte à renuméroter les e_i, la matrice de b dans la base e est de la forme*

$$[b]_e = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a_i \in \mathbb{K}, a_i \neq 0 \\ r = \mathrm{rg}(b). \end{array}$$

Les vecteurs $e_{r+1}, \dots, e_n$ sont isotropes et forment une base du noyau $N(b)$.

Démonstration. On montre l'existence d'une base orthogonale par récurrence sur la dimension n de E. Si $n = 1$, il n'y a rien à montrer. Soit $n \geq 1$. Supposons l'assertion vraie pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ et soit $b \in \mathcal{S}(E)$. Si $b = 0$, toute base est b-orthogonale. Supposons $b \neq 0$, alors la forme quadratique associée q n'est pas nulle (par polarisation (A.12)), il existe donc $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$. Posons

$$F = \{y \in E,\, b(x,y) = 0\} = x^\perp = \ker \ell$$

où $\ell : E \to \mathbb{K}$ est la forme linéaire $y \mapsto b(x,y)$. Puisque $b(x,x) \neq 0$, ℓ n'est pas nulle et donc $\mathrm{Im}\ell = \mathbb{K}$ est de dimension 1. La formule du rang $\dim \ker \ell + \dim \mathrm{Im}\ell = \dim E = n+1$ donne alors $\dim \ker \ell = n$. On a donc $E = F \oplus \mathbb{K}x$. L'hypothèse de récurrence appliquée à la restriction de b à $F \times F$ donne $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base b-orthogonale de F. La famille $\{v_1, \ldots, v_n, x\}$ est alors une base b-orthogonale de E, ce qui termine la récurrence. Montrons les assertions sur le rang et le noyau. Soient E de dimension n et $b \in \mathcal{S}(E)$. Soit $e = \{e_1, \ldots, e_n, x\}$ une base b orthogonale de E Si $b = 0$, $\mathrm{rg}(b) = 0$ et $N(b) = E$. Si $b \neq 0$ alors $\mathrm{rg}(b) \geq 1$. Quitte à la renuméroter e, il existe $r \in \{1, \ldots, n\}$ telle que $b(e_i, e_i) = a_i \neq 0$ si et seulement si $i \leq r$. Il est clair que $r = \mathrm{rg}[b]_e = \mathrm{rg}(b)$, et d'après la proposition A.36 que $\mathrm{vect}\{e_{r+1}, \ldots, e_n\} = N(b)$. $\square$

Remarque A.52. D'un point de matriciel, si $M \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ est symétrique, on cherche une matrice P inversible telle que ${}^tPMP$ soit diagonale. Ce n'est pas le même problème que celui de la diagonalisation des matrices, où $P^{-1}MP$ est diagonale.

Corollaire A.53. *Soit q une forme quadratique sur E, de rang r. Il existe une base q-orthogonale $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E et des scalaires $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{K}$, $a_i \neq 0$, tels que si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ alors*

$$q(x) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_r x_r^2.$$

Exercice A.54. (VRAI-FAUX) Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

(a) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension ≥ 2 et soit $\ell \in E^*$. Alors $(x,y) \mapsto \ell(x)\ell(y)$ est définie positive.

(b) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soient $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}(E)$ définies positives. Alors $q_1 + q_2$ est définie positive.

(c) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $q \in \mathcal{Q}(E)$ sans vecteur isotrope non nul. Alors q ou $-q$ est définie positive.

A.3.3 La méthode de Gauss de décomposition en carrés

Le théorème de réduction ne produit pas de base orthogonale explicite. La méthode de Gauss de decompositions en carrés permet de le faire. C'est un algorithme qui produit, à partir d'une forme quadratique

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \tag{A.55}$$

exprimée dans une base quelconque $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$, des formes linéaires indépendantes $\ell_1, \ldots, \ell_n \in E^*$ telles que

$$q(x) = a_1 \ell_1^2(x) + \cdots + a_n \ell_n^2(x), \quad (a_i \in \mathbb{K})$$

Le changement de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \vdots \\ \ell_n(x) \end{pmatrix}$ donne alors une base q-orthogonale. L'idée de la méthode de Gauss est de transformer l'expression (A.55) pour faire apparaître des carrés.

On utilise deux types d'amorces, reposant sur les identités bien connues :

$$(I) \qquad a^2 + 2ab = (a+b)^2 - b^2 \tag{A.56}$$
$$(II) \qquad ab = \frac{1}{4}\big((a+b)^2 - (a-b)^2\big) \tag{A.57}$$

Evidement, il ne sert à rien de faire apparaitre des carrés à tout va, sous peine d'obtenir une décomposition non libre. La méthode consiste à isoler une variable x_i au moins à chaque itération. Les deux exemples suivants illustrent exhaustivement la méthode, utilisant chacun une des amorces selon qu'il existe déjà dans (A.55) un x_i^2 ou non.

Exemple A.58. Soit $q(x) = x_1^2 - x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$. Puisqu'il y a un x_1^2 on va utiliser l'amorce (I) en regroupant tous les x_1 :

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 - x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3, \\ &= x_1^2 + 2x_1(x_2 - 2x_3) \underbrace{-x_2^2 + 6x_3^2 - 8x_2x_3}_{\text{il n'y a plus de } x_1}. \end{aligned}$$

On a par (A.56), avec $a = x_1$ et $b = x_2 - 2x_3$,

$$\begin{aligned} q(x) &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - (\underbrace{x_2 - 2x_3}_{\text{il n'y a plus de } x_1})^2 - x_2^2 + 6x_3^2 - 8x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 \underbrace{- (x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2) - x_2^2 + 6x_3^2 - 8x_2x_3}_{\text{il n'y a plus de } x_1} \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - 2\left[x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2\right] \qquad (\text{ amorce (I) sur tous les } x_2) \\ &= (\underbrace{x_1 + x_2 - 2x_3}_{\ell_1(x)})^2 - 2\left[(\underbrace{x_2 + x_3}_{\ell_2(x)})^2 - 2(\underbrace{x_3}_{\ell_3(x)})^2\right] \end{aligned}$$

Remarque A.59. 1) On peut vérifier que $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ est libre est évaluant l'identité $0 = \lambda_1\ell_1 + \lambda_2\ell_2 + \lambda_3\ell_3$ sur les vecteurs e_1, e_2, e_3 successivement, obtenant successivement $0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.
2) La décomposition obtenue n'est pas unique : on obtient une autre décomposition si on fait la première itération sur la variable x_2, ou la variable x_3.
3) Le nombre de formes linéaires indépendantes peut-être strictement inférieur à la dimension de l'espace : on peut aboutir à $q = a_1\ell_1^2 + \ldots + a_k\ell_k^2$, avec $k < n$. C'est le cas si $\mathrm{rg}(q) < n$ puisque $k = rg(q)$. Au besoin, on peut compléter $\{\ell_1, \ldots, \ell_k\}$ en une base $\{\ell_1, \ldots, \ell_k, \ell_{k+1}, \ldots, \ell_n\}$ de E^*, et écrire $q = a_1\ell_1^2 + \ldots + a_k\ell_k^2 + 0\ell_{k+1}^2 + \ldots + 0\ell_n^2$.
4) Si le nombre de formes linéaires est strictement supérieur à la dimension de l'espace, elles ne sont pas indépendantes...et il y a une erreur.

Exemple A.60. Soit $q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2x_3$ dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$.

On veut utiliser l'amorce (II), mais elle doit manger tous les termes en x_1 et x_2 (dans cette itération, on isole deux variables d'un coup). On doit donc préparer l'amorce. On le fait avec la formule

$$(II') \qquad \begin{aligned} ab + a\phi_1 + b\phi_2 &= \underbrace{(a+\phi_2)}_{A}\underbrace{(b+\phi_1)}_{B} - \phi_1\phi_2 \\ &= \frac{1}{4}\Big((\underbrace{a+b+\phi_1+\phi_2}_{A+B})^2 - (\underbrace{a-b+\phi_2-\phi_1}_{A-B})^2\Big) - \phi_1\phi_2 \end{aligned}$$

où on a utilisé (A.57) sur AB. On a donc

$$\begin{aligned} q(x) &= 5\left(x_1x_2 + x_1\frac{6x_3}{5} + x_2\frac{3x_3}{5}\right) \\ &= 5\Bigg(\underbrace{x_1+\frac{3x_3}{5}}_{A}\Bigg)\Bigg(\underbrace{x_2+\frac{6x_3}{5}}_{B}\Bigg) - 5\underbrace{\frac{6x_3}{5}\frac{3x_3}{5}}_{\text{il n'y a plus de } x_1, x_2} \\ &= \frac{5}{4}\Bigg(\underbrace{x_1+x_2+\frac{9}{5}x_3}_{A+B=\ell_1(x)}\Bigg)^2 - \frac{5}{4}\Bigg(\underbrace{x_1-x_2-\frac{3}{5}x_3}_{A-B=\ell_2(x)}\Bigg)^2 - \frac{18}{5}(\underbrace{x_3}_{\ell_3(x)})^2 \end{aligned}$$

En évaluant $0 = \lambda_1\ell_1 + \lambda_2\ell_2 + \lambda_3\ell_3$ sur e_1+e_2, e_1-e_2 puis e_3, on obtient que $\lambda_i = 0$ pour $i = 1,2,3$, prouvant que $\{\ell_1,\ell_2,\ell_3\}$ est libre.

Méthode générale Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et q une forme quadratique sur E, non nulle. Dans une base $e = \{e_1,\cdots,e_n\}$, on peut écrire

$$q(x) = \sum_{i\le j}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j.$$

Il y a 2 cas possibles : <u>Cas 1</u> : il existe i tel que $a_{ii} \neq 0$. Quitte à renuméroter, on suppose $a_{11} \neq 0$. On regroupe tous les termes contenant x_1 :

$$\begin{aligned} q(x) &= a_{11}x_1^2 + x_1\underbrace{\sum_{2\le j} a_{1j}x_j}_{\ell(x)} + \underbrace{\sum_{2\le i\le j} a_{ij}x_ix_j}_{q_2(x)} \\ &= a_{11}\left(x_1^2 + x_1\frac{\ell(x)}{a_{11}}\right) + q_2(x) \\ &= a_{11}\Bigg(\underbrace{x_1+\frac{\ell(x)}{2a_{11}}}_{\ell_1(x)}\Bigg)^2 \underbrace{-\frac{\ell(x)^2}{4a_{11}} + q_2(x)}_{q_3(x)} \\ &= a_{11}\ell_1^2(x) + q_3(x) \end{aligned}$$

où q_3 est une forme quadratique nulle sur $\text{vect}\{e_1\}$ puisque $\ell(x)$ et $q_2(x)$ ne dépendent pas de x_1. On recommence avec q_3, qu'on considère comme une forme quadratique définie sur vect$\{e_2, \dots, e_n\}$. Puisque ℓ_1 n'est pas nulle sur vect$\{e_1\}$, elle est indépendante des formes linéaires apparaissant dans la décomposition de q_3, qui le sont.

<u>Cas 2</u> $a_{ii} = 0$ pour tout i. Puisque $q \neq 0$ il existe $a_{ij} \neq 0$ et on peut supposer $a_{12} \neq 0$. On regroupe tous les termes en x_1 et x_2 :

$$q(x) \quad = \quad a_{12}x_1x_2 + \underbrace{x_1 \sum_{3\leq j} a_{1j}x_j}_{\phi_1(x)} + \underbrace{x_2 \sum_{3\leq j} a_{2j}x_j}_{\phi_2(x)} + \underbrace{\sum_{3\leq i<j} a_{ij}x_ix_j}_{q_2(x)}$$

On remarque que ϕ_1, ϕ_2 et q_2 sont nulles sur vect$\{e_1, e_2\}$.

$$\begin{aligned}
q(x) &= a_{12}\left(x_1x_2 + x_1\frac{\phi_1}{a_{12}} + x_2\frac{\phi_2}{a_{12}}\right) + q_2(x) \\
&= a_{12}\left(x_1 + \frac{\phi_2}{a_{12}}\right)\left(x_2 + \frac{\phi_1}{a_{12}}\right) - \frac{\phi_1\phi_2}{a_{12}} + q_2(x) \\
&= \frac{a_{12}}{4}\Bigg(\underbrace{x_1 + x_2 + \frac{\phi_2 + \phi_1}{a_{12}}}_{\ell_1(x)}\Bigg)^2 - \frac{a_{12}}{4}\Bigg(\underbrace{x_1 - x_2 + \frac{\phi_2 - \phi_1}{a_{12}}}_{\ell_2(x)}\Bigg)^2 + q_3(x) \\
&= \frac{a_{12}}{4}\ell_1^2(x) - \frac{a_{12}}{4}\ell_2^2(x) + q_3(x)
\end{aligned}$$

où q_3 est une forme quadratique nulle sur vect$\{e_1, e_2\}$. On recommence avec q_3, qu'on considère comme une forme quadratique définie sur vect$\{e_3, \dots, e_n\}$. On note que ℓ_1 et ℓ_2 sont indépendantes. De plus $\lambda_1\ell_1 + \lambda_2\ell_2$ est non nulle sur vect$\{e_1, e_2\}$ lorsque $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$, et est donc indépendante des formes linéaires apparaissant dans la décompositon de q_3.

Un raisonnement par récurrence montre que :

Théorème A.61. *La méthode de Gauss décompose q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.*

Déduction de la base orthogonale

On suppose que $q = \alpha_1\ell_1^2 + \cdots + \alpha_n\ell_n^2$, où $\{\ell_1, \cdots, \ell_n\}$ est libre dans E^* (au besoin, on a complété la famille libre produite par la méthode de Gauss en une base de E^*). On pose le changement de variable

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \vdots \\ \ell_n(x) \end{pmatrix} =: [\mathrm{id}]_{e\to e'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{A.62}$$

en exprimant les $\ell_i(x)$ en fonction des coordonnées de $[x]_e$, ce qui définit une base e' via l'identité $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i = \sum_{i=1}^n x'_ie'_i$. Cette base e' est q-orthogonale puisque $q(x) = \alpha_1{x'_1}^2 + \cdots + \alpha_n{x'_n}^2$.

On obtient les coordonnées $[e'_j]_e$ en inversant le système ou la matrice de (A.62), obtenant

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [\mathrm{id}]_{e' \to e} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

(le fait que les formes linéaires ℓ_i soient indépendantes équivaut à l'inversibilité de la matrice).

Exemple A.63. On reprend l'exemple A.58, la méthode de Gauss ayant donné

$$q(x) \quad = \quad (\underbrace{x_1 + x_2 - 2x_3}_{x'_1})^2 - 2\left[(\underbrace{x_2 + x_3}_{x'_2})^2 - 2(\underbrace{\ x_3\ }_{x'_3})^2\right]$$

qui conduit à $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & +x_2 & -2x_3 \\ & x_2 & +x_3 \\ & & x_3 \end{pmatrix} = [\mathrm{id}]_{e \to e'} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. On inverse le système (ou la matrice $[\mathrm{id}]_{e \to e'}$) en

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & -x'_2 & +3x'_3 \\ & x'_2 & -x'_3 \\ & & x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & +3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = [\mathrm{id}]_{e' \to e} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

d'où $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e'_3 = \begin{pmatrix} +3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dans la base e.

A.4 Classification des formes quadratiques en dimension finie

Une part des mathématiques consiste à classifier les objets mathématiques, c'est-à-dire à les regrouper en familles ayant des propriétés communes et éventuellement décrire la famille par un représentant canonique. Dans cette section on classifie les formes quadratiques $q \in \mathcal{Q}(E)$ en classes d'équivalence pour la relation d'équivalence : $q_1 \sim q_2$ s'il existe deux bases e, ε de E où q_1 et q_2 ont la même expression :

$$q_1\left(\sum x_i e_i\right) = \sum a_{ij} x_i y_j = q_2\left(\sum x_i \varepsilon_i\right) \tag{A.64}$$

D'un point de vue matriciel, cela équivaut à $[b_1]_e = [b_2]_\varepsilon$. D'un point de vue plus fondamental (valable en dimension infinie) :

Lemme A.65. *$q_1 \sim q_2 \iff \exists f : E \to E$ isomorphisme tel que $q_1 = q_2 \circ f$.*

Démonstration. En effet, étant données deux bases e, ε vérifiant (A.64), on définit f envoyant e sur ε, alors

$$q_1(x) = q_1\left(\sum x_i e_i\right) = q_2\left(\sum x_i \varepsilon_i\right) = q_2\left(\sum x_i f(e_i)\right) = q_2\left(f(\sum x_i e_i)\right) = q_2 \circ f(x)$$

donc $q_1 = q_2 \circ f$. Réciproquement, si $q_2 \circ f = q_1$, on choisit deux bases e, ε vénfient $\varepsilon = f(e)$, alors

$$q_2\left(\sum x_i \varepsilon_i\right) = q_2\left(\sum x_i f(e_i)\right) = q_2\left(f(\sum x_i e_i)\right) = q_1\left(\sum x_i e_i\right)$$

□

Deux formes quadratiques équivalentes ont même rang (immédiat en utilisant le point de vue matriciel). Les résultats principaux de cette section (A.66 et A.70) sont que les classes d'équivalence sont déterminées, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ par le rang r avec pour expression canonique

$$x_1^2 + \cdots + x_r^2,$$

et lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ par un couple d'entiers $(p_+, p_-) = (p, r-p)$ appelée la *signature* (cf section A.4.2) avec pour expression canonique

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

A.4.1 Classification des formes quadratiques sur les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

Théorème A.66. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soit q une forme quadratique sur E de rang r. Alors il existe alors une base q-orthogonale ε de E telle que*

$$q\left(\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i\right) = x_1^2 + \cdots + x_r^2, \qquad [b]_\varepsilon = \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0_{n-r} \end{pmatrix} \tag{A.67}$$

où I_r est la matrice identité de dimension r, 0_{n-r} la matrice nulle de dimension $n-r$. En conséquence deux formes quadratiques sur E sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Démonstration. Soit e une base q-orthogonale donnée par le corollaire A.53, de sorte que

$$q\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_r x_r^2,$$

où les $a_i \in \mathbb{C}$ sont non nuls. Soient $b_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ des racines carrées des a_i ($b_i^2 = a_i$), alors

$$\begin{aligned} q\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) &= b_1^2 x_1^2 + \cdots + b_r^2 x_r^2 \\ &= (b_1x_1)^2 + \cdots + (b_r x_r)^2 \\ &= (x_1')^2 + \cdots + (x_r')^2 \\ &= q\left(\sum_{i=1}^n x_i' \varepsilon_i\right) \end{aligned}$$

où $\left\{\begin{array}{lcll} x_i' & = & b_i x_i & \text{si } i \leq r \\ x_i' & = & x_i & \text{si } i > r \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{lcll} \varepsilon_i & = & b_i^{-1} e_i & \text{si } i \leq r \\ \varepsilon_i & = & e_i & \text{si } i > r \end{array}\right.$, ce qui montre (A.67). Deux formes quadratiques de rang r sont donc équivalentes. La réciproque est immédiate en considérant l'équivalence du point de vue matriciel. □

A.4.2 Classification des formes quadratiques sur les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels (théorème de Sylvester)

Dans cette section E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On peut donc parler de forme quadratique positive ou négative. On suppose E de dimension finie.

Définition A.68. On appelle **signature** de q (et de sa forme polaire b) le couple d'entiers (p_+, p_-) tel que

$$\begin{aligned} p_+ &= \max\{\dim(F) \ ; \ F \subset E \text{ sev tel que } q_{|F} \text{ soit définie positive}\} \\ p_- &= \max\{\dim(F) \ ; \ F \subset E \text{ sev tel que } q_{|F} \text{ soit définie négative}\} \end{aligned}$$

L'ensemble des sous-espaces vectoriels sur lesquels q est définie positive, resp. définie négative, est non vide puisque q est définie positive et définie négative sur $F := \{0\}$, donc la signature est bien définie. Si q est définie positive sur F_+ et définie négative sur F_-, alors $F_+ \cap F_- = \{0\}$, les deux espaces sont donc en somme directe. En conséquence $p_+ + p_- \leq \dim E$.

Théorème A.69 (Théorème d'inertie de Sylvester). *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit q une forme quadratique sur E de signature (p_+, p_-) et soit e une base q-orthogonale de E. Alors $[b]_e$ est diagonale avec sur la diagonale p_+ termes strictements positifs, p_- termes strictement négatifs et $n - p_+ - p_-$ zéros. Le rang de q est $p_+ + p_-$.*

Démonstration. Puisque e est q-orthogonale, quitte à renuméroter e on a

$$q\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_m x_m^2 + a_{m+1} x_{m+1}^2 + \cdots + a_{m+\ell} x_{m+\ell}^2$$

où $a_1, \cdots, a_m$ sont strictement positifs et $a_{m+1}, \cdots, a_{m+\ell}$ strictement négatifs. On pose

$$\begin{array}{rcll} E_+ & = & \mathrm{vect}\{e_1, \ldots, e_m\} & (\text{on pose } E_+ = \{0\} \text{ si } m = 0) \\ G & = & \mathrm{vect}\{e_{m+1}, \ldots, e_n\} & (\text{on pose } G = \{0\} \text{ si } m = n) \end{array}$$

Puisque $q_{|E_+}$ est définie positive, on a $p_+ \geq m$. Soit $F_+ \subset E$ un sous-espace vectoriel de dimension maximale sur lequel q est définie positive. Alors $\dim F_+ = p_+$. Comme $q_{|G}$ est négative on a $G \cap F_+ = \{0\}$. Puisque $G \oplus F_+ \subset E$ on en déduit $n - m + p_+ \leq n$ puis $p_+ \leq m$ et finalement $p_+ = m$. On montre que même que $p_- = \ell$. □

Corollaire A.70. *Soit q une forme quadratique sur E de signature $(p, r-p)$. Il existe alors une base q-orthogonale ε de E telle que*

$$q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i\right) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2, \qquad [b]_\varepsilon = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0_{n-r} \end{pmatrix} \quad (\text{A.71})$$

où I_p est la matrice identité de dimension p, 0_{n-r} la matrice nulle de dimension $n-r$. En conséquence, deux formes quadratiques sur E sont équivalentes si et seulement si elles ont même signature.

Démonstration. Soit e une base q-orthogonale donnée par le théorème A.51. Alors

$$q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_r x_r^2, \quad a_i \neq 0$$

Quitte à renuméroter e et utilisant le théorème A.69, on peut supposer $a_1, \ldots, a_p > 0$ et $a_{p+1}, \ldots, a_r < 0$. On a alors

$$\begin{aligned} q(x) &= (\sqrt{a_1} x_1)^2 + \cdots + (\sqrt{a_p}\, x_p)^2 - \left(\sqrt{|a_{p+1}|}\, x_{p+1}\right)^2 - \cdots - \left(\sqrt{|a_r|} x_r\right)^2 \\ &= (x_1')^2 + \cdots + (x_p')^2 - (x_{p+1}')^2 - \cdots - (x_r')^2 \\ &= q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i' \varepsilon_i\right) \end{aligned}$$

où on pose $\left\{\begin{array}{rcll} x_i' & = & \sqrt{|a_i|} x_i & \text{si } i \leq r \\ x_i' & = & x_i & \text{si } i > r \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{rcll} \varepsilon_i & = & \sqrt{|a_i|}^{-1} e_i & \text{si } i \leq r \\ \varepsilon_i & = & e_i & \text{si } i > r \end{array}\right.$, ce qui montre (A.71). On en déduit que deux formes quadratiques sur E de même signature sont équivalentes. Réciproquement, si $q_1 \sim q_2$ alors $q_1 = q_2 \circ f$ où $f : E \to E$ est l'isomorphisme donné par le lemme A.65. L'isomorphisme échange les sous-espaces $F \subset E$ où q_1 est définie positive, resp. définie négative, avec les espaces $f(F)$ où q_2 est définie positive, resp. définie négative. Il s'ensuit que q_1 et q_2 ont même signature. □

Remarque A.72. 1) Les produits scalaires de E sont les formes quadratiques de signature

$(n,0)$, ils sont équivalents entre eux.
2) Le corollaire A.70 montre l'existence de décompositions q-orthogonales $E = F_+ \oplus F_- \oplus N(q)$, où q est définie positive sur F_+ et définie négative sur F_-. On peut vérifier en considérant $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ sur $\mathbb{R}^2$ qu'une telle décomposition n'est pas unique.

Exercice A.73. (VRAI-FAUX) Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

(a) La signature de la forme quadratique $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2)$ sur $\mathbb{R}^3$ est $(3,0)$.

(b) Soit $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$ telle qu'il existe deux droites d_1 et d_2 en somme directe telles que q soit définie positive sur d_1 et sur d_2. Alors q est définie positive.

(c) Soit $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$ telle qu'il existe deux droites d_1 et d_2 telles que q soit définie positive sur d_1 et définie négative sur d_2. Alors q est de signature $(1,1)$.

(d) La somme de deux formes quadratiques de signature $(1,1)$ est une forme quadratique de signature $(1,1)$.

A.5 Formes quadratiques positives, Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

Dans cette section E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Proposition A.74. *Si q est une forme quadratique définie, elle est positive ou négative.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $x, y \in E$ tel que $q(x) > 0$ et $q(y) < 0$. En restriction à $F = \text{vect}\{x, y\}$ la forme quadratique q est de signature $(1,1)$ ($q_{|F}$ est définie positive sur $\mathbb{R}x$ mais pas sur F donc $p_+ = 1$; de même $p_- = 1$). Elle admet donc l'expression canonique $q_{|F}(x) = x_1^2 - x_2^2$ dans une base e de F donnée par le corollaire A.70. On voit que $q(e_1+e_2) = 0$, en contradiction avec l'hypothèse que q est définie. □

Théorème A.75 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit q une forme quadratique positive sur E, et b sa forme polaire. Alors pour tous $x, y \in E$,*

$$b^2(x,y) \leq q(x)q(y) \tag{A.76}$$

Si de plus q est définie, l'égalité est vraie si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration. Fixons $x, y \in E$. On définit pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P(t) &= q(x+ty) = b(x+ty, x+ty) \\ &= b(x,x) + 2tb(x,y) + t^2 b(y,y) \\ &= q(x) + 2tb(x,y) + t^2 q(y) \end{aligned}$$

qui est un polynome réel de degré ≤ 2. Puisque q est positive on a $P(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si $q(y) = 0$ alors P est de degré ≤ 1 et en fait de degré 0 (sinon $P(t)$ change de signe), donc $b(x, y) = 0$. Dans ce cas l'égalité est vérifiée dans (A.76) et si q est définie, alors $y = 0$ et les vecteurs x, y colinéaires. Supposons $q(y) \neq 0$, alors P est de degré 2. Puisque P est positif, son discriminant est négatif, donc $4b^2(x, y) - 4q(x)q(y) \leq 0$, prouvant l'inégalité (A.76). Le cas d'égalité dans (A.76) signifie que le discriminant de P est nul, donc que P admet une racine double. Dans ce cas il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $q(x + ty) = 0$ et si q est définie, on conclut que $x + ty = 0$. □

Corollaire A.77. *Soit q une forme quadratique positive, alors $I(q) = N(q)$ et q est définie si et seulement si elle est non dégénérée.*

Démonstration. On a toujours $N(q) \subset I(q)$. Réciproquement soit $y \in I(q)$, donc $q(y) = 0$. Pour tout $x \in E$, on a par Cauchy-Schwarz $b^2(x, y) \leq q(x)q(y) = 0$ donc $b(x, y) = 0$, d'où $y \in N(q)$. Alors q est définie $\Leftrightarrow I(q) = \{0\} \Leftrightarrow N(q) = \{0\} \Leftrightarrow q$ est non dégénérée. □

Proposition A.78 (Inégalité de Minkowski). *Soit q une forme quadratique positive sur E, alors*

$$\forall x, y \in E, \quad \sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)} \tag{A.79}$$

Démonstration. Puisque que ce sont des quantités positives,

$$\begin{aligned} \sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)} &\iff q(x+y) \leq q(x) + q(y) + 2\sqrt{q(x)q(y)} \\ &\iff \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right) \leq \sqrt{q(x)q(y)} \\ &\iff b(x, y)) \leq \sqrt{q(x)q(y)} \end{aligned}$$

qui est vraie par Cauchy-Schwarz. □

Chapitre B : espaces préhilbertiens, espaces euclidiens

Dans tout ce chapitre, les espaces vectoriels seront des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

B.1 Produit scalaire, généralités

On rappelle qu'un **produit scalaire** sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Définition B.1. Un **espace préhilbertien** (réel) est le couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ formé d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et d'un produit scalaire sur E. Si E est de dimension finie, le couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est appelé **espace euclidien**.

Exemple B.2. 1) $\mathbb{R}^n$ muni de $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$ est euclidien.
2) L'espace vectoriel $\ell^2(\mathbb{R}) = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^2 < \infty\}$ formé des suites réelles de carré sommable, muni de $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$, est préhilbertien. Cette somme est bien définie car $2 \sum_{i=n}^m |x_i y_i| \leq \sum_{i=n}^m |x_i|^2 + |y_i|^2$ montre que la suite $n \mapsto \sum_{i=0}^n x_i y_i$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc converge.
3) $\mathbb{R}[X]$ et $C([0,1], \mathbb{R})$ munis de $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$ sont préhilbertiens.

B.1.1 Norme, distance, angle

On définit la **norme euclidienne** associée à un produit scalaire par $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Proposition B.3. *Tout norme euclidienne est une norme, c'est-à-dire satisfait,*

(1) Pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

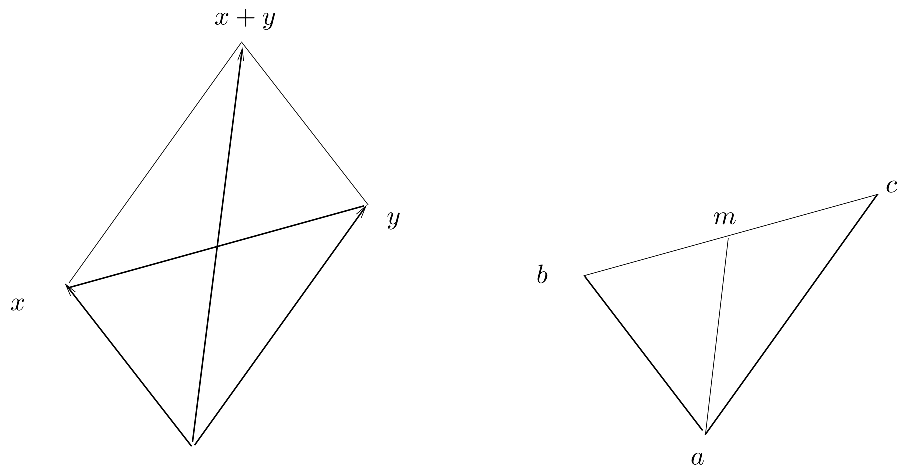
(2) Pour tous $x \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

(3) Pour tous $x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Démonstration. Les propriétés (1)(2) découlent des définititions et (3) est l'inégalité de Minkowski (A.79) pour la forme quadratique définie par $q(x) = \langle x, x \rangle$. □

Proposition B.4. *Une norme est euclidienne si et seulement si elle vérifie* **l'identité du parallélogramme**

$$\forall x, y \in E, \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \tag{B.5}$$



$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ $\qquad$ $\|\overrightarrow{am}\|^2 + \|\overrightarrow{mc}\|^2 = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{ab}\|^2 + \|\overrightarrow{ac}\|^2)$

Cette identité peut-être vue comme une généralisation du théorème de Pythagore : si $\overrightarrow{am} \perp \overrightarrow{mc}$ alors $\|\overrightarrow{ab}\| = \|\overrightarrow{ac}\|$ et donc $\|\overrightarrow{am}\|^2 + \|\overrightarrow{mc}\|^2 = \|\overrightarrow{ac}\|^2$.

Démonstration. Si la norme est euclidienne, on obtient par bilinéarité et symétrie, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$ et $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$. En sommant on obtient (B.5). Réciproque en exercice de TD. □

Proposition B.6. *Toute norme sur un espace vectoriel définit une distance par la formule $d(x, y) = \|x - y\|$. On appelle* **distance euclidienne** *une distance ainsi obtenue.*

Démonstration. Exercice. □

Soient x, y deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien. L'inégalité de Cauchy-Schwarz (A.76) dit que $\dfrac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\|y\|} \leq 1$. Il existe donc un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}$.

Définition B.7. On appelle **angle** entre x et y, noté $\sphericalangle(x,y)$,

$$\sphericalangle(x,y) = \arccos\left(\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}\right) \in [0,\pi].$$

Théorème B.8 (Pythagore généralisé). *Soient x, y deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien, alors*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \ + 2\|x\|\|y\| \cos(\sphericalangle(x,y)) \tag{B.9}$$

En conséquence $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si et seulement si $x \perp y$. Si $u_1, \ldots, u_k$ sont deux à deux orthogonaux alors

$$\|u_1 + \cdots + u_k\|^2 = \|u_1\|^2 + \cdots + \|u_k\|^2. \tag{B.10}$$

Démonstration. L'égalité (B.9) tient de $\langle x,y\rangle = \cos(\sphericalangle(x,y))\|x\|\|y\|$. Ensuite $x \perp y \Leftrightarrow \langle x,y\rangle = 0 \Leftrightarrow \cos(\sphericalangle(x,y)) = 0$. L'égalité (B.10) se montre par récurrence sur $k \geq 2$, utilisant le fait que si $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}$ sont deux à deux orthogonaux, alors $u_{k+1} \perp (u_1 + \cdots + u_k)$. □

Exercice B.11. (VRAI-FAUX) Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

(a) la norme L^1 de $\mathbb{R}^n$ ($\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$) est euclidienne.

(b) la norme L^∞ de $\mathbb{R}^n$ ($\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$) est euclidienne.

(c) Soir E un espace préhilbertien. On définit sur $E \setminus \{0\}$ l'inversion par $i(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$. Alors i est une involution ($i^2 = \mathrm{id}$) qui préserve les angles.

B.1.2 Théorème de représentation

Théorème B.12 (Toute forme linéaire sur un espace euclidien est le produit scalaire avec un vecteur). *Soit E un espace euclidien. Alors l'application $a \mapsto a^\flat := \langle a, \cdot\rangle$ est un isomorphisme de E sur E^*.*

Démonstration. L'application $a \mapsto a^\flat$ est clairement linéaire, injective puisque $a^\flat = 0 \Rightarrow 0 = a^\flat(a) = \langle a,a\rangle \Rightarrow a = 0$. Comme $\dim E = \dim E^*$, l'application est surjective. □

En particulier, pour tout $\ell \in E^*$, il existe un unique vecteur $\ell^\sharp \in E$ tel que $\ell(x) = \langle \ell^\sharp, x\rangle$ pour tout $x \in E$. Les applications $\flat : E \to E^*, a \mapsto a^\flat$ et $\sharp : E^* \to E, \ell \mapsto \ell^\sharp$, sont appelés **isomorphismes musicaux**. La structure de produit scalaire induit ainsi un isomorphisme $E \approx E^*$ indépendant d'un choix de bases sur E et E^*.

Remarque B.13. Le théorème B.12 a une généralisation en dimension infinie : le *théorème de représentation* de Riesz-Fréchet. Notons $E' \subset E^*$ le sous-espace vectoriel des formes linéaires continues, appelé le *dual topologique*. En dimension infinie, l'inclusion est toujours stricte $E' \subsetneq E^*$ (voir un exemple ci-dessous). Il est facile de voir que pour tout $a \in E$, $a^\flat = \langle a, \cdot \rangle \in E'$ (l'application $a^\flat$ est $\|a\|$-lipschitzienne, par Cauchy-Schwarz, donc continue), et la preuve du théorème B.12 montre que $E \ni a \mapsto a^\flat \in E'$ est linéaire injective. Le théorème de Riesz-Fréchet affirme que si E est un espace *de Hilbert*[1] (préhilbertien complet), cette application est un isomorphisme. Autrement dit, toute forme linéaire continue sur un espace de Hilbert est le produit scalaire avec un vecteur.

Exercice B.14. (exemple $E' \neq E^*$). Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. Soit $g_n \in E$ nulle sur $[1/n^2, 1]$, affine sur $[0, 1/n^2]$ telle que $g_n(0) = n$, et soit $f_n = \sqrt{g_n}$. Montrer que la suite (f_n) tend vers 0 dans E et en déduire que $\ell \in E^*$ définie par $\ell(f) = f(0)$ n'est pas continue.

Rappelons que $\mathscr{L}(E, E^*) \approx \mathcal{B}(E)$ (voir section A.2.3). Puisque l'isomorphisme musical $\sharp$ identifie $E^* \approx E$, il induit par composition un isomorphisme $\mathscr{L}(E, E^*) \approx \mathscr{L}(E, E)$, et on a donc un isomorphisme $\mathscr{L}(E, E) \approx \mathcal{B}(E)$. Précisément :

Proposition B.15. *Soit $(E, \langle \cdot, \rangle)$ un espace euclidien, alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E,E) & \to & \mathcal{B}(E) \\ f & \mapsto & b : (x,y) \mapsto \langle x, f(y) \rangle. \end{array}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Il est clair que l'application est linéaire et injective. C'est donc un isomorphisme par égalité des dimensions de $\mathscr{L}(E, E)$ et $\mathcal{B}(E)$. □

Exercice B.16. (VRAI-FAUX) Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

(a) Soient E un espace euclidien, e une base orthonormée de E et e^* la base duale de e. Alors $e_i^\flat = e_i^*$. De manière équivalente : pour tout $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$.

(b) On munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire canonique. Soit $u = (u_1, u_2)$ la base de $\mathbb{R}^2$ définie par $u_1 = (1, 0)$ et $u_2 = (1, 1)$. Alors $u_1^* = u_1^\flat - u_2^\flat$ et $u_2^* = u_2^\flat$.

1. On dit aussi *hilbertien*

B.2 Orthogonalité

B.2.1 Bases orthogonales, orthogonalisation de Gram-Schmidt

Proposition B.17. *Dans un espace préhilbertien, toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.*

Démonstration. Soit $(v_i)_{i\in I}$ une telle famille. Soit une combinaison linéaire nulle $\sum_{j\in J} \lambda_j v_j = 0$, où $J \subset I$ est fini. Alors pour $i \in J$

$$0 = \langle \sum_{j\in J} \lambda_j v_i, v_i \rangle = \sum_{j\in J} \lambda_j \langle v_j, v_i \rangle = \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle$$

puisque $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ si $i \neq j$, d'où $\lambda_i = 0$ puisque $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$. $\square$

Un produit scalaire sur un espace euclidien étant une forme bilinéaire de signature $(\dim E, 0)$, il découle du corollaire A.70 que :

Théorème B.18 (Théorème fondamental des espaces euclidiens). *Tout espace euclidien admet une base orthonormée.*

Si E euclidien est muni d'une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_n\}$, tout $x \in E$ vérifie

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, \qquad ||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \tag{B.19}$$

En effet si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ alors $\langle x, e_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \delta_i^j = x_j$. Notons que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_i^j$ implique

$$\langle x, y \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \rangle = \sum_{i,j} x_i y_j \delta_i^j = \sum_i x_i y_i = \langle [x]_e, [y]_e \rangle_{\mathbb{R}^n} \tag{B.20}$$

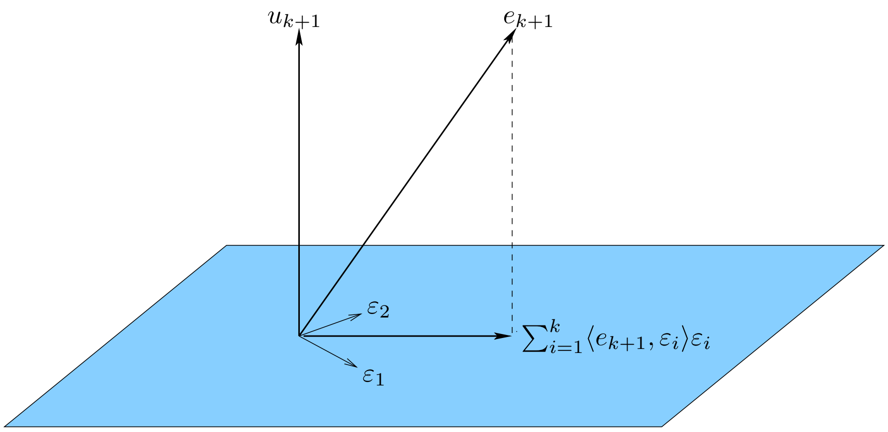
qui montre qu'à isomorphisme près ($x \mapsto [x]_e$), il n'y a qu'un espace euclidien de dimension n, $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

Pour les produits scalaires, il existe une autre méthode que la méthode de Gauss A.3.3 pour construire algorithmiquement des bases orthogonales.

Proposition B.21 (Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt). *Soit E un espace préhilbertien, $(e_n)_n$ une famille (finie ou dénombrable) libre de vecteurs. Alors il existe une unique famille orthogonale $(u_n)_n$ telle que pour tout k,* *(1)* $\mathrm{vect}\{e_1, \ldots, e_k\} = \mathrm{vect}\{u_1, \ldots, u_k\}$.

(2) La matrice de passage de $(e_1, \ldots, e_k)$ *à* $(u_1, \ldots, u_k)$ *est triangulaire supérieure idempotente (la diagonale est constituée de 1) :* $[\mathrm{id}]_{u \to e} = \mathrm{I}_k + N$*, où* $N_{ij} = 0$ *pour tout* $i \geq j$*.*

Démonstration. On construit $(u_n)_n$ par récurrence. On pose $u_1 = e_1$. Ayant défini $u_1, \ldots, u_k$ satisfaisant (1) et (2), on cherche un vecteur $u_{k+1} \in \mathrm{vect}\{e_1, \ldots, e_{k+1}\}$, orthogonal à $\mathrm{vect}\{u_1, \ldots, u_k\}$ et dont la composante sur e_{k+1} est 1. Cela revient à retrancher à u_{k+1} son projeté orthogonal sur $\mathrm{vect}\{u_1, \ldots, u_k\}$ (cf section B.2.2). Posant $\varepsilon_i = \dfrac{u_i}{\|u_i\|}$ pour $i \in \{1, \ldots, k\}$, la famille $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ est une base orthonormée de $\mathrm{vect}\{u_1, \ldots, u_k\}$.



Le vecteur u_{k+1} est donc de la forme

$$u_{k+1} = e_{k+1} + \lambda_1 \varepsilon_1 + \ldots + \lambda_k \varepsilon_k$$

ce qui assure que la matrice de passage est idempotente triangulaire supérieure. La condition $u_{k+1} \perp \varepsilon_i$ équivaut à $\langle u_{k+1}, \varepsilon_i \rangle = 0$, qui appliquée à l'équation ci-dessus conduit à

$$\langle u_{k+1}, \varepsilon_i \rangle = \langle e_{k+1}, \varepsilon_i \rangle + \lambda_i = 0$$

on pose donc

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= e_{k+1} - \langle e_{k+1}, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \cdots - \langle e_{k+1}, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k \\ &= e_{k+1} - \langle e_{k+1}, u_1 \rangle \frac{u_1}{\|u_1\|^2} - \cdots - \langle e_{k+1}, u_k \rangle \frac{u_k}{\|u_k\|^2} \end{aligned}$$

□

Corollaire B.22. *Sous les mêmes hypothèses, il existe une unique famille orthonormée* $(\varepsilon_n)_n$ *telle que pour tout* k*,* $\mathrm{vect}\{e_1, \ldots, e_k\} = \mathrm{vect}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ *et* $\langle e_k, \varepsilon_k \rangle > 0$.

Démonstration. On pose $\varepsilon_k = \dfrac{u_k}{\|u_k\|}$ où $(u_k)_k$ est la famille orthogonale construite par le procédé de Gram-Schmidt B.21. Puisque $0 < \langle u_k, u_k\rangle = \langle u_k, e_k + \sum_{i<k} \lambda_i e_i\rangle = \langle u_k, e_k\rangle$, on a également $\langle \varepsilon_k, e_k\rangle > 0$.

Pour l'unicité supposons que $(\varepsilon_k)_k$ et $(\varepsilon'_k)_k$ soient deux familles satisfaisant l'énoncé. Alors $E_k := \mathrm{vect}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\} = \mathrm{vect}\{\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_k\} =: E'_k$ pour tout k. Puisque $E_{k+1} = E'_{k+1}$ et $\varepsilon_{k+1} \perp E_k$ et $\varepsilon'_{k+1} \perp E'_k$, il s'ensuit que ε_k et ε'_k sont colinéaires, donc que $\varepsilon_k = \pm\varepsilon'_k$. Les conditions $\langle e_k, \varepsilon_k\rangle > 0$ et $\langle e_k, \varepsilon'_k\rangle > 0$ impliquent $\varepsilon_k = \varepsilon'_k$. □

Remarque B.23. Si $(e_n)_n$ est une famille libre d'un espace préhilbertien, et $F = \mathrm{vect}\{e_1, \dots, e_k\}$ un sous-espace vectoriel de E, l'orthogonalisation de Gram-Schmidt produit une famille orthogonale $(u_n)_n$ telle que $\{u_1, \dots, u_k\}$ est une base orthogonale de F, ce qu'on n'obtient pas à priori par la méthode de Gauss. En particulier, on peut compléter une base orthogonale d'un sous-espace F d'un espace euclidien en une base orthogonale de l'espace.

Les formules (B.19) se généralisent en dimension infinie, sous certaines conditions.

Proposition B.24. *Soit E un espace préhilbertien, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de E.*

(1) (Inégalité de Bessel) Pour tout $x \in E$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \langle x, e_i\rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

(2) Si $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i e_i$, (au sens que $\|x - \sum_{i=0}^{n} x_i e_i\| \to 0$ quand $n \to \infty$, où $x_i \in \mathbb{R}$), alors $x_i = \langle x, e_i\rangle$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et

$$\sum_{i=0}^{\infty} \langle x, e_i\rangle^2 = \|x\|^2.$$

Démonstration. (1) Notons $E_N = \mathrm{vect}\{e_0, \dots, e_N\}$ et posons $X_N = \sum_{i=0}^{N} \langle x, e_i\rangle e_i \in E_N$ (c'est le projeté orthogonal de x sur E_N, voir section B.2.2). Vérifions que $x - X_N \perp X_N$:

$$\langle x - X_N, X_N\rangle = \langle x, X_N\rangle - \langle X_N, X_N\rangle = \sum_{i=0}^{N} \langle x, e_i\rangle\langle x, e_i\rangle - \sum_{i=0}^{N} \langle x, e_i\rangle^2 = 0.$$

En écrivant $x = x - X_N + X_N$, on a donc par Pythagore

$$\|x\|^2 = \|x - X_N\|^2 + \|X_N\|^2 \geq \|X_N\|^2 = \sum_{i=0}^{N} \langle x, e_i\rangle^2$$

d'où $\|x\|^2 \geq \sum_{i=0}^{\infty} \langle x, e_i\rangle^2$ en faisant $N \to \infty$.

(2) Montrons que $x_i = \langle x, e_i \rangle$. Posons $X_N = \sum_{i=0}^{N} x_i e_i$, pour tout $N \geq i$ on a

$$\langle x, e_i \rangle = \langle x - X_N + X_N, e_i \rangle = \langle x - X_N, e_i \rangle + \langle X_N, e_i \rangle = \langle x - X_N, e_i \rangle + x_i$$

Or par Cauchy-Schwarz,

$$|\langle x - X_N, e_i \rangle| \leq \|x - X_N\| \|e_i\| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

Comme précédement, $x - X_N \perp X_N$ donc par Pythagore

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|x - X_N\|^2 + \|X_N\|^2 \\ &= \|x - X_N\|^2 + \sum_{i=0}^{N} \langle x, e_i \rangle^2 \\ &\xrightarrow[N \to \infty]{} 0 + \sum_{i=0}^{\infty} \langle x, e_i \rangle^2 \end{aligned}$$

d'où $\|x\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \langle x, e_i \rangle^2$. $\square$

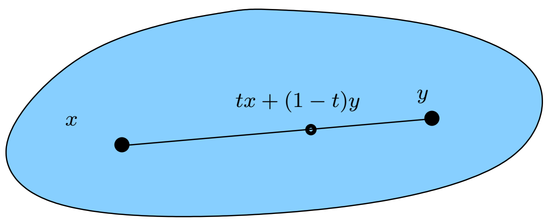
Remarque B.25. Une famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que tout $x \in E$ s'écrive $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i e_i$ est appelée **base hilbertienne** de E. Ce n'est pas à priori une base au sens usuel, où on demande que tout x soit combinaison linéaire finie des e_i (par exemple $\mathbb{R}[X]$ admet une base hilbertienne qui est une base au sens classique, mais $\ell_2(\mathbb{R})$ non). L'existence de base hilbertienne n'est pas garantie dans un espace préhilbertien quelconque, elle l'est dans un espace de Hilbert : il existe une famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\overline{\mathrm{vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\}} = E$, qui forme une base hilbertienne. (voir cours de L3 "Espaces de Hilbert-Analyse de Fourier").

Exercice B.26. (VRAI-FAUX) Décider si l'assertion suivante est vraie ou fausse.
Soit E un espace préhilbertien et $\{u_1, \dots, u_n\}$ une famille orthonormée de vecteurs de E. Soit $x \in E$, alors $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle^2$.

B.2.2 Théorèmes de projection

Définition B.27. Une partie $A \subset E$ d'un espace vectoriel E est dite **convexe** si

$$\forall x, y \in A, \ \forall t \in [0,1], \quad tx + (1-t)y \in A.$$



Définition B.28. Soit $A \subset E$ une partie non vide d'un espace vectoriel normé E, et soit $x \in E$.

On appelle **distance de x à A**

$$d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a) = \inf_{a\in A} \|x-a\|.$$

Théorème B.29 (Projection sur un convexe complet). *Soit $A \subset E$ une partie convexe, non vide, complète d'un espace préhilbertien E. Alors pour tout $x \in E$*

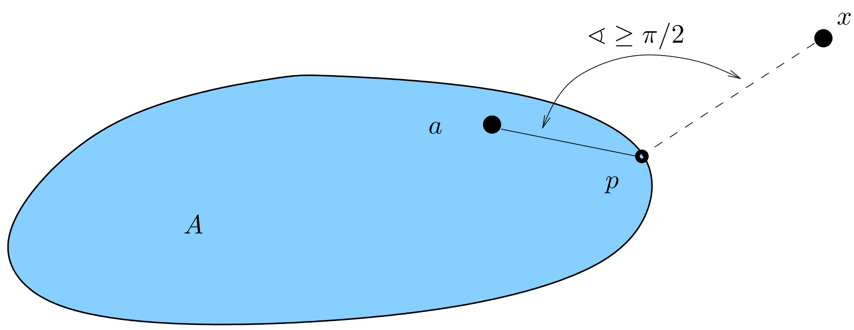
(1) Il existe un unique $p \in A$ tel que

$$d(x,A) = ||x-p|| \tag{B.30}$$

(2) p est l'unique point de A tel que

$$\forall a \in A, \quad \langle x-p, a-p\rangle \leq 0. \tag{B.31}$$

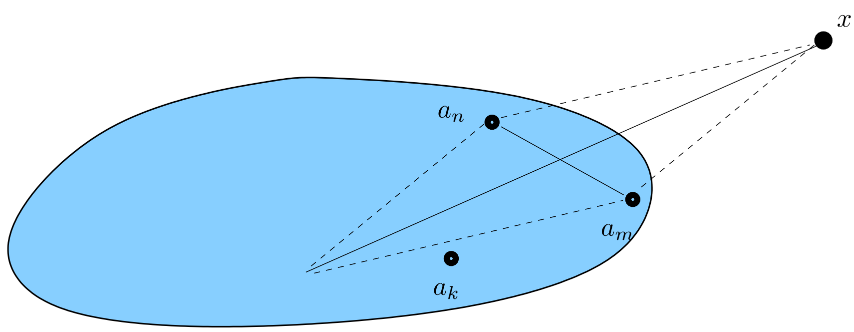
On appelle p le **projeté** *de x sur A.*



L'inégalité (B.31) équivaut à ce que l'angle $\sphericalangle(\overrightarrow{pa}, \overrightarrow{px})$ soit supérieur ou égal à $\pi/2$.

Démonstration. (1) On démontre l'existence d'un minimiseur de $\inf_{a\in A}\|x-a\|$ en prouvant qu'une suite minimisante est de Cauchy. Soient donc $x \in E$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A telle que $\lim_{n\to\infty}\|x-a_n\| = d(x,A)$. Puisque la norme est euclidienne, l'identité du parallélogramme (B.5) appliquée à $x-a_n$ et $x-a_m$ s'écrit

$$\|x-a_n+x-a_m\|^2 + \|a_m-a_n\|^2 \;=\; 2\|x-a_n\|^2 + 2\|x-a_m\|^2$$



donc

$$\|a_m - a_n\|^2 \;\leq\; 2\|x-a_n\|^2 + 2\|x-a_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{a_n+a_m}{2}\right\|^2.$$

En notant que $\dfrac{a_n+a_m}{2} \in A$ (par convexité de A), on en déduit

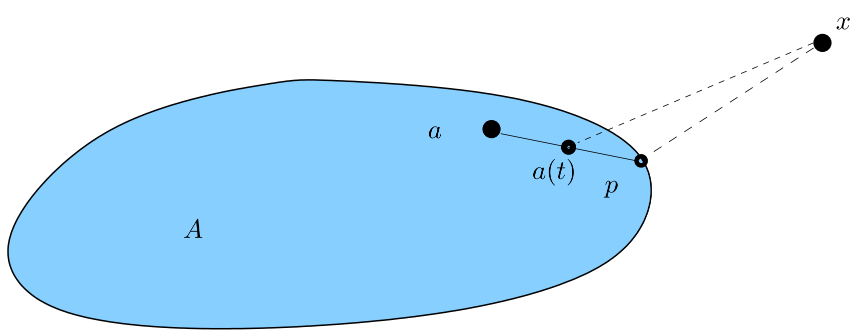
$$\|a_m - a_n\|^2 \;\leq\; 2\|x-a_n\|^2 + 2\|x-a_m\|^2 - 4\,d(x,A)^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

ce qui montre que (a_n) est de Cauchy. Puisque A est complet, (a_n) converge vers $p \in A$, qui vérifie alors $d(x,A) = ||x-p||$ par continuité de la norme. Pour démontrer l'unicité du minimiseur de $d(x,A)$, supposons que $d(x,C) = \|x-p\| = \|x-p'\|$ où $p,p' \in A$. L'identité du parallélogramme donne alors

$$\|p-p'\|^2 \;\leq\; 2\|x-p\|^2 + 2\|x-p'\|^2 - 4\,d(x,A)^2 \;=\; 0$$

d'où $p = p'$.
(2) Fixons $x \in E$, $a \in A$ et considérons pour tout $t \in [0,1]$

$$a(t) := ta + (1-t)p = p + t(a-p) \in A.$$



On a pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \|x-p\|^2 &\leq \|x-a(t)\|^2 = \|x-p-t(a-p)\|^2 \\ &= \|x-p\|^2 + t^2\|x-a\|^2 - 2t\langle x-p, a-p\rangle \end{aligned}$$

donc pour tout $t \in]0,1]$

$$0 \;\leq\; t\,\|x-a\|^2 - 2\langle x-p, a-p\rangle$$

ce qui donne, en passant à la limite $t\to 0$, que $\langle x-p, a-p\rangle \leq 0$. Ceci montre que le point $p \in A$ vérifiant (B.30) vérifie (B.31). Soit maintenant $p' \in A$ vérifiant (B.31), c'est-à-dire que pour tout $a \in A$, on a $\langle x-p', a-p'\rangle \leq 0$. Alors

$$\begin{aligned} \|x-p\|^2 &= \|x-p'+p'-p\|^2 \\ &= \|x-p'\|^2 + \|p'-p\|^2 + 2\langle x-p', p'-p\rangle \\ &\geq \|x-p'\|^2 \end{aligned}$$

puisque $\langle x-p', p'-p\rangle = -\langle x-p', p-p'\rangle \geq 0$ par hypothèse. Ceci montre que p' vérifie (B.30), et donc que $p' = p$. $\square$

Exercice B.32. Montrer que l'application $p_A : E \to A$, $x \mapsto p = p_A(x)$, est 1-lipschitz sur E.

Théorème B.33 (Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel complet). *Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel complet d'un espace préhilbertien E. Soit $x \in E$, alors*

(1) Il existe un unique $p \in F$ tel que

$$d(x, F) = ||x - p|| \tag{B.34}$$

(2) p est l'unique point de F tel que

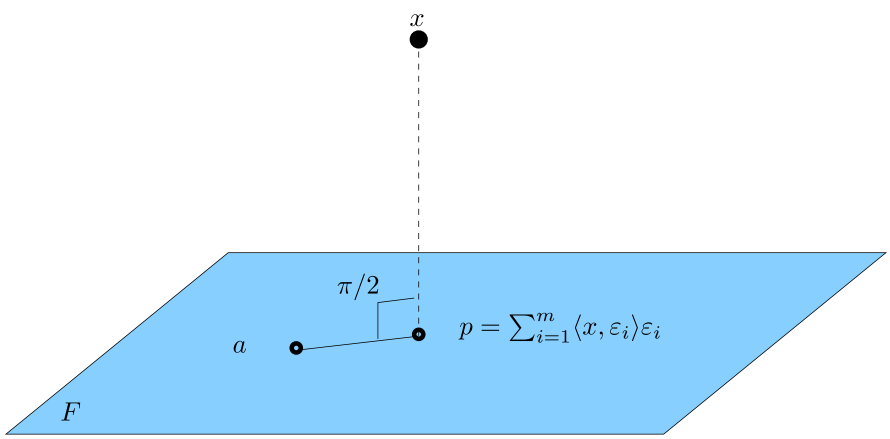
$$\forall a \in F, \quad \langle x - p, a - p \rangle = 0 \tag{B.35}$$

ce qui équivaut à $x - p \in F^{\perp}$.

Le point p est appelé **projeté orthogonal** *de x sur F, noté $p_F(x)$.*

(3) Si F est de dimension finie et $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$ est une base orthonormée de F, alors

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle x, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i \tag{B.36}$$



Démonstration. (1) résulte du théorème B.29 puisqu'un sous-espace vectoriel est convexe.
(2) il reste à montrer que pour tout $a \in F$, $\langle x - p, a - p \rangle \geq 0$, où $p \in F$ vérifie $\langle x - p, a - p \rangle \leq 0$. Soit $a \in F$, puisque $p \in F$ et F est un sous-espace vectoriel, il existe un point $a' \in F$ tel que $a' - p = -(a - p)$ (a' est l'opposé de a par rapport à p). On a alors

$$\langle x - p, a - p \rangle = -\langle x - p, a' - p \rangle \geq 0,$$

en utilisant l'inégalité (B.31) pour a'.
(3) on écrit $p_F(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varepsilon_i$, puis comme $(x - p_F(x)) \perp F$ que $0 = \langle x - p_F(x), \varepsilon_j \rangle = \langle x, \varepsilon_j \rangle - \langle p_F(x), \varepsilon_j \rangle$, d'où l'on obtient $\langle x, \varepsilon_j \rangle = \lambda_j$. □

Remarque B.37. Sont complets :
– les sous-espaces vectoriel fermés d'un espace de Hilbert. Dans un espace métrique complet, les parties complètes sont les parties fermées.
– les sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace préhilbertien, puisqu'ils sont isométriques à $\mathbb{R}^n$ [2]. En particulier :
– les sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien.

Corollaire B.38 (Décomposition orthogonale). *Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel complet d'un espace préhilbertien E. Alors*

(1) $E = F \oplus F^\perp$.

(2) $(F^\perp)^\perp = F$.

(3) Si E est euclidien, $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$.

Démonstration. (1) On a d'une part $F \cap F^\perp = \{0\}$ puisqu'un produit scalaire est défini. D'autre part, l'écriture $x = p_F(x) + (x - p_F(x)) \in F + F^\perp$ montre que $E = F + F^\perp$, d'où $E = F \oplus F^\perp$.
(2) On a toujours $F \subset (F^\perp)^\perp$: si $x \in F$, alors $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $y \in F^\perp$, donc $x \in (F^\perp)^\perp$. La réciproque est une conséquence de (1). Soit $x \in (F^\perp)^\perp$. Puisque $E = F \oplus F^\perp$, on peut écrire $x = x' + y$ où $x' \in F$ et $y \in F^\perp$. Puisque $x \in (F^\perp)^\perp$ et $y \in F^\perp$, on a

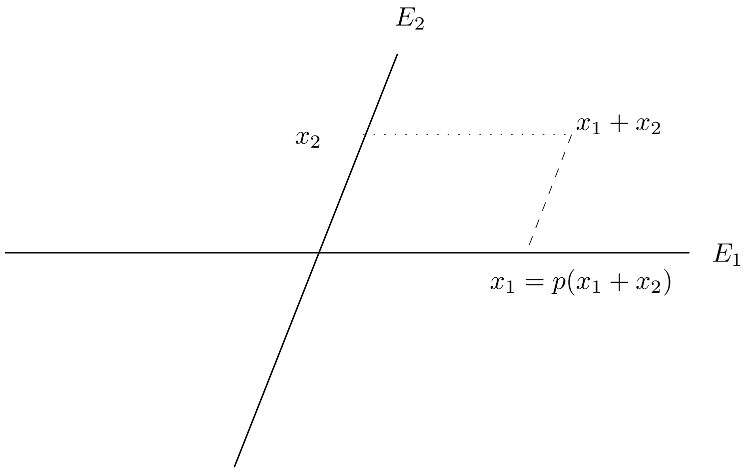
$$0 = \langle x, y\rangle = \langle x', y\rangle + \langle y, y\rangle = \langle y, y\rangle$$

donc $y = 0$ et $x = x' \in F$.
(3) est une conséquence de (1). □

Remarque B.39. (Exemple où $F \oplus F^\perp \neq E$ et $(F^\perp)^\perp \neq F$). Soit $E = \ell^2(\mathbb{R})$ l'espace (de Hilbert) des suites de carré sommable, muni de $\langle x, y\rangle = \sum x_i y_i$. Soit $F \subset E$ le sous-espace vectoriel formé des suites à support fini. On voit facilement que F n'est pas fermé. Notons $e_n \in F$ la suite définie par $e_n(m) = \delta_n^m$. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de F. Si $x \in \ell^2(\mathbb{R})$ est orthogonal à F, alors $\langle x, e_n\rangle = x_n = 0$ pour tout entier n, donc $x = 0$. Donc $F^\perp = \{0\}$, d'où $F \oplus F^\perp = F \neq E$ et $(F^\perp)^\perp = E \neq F$.

Définition B.40. Soit E un espace vectoriel admettant une décomposition $E = E_1 \oplus E_2$ en sous-espaces supplémentaires. Tout $x \in E$ s'écrivant de manière unique $x = x_1 + x_2$, où $x_i \in E_i$, on définit la *projection sur E_1 parallèlement à E_2* par $p_{E_1,E_2}(x) = x_1$.

2. Plus généralement, tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet, par équivalence des normes



Lorsque $E_1 \perp E_2$, la projection sur E_1 parallèlement à E_2 satisfait les conclusions du théorème B.33. Par exemple, pour tout $x \in E$, $p_{E_1,E_2}(x)$ est l'unique point de E_1 tel que $x - p_{E_1,E_2}(x) \in E_2 = E_1^\perp$, comme dans le point (2) du théorème. Dans cette situation, la projection orthogonale sur E_1 est définie sans hypothèse de complétude.

Exercice B.41. Soit $E = E_1 \oplus E_2$, on suppose $E_1 \perp E_2$.

(a) Vérifier que $E_2 = E_1^\perp$.

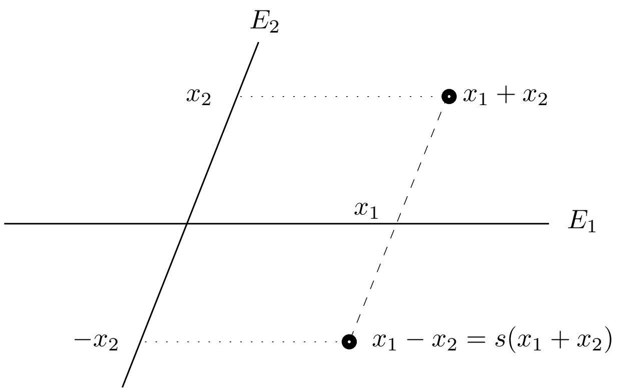
(b) Vérifier (avec Pythagore) que tour tout $a \in E_1$, on a $\|x - a\| \geq \|x - p_{E_1,E_2}(x)\|$, avec égalité si et seulement si $a = p_{E_1,E_2}(x)$.

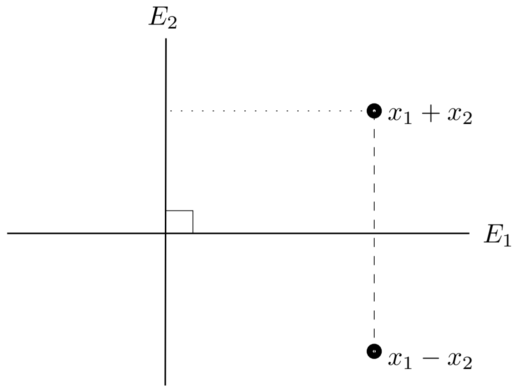
Proposition B.42. *Soit E un espace euclidien. Toute projection orthogonale p_F de E sur un sous-espace vectoriel F est diagonalisable dans une base orthonormée. Précisément, pour toute base orthonormée $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E telle que $\mathrm{vect}\{e_1, \ldots, e_k\} = F$, on a*

$$[p_F]_{e\to e} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\quad}^{F} & \overbrace{\qquad\quad}^{F^\perp} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Démonstration. Immédiat vu que $p_{F|F} = \mathrm{id}_F$ et $p_{F|F^\perp} = 0$. □

Définition B.43. Soit E un espace vectoriel admettant une décomposition $E = E_1 \oplus E_2$. On appelle **symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2** l'endomorphisme $s_{E_1,E_2} : E \to E$ défini par $s_{E_1,E_2}(x) = x_1 - x_2$, pour tout $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2$. Dans le cas d'une décomposition orthogonale $E = F \oplus F^\perp$, on appelle **symétrie orthogonale par rapport à** F cette application, notée s_F.





Observons que $s_F(x) = 2p_F(x) - x$, soit aussi $p_F(x) = \dfrac{x + s_F(x)}{2}$.

Proposition B.44. *Toute symétrie orthogonale préserve le produit scalaire, c'est-à-dire vérifie*

$$\forall x, y \in E \qquad \langle s_F(x), s_F(y)\rangle = \langle x, y\rangle. \tag{B.45}$$

En particulier $\|s_F(x)\| = \|x\|$ *pour tout* $x \in E$.

Démonstration. Soit $x, y \in E$. Ecrivant $x = x_1 + x_2 \in F \oplus F^\perp$ et $y = y_1 + y_2 \in F \oplus F^\perp$, on a, en utilisant que $\langle x_i, y_j\rangle = 0$ si $i \neq j$

$$\begin{aligned}
\langle s_F(x), s_F(y)\rangle &= \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2\rangle \\
&= \langle x_1, y_1\rangle - \langle x_1, y_2\rangle - \langle x_2, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle \\
&= \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_1, y_2\rangle + \langle x_2, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle \\
&= \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

□

Proposition B.46. *Soit E un espace euclidien. Toute symétrie orthogonale s_F de E par rapport à un sous-espace vectoriel F est diagonalisable dans une base* <u>*orthonormée*</u>*. Précisément, pour toute base orthonorméee $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E telle que* $\mathrm{vect}\{e_1, \ldots, e_k\} = F$*, on a*

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc}\overbrace{\hphantom{1\quad\ddots\quad 0}}^{F} & \overbrace{\hphantom{-1\quad\ddots\quad 0}}^{F^\perp}\end{array}\\
[s_F]_{e\to e} \quad = & \begin{pmatrix}
1 & & 0 & & & \\
 & \ddots & & & & \\
0 & & 1 & & & \\
 & & & -1 & & 0 \\
 & & & & \ddots & \\
 & & & 0 & & -1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Démonstration. Immédiat en notant que $s_{F|F} = \mathrm{id}_F$ et $s_{F|F^\perp} = -\mathrm{id}_{F^\perp}$. □

Exercice B.47. (Projecteurs et symétries)

(1) Soit $p : E \to E$ un endomorphisme tel que $p \circ p = p$. Montrer que $E = \mathrm{Im} p \oplus \ker p$ puis que $p = p_{\mathrm{Im} p, \ker p}$ (i.e. p est la projection sur $\mathrm{Im} p$ parallèlement à $\ker p$).

(2) Soit $s : E \to E$ un endomorphisme tel que $s \circ s = \mathrm{id}$. Montrer que $E = \ker(s - \mathrm{id}) \oplus \ker(s + \mathrm{id})$ puis que $s = s_{\ker(s-\mathrm{id}), \ker(s+\mathrm{id})}$ (i.e. s est la symmétrie par rapport à $\mathrm{Im} p$ parallèlement à $\ker p$).

B.2.3 Un exemple : les polynômes orthogonaux

On considère $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $\omega : I \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction C^1. Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on pose

$$\langle P, Q \rangle_\omega = \int_I P(t) Q(t) \omega(t) \, dt \tag{B.48}$$

(si I est non borné, on impose à ω de vérifier $|\int_I t^n \omega(t) \, dt| < \infty$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$, ce qui assure que $|\langle P, Q \rangle_\omega| < \infty$).

Lemme B.49. *$\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.*

Démonstration. Le fait que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ soit bilinéaire, symétrique et positif est immédiat. De plus $\langle P, P \rangle_\omega = 0$ si et seulement si $P^2 \omega = 0$ sur I (car c'est une fonction continue positive d'intégrale nulle), ce qui équivaut à $P = 0$ sur I (car $\omega > 0$) et finalement à $P = 0$ puisque c'est un polynôme. □

Le lemme est en fait vrai sous l'hypothèse plus générale que $\omega : I \to \mathbb{R}_+$ est continue positive non identiquement nulle. La base canonique $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ n'est pas orthogonale à priori. En fait elle ne l'est jamais, quelque soit I et ω.

Définition B.50. On appelle **polynômes orthogonaux** une base $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que P_n est de degré n pour chaque $n \in \mathbb{N}$, et $\langle P_n, P_m \rangle_\omega = 0$ pour tous $n \neq m$ dans $\mathbb{N}$.

Exemple B.51. Le procédé l'orthogonalisation de Gram-Schmidt appliqué à $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ donne des polynômes orthogonaux $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *unitaires*, c'est-à-dire telle que $P_n = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i$.

Par définition, pour toute famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polygones orthogonaux, $\{P_0, \ldots, P_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, le sous-espace des polynômes de degré $\leq n$, et P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Les

P_n satisfont une formule de récurrence :

Lemme B.52. *Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes orthogonaux unitaires. Alors pour tout entier $n \geq 1$,*

$$XP_n = P_{n+1} + a_n P_n + b_n P_{n-1} \tag{B.53}$$

où $a_n = \dfrac{\langle XP_n, P_n\rangle_\omega}{\langle P_n, P_n\rangle_\omega}$ et $b_n = \dfrac{\langle XP_n, P_{n-1}\rangle_\omega}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle_\omega}$.

Démonstration. Puisque $\deg(XP_n) = n+1$, on a $XP_n \in \mathrm{vect}\{P_0, \dots, P_{n+1}\}$, donc

$$XP_n = a_{n+1}P_{n+1} + a_n P_n + \cdots + a_0 P_0.$$

Puisque P_n et P_{n+1} sont unitaires, on a $a_{n+1} = 1$. Pour tout entier $j \leq n-2$, on a, puisque $XP_j \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \perp P_n$,

$$0 = \langle P_n, XP_j\rangle_\omega = \langle XP_n, P_j\rangle_\omega = a_j \langle P_j, P_j\rangle_\omega,$$

d'où $a_j = 0$. Ceci montre la relation (B.53). On calcule le coefficient a_n, resp. b_n, en faisant le produit scalaire de (B.53) avec P_n, resp. P_{n-1}. □

Une application à l'approximation. Supposons I compact et $\omega = 1$, alors $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ muni de $\langle\cdot,\cdot\rangle_\omega$ est préhilbertien. La norme euclidienne associée est la norme L^2, soit $\|f\|_2^2 = \int_I f^2(t)\,dt$. Identifions $\mathbb{R}[X]$ avec les fonctions polynomiales sur I, on peut alors écrie abusivement $\mathbb{R}[X] \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Proposition B.54. *Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes orthonormés. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$d_2(f, \mathbb{R}_n[X]) = d_2\left(f, \sum_{k=0}^{n} \langle f, P_k\rangle P_k\right).$$

Démonstration. Puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie, il est complet et le théorème B.33 s'applique. □

On peut montrer que la distance tend vers 0 quand le degré $n \to \infty$, à l'aide du résultat suivant :

Théorème B.55 (Stone-Weirstrass). *$\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.*

On a, puisque $\|f\|_2^2 = \int_I f^2(t)\,dt \leq \int_I \|f\|_\infty^2(t)\,dt < C\|f\|_\infty^2$, que $\mathbb{R}[X]$ est aussi dense dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_2$). Il s'ensuit que $d_2(f, \mathbb{R}_n[X])$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.

B.3 Endomorphismes adjoints

On note $\mathrm{End}(E) := \mathscr{L}(E,E)$ l'espace vectoriel formé des endomorphismes de E.

Définition B.56. Soit E un espace préhilbertien, et soit $f \in \mathrm{End}(E)$. On dit que $f^* \in \mathrm{End}(E)$ est l'endomorphisme **adjoint** de f si

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle. \tag{B.57}$$

Remarque B.58. 1) On vérifie sans peine que si l'adjoint existe, il est unique.
2) En inversant les variables x et y et par symétrie du produit scalaire, (B.57) équivaut à

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x, f(y)\rangle = \langle f^*(x), y\rangle. \tag{B.59}$$

Théorème B.60. *Soit E un espace euclidien et soit $f \in \mathrm{End}(E)$. Alors f admet un adjoint $f^* \in \mathrm{End}(E)$. Si $e = \{e_i\}$ est une base orthonormée de E, alors $[f^*]_{e\to e} = {}^t[f]_{e\to e}$.*

Démonstration. On utilise l'isomorphisme $\mathrm{End}(E) \approx \mathcal{B}(E)$ défini par $f \mapsto ((x,y) \mapsto \langle x, f(y)\rangle)$ (cf proposition B.15). Soit $f \in \mathrm{End}(E)$ et soit $b \in \mathcal{B}(E)$ la forme bilinéaire correspondante. On définit alors $b^* \in \mathcal{B}(E)$ par $b^*(x,y) := b(y,x)$, à laquelle B.15 associe un endomorphisme $f^* \in \mathrm{End}(E)$. On a pour tous $x, y \in E$

$$\langle x, f^*(y)\rangle = b^*(x,y) = b(y,x) = \langle y, f(x)\rangle = \langle f(x), y\rangle$$

donc $f*$ est bien l'adjoint de f. Soit e une base orthonormée de E, alors $[b]_e = [f]_{e\to e}$ et $[f^*]_{e\to e} = [b^*]_e = {}^t[b]_e = {}^t[f]_{e\to e}$. □

Exemple B.61. (Pas d'adjoint) Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini par $\langle X^n, X^m\rangle = \delta_n^m$. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$ défini par $f(X^n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si l'adjoint f^* existe, alors $1 = \langle f(X^n), 1\rangle = \langle X^n, f^*(1)\rangle$ pour tout n, ce qui est absurde puisque $f^*(1) \in \mathbb{R}[X]$ est de degré fini et donc $\langle X^n, f^*(1)\rangle = 0$ pour $n > \deg f^*(1)$.

Proposition B.62. *Soient $f, g \in \mathrm{End}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*

(1) $f^{**} = f$, $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$,

(2) $(f+g)^* = f^* + g^*$, $(\lambda f)^* = \lambda f^*$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

(3) $\mathrm{rg} f^* = \mathrm{rg} f$, $\det f^* = \det f$.

De plus, si f est un isomorphisme, alors f^* aussi et $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

Démonstration. Exercice. L'assertion sur l'isomorphisme découle de $(f \circ f^{-1})^* = \mathrm{id}^* = \mathrm{id}$. □

Proposition B.63. *Soient E un espace euclidien et $f \in \mathrm{End}(E)$, alors*

(1) $\ker f^* = (\mathrm{Im} f)^\perp$ *et* $\mathrm{Im} f^* = (\ker f)^\perp$

(2) $F \subset E$ *est f-stable si et seulement si $F^\perp$ est f^*-stable.*

Démonstration. (1) Soit $x \in E$, alors $x \in \ker f^* \Leftrightarrow f^*(x) = 0 \Leftrightarrow (\forall y \in E, \langle f^*(x), y\rangle = 0) \Leftrightarrow (\forall y \in E, \langle x, f(y)\rangle = 0) \Leftrightarrow x \in (\mathrm{Im} f)^\perp$. Ceci démontre que $\ker f^* = (\mathrm{Im} f)^\perp$. Cette égalité appliquée à l'endomorphisme f^* et le fait que $f^{**} = f$ implique que $\ker f = (\mathrm{Im} f^*)^\perp$, et donc que $(\ker f)^\perp = (\mathrm{Im} f^*)^{\perp\perp} = \mathrm{Im} f^*$.
(2) Supposons que $f(F) \subset F$, et soit $x \in F^\perp$ et $y \in F$. On a $\langle f^*(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = 0$ puisque $f(y) \in F$. Ceci démontre que $f^*(F^\perp) \subset F^\perp$. La réciproque découle de cette implication appliquée à $F^\perp$ et f^*. □

Corollaire B.64. *Soit E un espace euclidien et $f \in \mathrm{End}(E)$, alors on a les décompositions orthogonales*

$$E = \ker f \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im} f^* = \ker f^* \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im} f.$$

Démonstration. On a $E = \ker f \oplus (\ker f)^\perp = \ker f \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im} f^*$ et $E = \ker f^* \oplus (\ker f^*)^\perp = \ker f^* \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im} f$. □

Exercice B.65. Soit e une base quelconque de E, montrer que $[f^*]_{e\to e} = G^{-1}({}^t[f]_{e\to e})G$, où G est la matrice de Gram du produit scalaire dans la base e, i.e. $G = (\langle e_i, e_j\rangle)$. (traduire matriciellement (B.57))

B.4 Endomorphismes symétriques, ou autoadjoints

B.4.1 Généralités

Définition B.66. Un endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ d'un espace préhilbertien est **symétrique**, ou **auto-adjoint**, si

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$

Remarque B.67. 1) f est symétrique $\Longleftrightarrow f^* = f$.

2) f est symétrique $\Longleftrightarrow$ la forme bilinéaire définie par $b(x, y) := \langle x, f(y)\rangle$ est symétrique.

3) Si e est orthonormée, alors f est symétrique $\Longleftrightarrow [f]_{e\to e}$ est symétrique.

Les projections orthogonales et symétries orthogonales sont des endomorphismes symétriques, puisqu'ils admettent une matrice diagonale (donc symétrique) dans une base orthonormée (cf Propositions B.42 et B.46). En fait, le fait d'être symétrique caractérise, parmi les projections et symétries, les projections orthogonales et les symétries orthogonales. Rappelons que si E a une décomposition en deux espaces supplémentaires $E = F \oplus G$ (non nécessairement orthogonaux), on désigne par $p_{F,G}$, resp. $s_{F,G}$, la projection sur F parallèlement à G, resp. symétrie par rapport à F parallèlement à G (cf. définitions B.40 et B.43).

Proposition B.68. *Soit $E = F \oplus G$ un espace préhilbertien, alors*

(1) $p_{F,G}$ est un endomorphisme symétrique $\Longleftrightarrow G = F^{\perp}$.

(2) $s_{F,G}$ est un endomorphisme symétrique $\Longleftrightarrow G = F^{\perp}$.

Démonstration. (1) Il s'agit de montrer $\Longrightarrow$. Soient $x \in F$ et $y \in G$, notons $p = p_{F,G}$, alors

$$\langle x, y\rangle = \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle = \langle x, 0\rangle = 0,$$

donc $G \subset F^{\perp}$. Réciproquement, soit $y \in F^{\perp}$. Comme $G \subset F^{\perp}$, l'unique décomposition $y = y_F + y_G \in F \oplus G$ est également l'unique décomposition dans $F \oplus F^{\perp}$. On a donc $y_F = 0$, soit $y = y_G \in G$.
(2) Il s'agit de montrer $\Longrightarrow$. Soient $x \in F$ et $y \in G$, notons $s = s_{F,G}$, alors

$$\langle x, y\rangle = \langle s(x), y\rangle = \langle x, s(y)\rangle = \langle x, -y\rangle$$

donc $\langle x, y\rangle = 0$ et on conclut comme en (1). □

On voit donc qu'une symétrie est symétrique si et seulement si c'est une symétrie orthogonale. Ce phénomène de "rigidité" est en fait emblématique des endomorphismes symétriques, comme le montre l'important théorème suivant.

B.4.2 Le théorème spectral

Théorème B.69 (Théorème spectral). *Soient E un espace euclidien et $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme symétrique, alors f est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.*

Démonstration. Il suffit de montrer que les sous-espaces propres E_{λ_i} d'un endomorphisme symétrique de E réalisent une décomposition orthogonale : $E = E_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_k}$. Ceci prouve que l'endomorphisme est diagonalisable, et on obtient une base orthonormée de vecteurs propres en prenant, dans chaque sous-espace propre, une base orthonormée, et en en faisant la réunion. La preuve a 2 étapes.

Etape 1 : *Le polynôme caractéristique de tout $f \in \mathrm{End}(E)$ symétrique est scindé dans $\mathbb{R}$.*

En fait il suffira à l'étape 2 de savoir que le polynôme caractéristique a au moins une racine réelle. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$ symétrique. On sait que le polynôme caractéristique de f est scindé dans $\mathbb{C}$, il suffit donc de montrer que chaque racine complexe du polynôme est réelle. Soient $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base orthonormée de E et $A = [f]_{e \to e} \in \mathrm{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine du polynôme caractéristique de f, c'est-à-dire vérifiant $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre tel que $AX = \lambda X$. Le fait que A soit à coefficients réels implique quele vecteur conjugué $\overline{X}$ est vecteur propre de A associé à $\overline{\lambda}$:

$$A\overline{X} = \overline{A}\,\overline{X} = \overline{AX} = \overline{\lambda X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}.$$

Notons que

$$ {}^t X\overline{X} = \sum x_i \overline{x_i} = \sum |x_i|^2 \neq 0. \tag{B.70}$$

D'après la remarque B.67, A est symétrique, on a donc

$$ {}^t(AX)\overline{X} = {}^t X\, {}^t A\overline{X} = {}^t X A\overline{X} = {}^t X\overline{\lambda}\,\overline{X} = \overline{\lambda}\, {}^t X\overline{X}.$$

On a également

$$ {}^t(AX)\overline{X} = {}^t(\lambda X)\overline{X} = \lambda\, {}^t X\overline{X},$$

d'où l'égalité $\overline{\lambda}\, {}^t X\overline{X} = \lambda\, {}^t X\overline{X}$. On conclut à l'aide de (B.70) que $\overline{\lambda} = \lambda$.

Etape 2 : *Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique de E réalisent une décomposition orthogonale de E.*

Par récurrence sur $n = \dim E$. Si $n = 1$, il n'y a rien à montrer. Fixons $n \geq 1$ et supposons l'assertion vraie pour tout espace euclidien de dimension $\leq n$. Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$, et soit $f \in \mathrm{End}(E)$ symétrique. D'après l'étape 1, l'endomorphisme f admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ et donc un espace propre $E_\lambda \neq \{0\}$. Puisque E est euclidien on a une décomposition orthogonale $E = E_\lambda \oplus E_\lambda^\perp$, où on sait que $\dim E_\lambda \geq 1$ et $\dim E_\lambda^\perp \leq n$. Puisque E_λ est stable par f, la proposition B.63 montre que $E_\lambda^\perp$ est stable par $f^* = f$. Comme la restriction de f à l'espace euclidien $E_\lambda^\perp$ est encore un endomorphisme symétrique, l'hypothèse de récurrence permet de conclure. □

Remarque B.71. On appelle parfois ce résultat "diagonalisation simultanée" ou "orthogonalisation simultanée". En effet si b est la forme bilinaire symétrique définie par $b(x,y) = \langle x, f(y)\rangle$, alors la base orthonormée de vecteurs propres de f orthogonalise simultanément $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et b. Plus généralement, considérons deux formes quadratiques q_1 et q_2 sur un espace vectoriel E de dimension finie, avec q_1 définie positive. On peut orthogonaliser simultanément q_1 et q_2 en procédant comme suit. Notons b_i la forme polaire de q_i, alors (E, b_1) est un espace euclidien. En conséquence, le théorème de représentation B.12 (voir aussi la proposition B.15) donne un endomorphisme f tel que $b_2(x,y) = b_1(x, f(y))$. Puisque b_2 est symétrique, f est symétrique pour b_1. Le théorème spectral appliqué sur l'espace euclidien (E, b_1) à l'endomorphisme f donne une base b_1-orthonormée de vecteurs propres de f, donc b_2-orthogonale.

Corollaire B.72. *Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques sur un espace vectoriel E de dimension finie, où q_1 est définie positive. Alors il existe une base de E qui est q_1-orthonomée et q_2-orthogonale.*

Corollaire B.73 (Théorème spectral, version matricielle). *Soit $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors*

(1) M est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

(2) Il existe une matrice $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1} = {}^tP$ et une matrice diagonale D telle que
$$ {}^tPMP = P^{-1}MP = D. $$

Une matrice P vérifiant $P^{-1} = {}^tP$, ou de manière équivalente ${}^tP \cdot P = I_n$, est dite **orthogonale** (voir section B.5).

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme défini par $f(X) = M \cdot X$. Notons e la base canonique de $\mathbb{R}^n$, de sorte que $[f]_{e\to e} = M$. Puisque $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique, e est orthonormée et f symétrique puisque ${}^tM = M$. Soit $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ une base orthonormée de vecteurs propres de f donnée par le théorème spectral B.69. Alors ε est une base orthonormée de vecteurs propres de M. Soit $P = [\mathrm{id}]_{\varepsilon\to e}$ la matrice de passage de e à ε, dont la j-ième colonne est simplement $[\varepsilon_j]_e$. Le coefficient i, j de ${}^tP \cdot P$ satisfait (cf (B.20))

$$ ({}^tP \cdot P)_{ij} = {}^t[\varepsilon_i]_e \cdot [\varepsilon_j]_e = \langle [\varepsilon_i]_e, [\varepsilon_j]_e \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_i^j \tag{B.74} $$

donc ${}^tP \cdot P = \mathrm{I}_n$. Soit $D = [f]_{\varepsilon\to\varepsilon}$. C'est une matrice diagonale, et la formule de changement de base pour les applications linéaires donne

$$ D = [f]_{\varepsilon\to\varepsilon} = P^{-1}MP = {}^tPMP. $$

□

Corollaire B.75. *Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, $b \in \mathcal{S}(E)$ une forme bilinéaire symétrique et e une base de E. Alors b est positive, resp. définie positive, si et seulement si les valeurs propres de $[b]_e$ sont toutes positives, resp. strictement positives.*

Démonstration. Munissons E d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que e soit orthonormée. D'après le théorème d'orthogonalisation simultanée B.69 (cf remarque B.71) il existe une base orthonormée ε qui est b-orthogonale. Soit $P = [\mathrm{id}]_{\varepsilon\to e}$ la matrice de passage de e à ε. Le même calcul qu'en (B.74) montre que ${}^tP = P^{-1}$. La relation

$$ [b]_\varepsilon = {}^tP[b]_eP = P^{-1}[b]_eP $$

montre que $[b]_\varepsilon$ et $[b]_e$ ont les mêmes valeurs propres. Puisque ε est b-orthogonale, b est positive, resp. définie positive, si et seulement si les termes diagonaux de $[b]_\varepsilon$ sont tous positifs, resp.

strictement positifs, d'où la conclusion. $\square$

B.4.3 Applications : racine carrée d'endomorphisme symétrique positif, extrema

Définition B.76. Soit E un espace euclidien, on dit qu'un endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ est positif, resp. négatif, resp. définie, si la forme bilinéaire définie par $b(x, y) = \langle x, f(y)\rangle$ est positive, resp. négative, resp. définie.

Proposition B.77 (Racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif). *Soit E un espace euclidien et soit $f \in \mathrm{End}(E)$ symétrique et positif, alors il existe un unique $g \in \mathrm{End}(E)$ symétrique et positif tel que $f = g \circ g$.*

Démonstration. Soit ε une base orthonormée de vecteurs propres de f donnée par le théorème spectral B.69. Soit $b \in \mathcal{S}(E)$ la fome bilinéaire symétrique définie par $b(x, y) = \langle x, f(y)\rangle$. Alors $[b]_\varepsilon$ est diagonale, formée des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de f. Puisque f, donc b, est positif, ces valeurs propres sont positives. On définit $g \in \mathrm{End}(E)$ en posant $g(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i}\varepsilon_i$ pour tout i. Clairement, $g \circ g = f$, g est symétrique puisque $[g]_\varepsilon$ est diagonale, donc symétrique, dans une base orthonormée, et g est positif. Ceci montre l'existence. Pour l'unicité, supposons que $h \in \mathrm{End}(E)$ soit symétrique, positif et vérifie $f = h \circ h$. Le théorème spectral implique que E a une décomposition orthogonale en sous-espaces propres de h. Soient E_λ un sous-espace propre de h et $x \in E_\lambda \setminus \{0\}$. Alors $f(x) = h \circ h(x) = h(\lambda x) = \lambda^2 x$, ce qui montre que E_λ est contenu dans un sous-espace propre de f de valeur propre λ^2. Il s'ensuit que les décompositions orthogonales de E en sous-espaces propres de f et de h coincident, et que λ est valeur propre de h si et seulement si λ^2 est valeur propre de f. Comme h est positif, toute valeur propre λ est positive, et on conclut que $h = g$. $\square$

Proposition B.78. *Soit E un espace euclidien non nul, et soit $f \in \mathrm{End}(E)$ symétrique, alors*

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\|=1} \langle f(x), x\rangle &= \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} &= \sup\{\mathrm{spec}(f)\} \\ \inf_{\|x\|=1} \langle f(x), x\rangle &= \inf_{\|x\|\neq 0} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} &= \inf\{\mathrm{spec}(f)\} \end{aligned}$$

où $\mathrm{spec}(f)$ est l'ensemble des valeurs propres de f.

Démonstration. Les égalités de gauche résultent de $\dfrac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} = \langle f(\frac{x}{\|x\|}), \frac{x}{\|x\|}\rangle$.
Pour montrer les égalités de droite, fixons $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ une base orthonormée de vecteurs

propres de f donnée par le théorème spectral B.69 et $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. On peut supposer ε numérotée de sorte que $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Alors pour tout $x = \sum x_i \varepsilon_i$ non nul, en notant que $f(x) = \sum x_i \lambda_i \varepsilon_i$, on a

$$\lambda_1 \|x\|^2 = \sum \lambda_1 x_i^2 \leq \sum \lambda_i x_i^2 \, (= \langle f(x), x \rangle) \leq \sum \lambda_n x_i^2 = \lambda_n \|x\|^2$$

d'où le résultat en divisant par $\|x\|^2 \neq 0$. □

Rappelons que la matrice hessiène d'une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est la matrice de ses dérivées partielles secondes, c'est une matrice symétrique donc diagonalisable. On rappelle un résultat vu en analyse :

Proposition B.79. *Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2, $p \in \mathbb{R}^2$ un point critique de F, et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de la matrice hessiènne de F en p.*

(1) Si $\lambda_1 > 0$, alors F admet un minimum local strict en p,

(2) Si $\lambda_2 < 0$, alors F admet un maximum local strict en p,

(3) Si $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, alors F admet un point selle en p.

Démonstration. Soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. La formule de Taylor à l'ordre 2 donne

$$\begin{aligned} F(p+h) &= F(p) + \langle \nabla_p F, h \rangle + (h_1, h_2) \cdot \mathrm{Hess} f(p) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(\|h\|^2) \\ &= F(p) + b(h,h) + \|h\|^2 \varepsilon(h) \end{aligned}$$

où b est la forme bilinéaire symétrique de matrice $\mathrm{Hess} f(p)$ dans la base canonique et $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Dans le cas (1), b est définie positive et de plus

$$b(h,h) + \|h\|^2 \varepsilon(h) \geq \lambda_1 \|h\|^2 + \|h\|^2 \varepsilon(h) = (\lambda_1 + \varepsilon(h)) \|h\|^2 > 0$$

pour tout h non nul assez proche de 0. Dans le cas (2),

$$b(h,h) + \|h\|^2 \varepsilon(h) \leq \lambda_2 \|h\|^2 + \|h\|^2 \varepsilon(h) = (\lambda_2 + \varepsilon(h)) \|h\|^2 < 0$$

pour tout h non nul assez proche de 0. Soit $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ des vecteurs propres orthonormés de $\mathrm{Hess} f(p)$ associés à λ_1, λ_2. Dans le cas (3), b est de signature (1,1) et on a

$$b(h_1\varepsilon_1, h_1\varepsilon_1) + \|h_1\varepsilon_1\|^2 \varepsilon(h_1\varepsilon_1) = \lambda_1 h_1^2 + h_1^2 \varepsilon(h_1\varepsilon_1) < 0$$

pour tout h_1 non nul proche de 0, et

$$b(h_2\varepsilon_2, h_2\varepsilon_2) + \|h_2\varepsilon_2\|^2 \varepsilon(h_2\varepsilon_2) = \lambda_2 h_2^2 + h_2^2 \varepsilon(h_2\varepsilon_2) > 0$$

pour tout h_2 non nul proche de 0. On voit donc que $F(p+h) - F(p)$ change de signe dans tout voisinage de p. □

Exercice B.80. (a) Soient e une base quelconque d'un espace préhilbertien E de dimension finie, soient $f \in \mathrm{End}(E)$ et $A := [f]_{e \to e}$. Montrer que f est symétrique si et seulement si ${}^tAG = GA$, où G est la matrice du produit scalaire dans la base e.

(b) Soient E est euclidien et $f \in \mathrm{End}(E)$. Montrer que $f \circ f^*$ et $f^* \circ f$ sont symétriques positifs, et définis si f^* est injectif, resp. f est injectif.

B.5 Endomorphismes orthogonaux

Soit E un espace préhilbertien, non réduit à $\{0\}$. Les distances et normes considérées seront les distances et normes euclidiennes associées au produit scalaire de E.

B.5.1 Applications orthogonales et isométries

Définition B.81. Une application $f : E \to E$ est **orthogonale** si

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \tag{B.82}$$

C'est une **isométrie** si

$$\forall x, y \in E, \quad d(f(x), f(y)) = d(x, y). \tag{B.83}$$

Remarque B.84. Si $f : E \to E$ est orthogonale alors

1) f préserve l'orthogonalité : si $x \perp y$, alors $0 = \langle x, y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle$ donc $f(x) \perp f(y)$.
2) f préserve la norme : $\forall x \in E$, $||f(x)|| = ||x||$.
3) f préserve les angles :

$$\sphericalangle(f(x), f(y)) = \arccos\left(\frac{\langle f(x), f(y) \rangle}{\|f(x)\|\|f(y)\|}\right) = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}\right) = \sphericalangle(x, y).$$

4) f est linéaire (voir lemme B.85(1) ci-dessous).
5) f est une isométrie :

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= ||f(x) - f(y)|| \\ &= ||f(x - y)|| \quad \text{(par linéarité)} \\ &= ||x - y|| \quad \text{(préserve la norme)} \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

6) Une isométrie n'est pas nécessairement linéaire, donc pas nécessairement orthogonale : pour $v \in E \setminus \{0\}$ fixé, la translation $x \mapsto x + v$ est une isométrie non linéaire. Cependant une isométrie linéaire, et plus simplement une isométrie fixant 0, est orthogonale :

Lemme B.85. *Soit $f : E \to E$ une application.*

(1) Si f est orthogonale, alors elle est linéaire et injective. Si E est de dimension finie, alors f est un automorphisme (i.e. un isomorphisme de E).

(2) Si f est une isométrie fixant 0, alors f est orthogonale.

Démonstration. (1) Soit $f : E \to E$ orthogonale, montrons que f est linéaire. Fixons $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|^2 &= \langle f(x+y), f(x+y)\rangle - 2\langle f(x+y), f(x)\rangle - 2\langle f(x+y), f(y)\rangle \\
&\quad + \langle f(x), f(x)\rangle + 2\langle f(x), f(y)\rangle + \langle f(y), f(y)\rangle \\
&= \langle x+y, x+y\rangle - 2\langle x+y, x\rangle - 2\langle x+y, y\rangle \\
&\quad + \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \langle x+y, x+y\rangle - 2\langle x+y, x+y\rangle + \langle x+y, x+y\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc $f(x+y) = f(x) + f(y)$. On montre de même que $\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|^2 = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (exercice), ce qui montre la linéarité de f. L'injectivité s'en déduit : puisque f est linéaire, f est injective si et seulement si $\ker f = \{0\}$, ce qui découle immédiatement de la préservation du produit scalaire (B.82).
(2) Soit f une isométrie fixant 0, alors pour tous $x, y \in E$ on a

$$\|f(x) - f(y)\| = d(f(x), f(y)) = d(x, y) = \|x - y\|$$

et en particulier $\|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| = \|x\|$. On en déduit en développant $\|f(x) - f(y)\|^2 = \|x - y\|^2$ et en simplifiant que $-2\langle f(x), f(y)\rangle = -2\langle x, y\rangle$. □

Remarque B.86. Si E est de dimension infinie, une application orthogonale n'est pas nécessairement surjective. Exemple : sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire tel que $\langle X^n, X^m\rangle = \delta_n^m$, l'endomorphisme engendré par $X^n \mapsto X^{n+1}$ est orthogonal mais pas surjectif.

Définition B.87. On note $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{End}(E)$ l'ensemble des applications orthogonales de E. Lorsque E est euclidien, $\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{End}(E)$ pour la loi de composition (cf B.93). On note $\mathrm{Aut}(E) \subset \mathrm{End}(E)$ le sous-groupe formé par les automorphismes, et $\mathrm{Isom}(E)$ l'ensemble des isométries.

Corollaire B.88. *Soit $f \in \mathrm{Isom}(E)$. Alors il existe un unique couple $g \in \mathrm{O}(E)$ et $v \in E$ tel que,*

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x) + v.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{Isom}(E)$. Définissons $g : E \to E$ par $g(x) = f(x) - f(0)$ pour tout $x \in E$, et posons $v = f(0)$. Il est clair que $g(0) = 0$. Par ailleurs g est la composée de f avec la translation $x \mapsto x - v$, donc est une isométrie. D'après le lemme B.85, $g \in \mathrm{O}(E)$. □

Proposition B.89. *Soit $f \in \mathrm{Aut}(E)$. Sont équivalents :*

(1) f est orthogonal,

(2) f préserve la norme, ie $\forall x \in E$, $||f(x)|| = ||x||$.

(3) l'adjoint f^* existe et $f^* = f^{-1}$.
En dimension finie, également :

(4) Si e est une base orthonormée alors $f(e)$ est aussi une base orthonormée.

(5) Si $A = [f]_{e \to e}$ est la matrice de f dans une base orthonormée, alors ${}^tAA = I$. De manière équivalente, $A{}^tA = I$, ou ${}^tA = A^{-1}$.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) est immédiat.
(2) $\Rightarrow$ (1) découle de la formule de polarisation et de l'hypothèse que f est linéaire. On peut aussi dire qu' une application linéaire préservant la norme est une isométrie fixant 0 et appliquer le lemme B.85.
(1) $\Rightarrow$ (3) Par hypothèse $f \in \mathrm{Aut}(E)$ donc f admet une réciproque f^{-1}, ce qui permet d'écrire, pour tous $x, y \in E$:

$$\langle f(x), y\rangle = \langle f(x), f(f^{-1}(y)\rangle = \langle x, f^{-1}(y)\rangle.$$

Ceci montre que l'adjoint de f existe et vaut $f^* = f^{-1}$.
(3) $\Rightarrow$ (1) Pour tous $x, y \in E$,

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, f^*(f(y))\rangle = \langle x, f^{-1}(f(y))\rangle = \langle x, y\rangle$$

(1) $\Rightarrow$ (4) est immédiat.
(4) $\Rightarrow$ (1). D'après (2) il suffit de montrer que f préserve la norme. Soit e une base orthonormée et soit $x \in E$. on a

$$\|f(x)\|^2 = \|f(\sum x_i e_i)\|^2 = \|\sum x_i f(e_i)\|^2 = \sum x_i^2 = \|\sum x_i e_i\|^2 = \|x\|^2$$

puisque $f(e)$ et e sont orthonormées.
(4) $\Rightarrow$ (5). Soit e une orthonormée, alors $\varepsilon := f(e)$ est orthonormée par hypothèse. On a $P = [f]_{e\to e} = [\mathrm{id}]_{\varepsilon \to e}$ donc le coefficient i, j de ${}^tPP$ vaut

$$({}^tP \cdot P)_{ij} = {}^t[\varepsilon_i]_e \cdot [\varepsilon_j]_e = \langle [\varepsilon_i]_e, \varepsilon_j]_e\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle = \delta_i^j \tag{B.90}$$

où on a utilisé $\sum x_k y_k = \langle \sum x_k e_k, \sum y_k e_k\rangle$ lorsque e est orthonormée.
(5) $\Leftrightarrow$ (3) On rappelle que si e est orthonormée, $[f^*]_{e\to e} = {}^t[f]_{e\to e}$. Donc $f^* = f^{-1}$ si et seulement si ${}^t[f]_{e\to e} = [f]_{e\to e}^{-1}$. □

Remarque B.91. (Club confusion) On prendra garde que

1) Une projection orthogonale n'est pas un endomorphisme orthogonal en général ! En effet si $E = F \oplus F^\perp$ et $x \in F^\perp \setminus \{0\}$ alors $\langle p_F(x), p_F(x)\rangle = \langle 0, 0\rangle \neq \langle x, x\rangle$.
2) Par contre une symétrie orthogonale est orthogonale (cf prop. B.44), et réciproquement une symétrie qui est une application orthogonale est une symétrie orthogonale : supposons que f soit une symétrie, soit $E = E_1 \oplus E_{-1}$ la décomposition en sous-espaces propres correspondante,

et supposons que f soit une application orthogonale. Pour tous $x \in E_1$ et $y \in E_{-1}$

$$\langle x, -y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle = 0$$

d'où $E_1 \perp E_{-1}$, i.e. f est une symétrie orthogonale. On rappelle aussi qu'une symétrie est un endomorphisme symétrique si et seulement si c'est une symétrie orthogonale. (cf lemme B.68).

Exercice B.92. Soit e une base quelconque d'un espace euclidien E. Montrer que $f \in \mathrm{End}(E)$ est orthogonale si et seulement si ${}^t[f]_{e \to e} \cdot G \cdot [f]_{e \to e} = G$, où G est la matrice de Gram du produit scalaire dans la base e.

B.5.2 Groupe orthogonal et spécial orthogonal

Théorème B.93. *Soit E un espace euclidien.*

(1) L'ensemble $\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(E)$.

(2) L'application déterminant $\det : \mathrm{O}(E) \to \{-1, 1\} \subset (\mathbb{R}^*, \cdot)$ est un morphisme de groupe.

Démonstration. (1) Le fait qu'une application $f \in \mathrm{O}(E)$ soit linéaire et inversible, et donc un élément de $\mathrm{Aut}(E)$, est prouvée dans le lemme B.85. Il est évident que $\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(E)$.
(2) Rappelons que $\det f = \det[f]_{e \to e}$, où e est une base quelconque de E, la formule de changement de base assurant que $\det[f]_{e \to e}$ ne dépend pas de e. En effet, si e' est une base de e

$$\det[f]_{e' \to e'} = \det\left([\mathrm{id}]^{-1}_{e' \to e} \cdot [f]_{e \to e} \cdot [\mathrm{id}]_{e' \to e}\right) = \det\left([\mathrm{id}]^{-1}_{e' \to e}[\mathrm{id}]_{e' \to e}\right) \det[f]_{e \to e} = \det[f]_{e \to e}$$

Notons $A = [f]_{e \to e}$, où on suppose e orthonormée. Alors ${}^tAA = \mathrm{I}_n$, donc $1 = \det({}^tAA) = \det({}^tA)\det(A) = (\det A)^2$ d'où l'on déduit $\det A \in \{-1, 1\}$. $\square$

Définition B.94. Le sous-groupe $\mathrm{O}(E)$ est appelé **groupe orthogonal** de E. Le sous-groupe $\mathrm{SO}(E) := \det^{-1}(\{1\})$ est appelé **groupe spécial orthogonal** ou **groupe des rotations**, ou **groupe des isométries directes**.

On note aussi $\mathrm{SO}(E) = \mathrm{O}^+(E)$ et $\mathrm{O}^-(E) = \det^{-1}(\{-1\}) \subset O(E)$. Attention, contrairement à $\mathrm{O}^+(E)$, l'ensemble $\mathrm{O}^-(E)$ n'est pas un sous-groupe.

Exemple B.95. 1) Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan F, i.e. où $E = F \oplus F^\perp$ avec $\dim F^\perp = 1$, est un élément de $\mathrm{O}^-(E)$, qu'on appelle **réflexion**.

2) Plus généralement, si s est une symétrie orthogonale par rapport à F, alors $s \in \mathrm{SO}(E)$ si $\dim F^\perp$ est paire et $s \in \mathrm{O}^-(E)$ sinon.

Proposition B.96. *Soit $f \in \mathrm{O}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f, alors $\lambda \in \{-1, 1\}$.*

Démonstration. Par hypothèse il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Alors

$$\langle x, x\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda^2 \langle x, x\rangle$$

d'où $1 = \lambda^2$ puisque $\|x\| \neq 0$. □

Du coup, il est très restrictif d'être orthogonal et diagonalisable :

Proposition B.97. *Soit $f \in \mathrm{O}(E)$, alors f diagonalisable si et seulement si f est une symétrie orthogonale.*

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{O}(E)$ diagonalisable. Puisque les valeurs propres appartiennent à $\{-1, 1\}$ d'après B.96 et que f est diagonalisable, on a la décomposition en sous-espaces propres $E = E_1 \oplus E_{-1}$, donc f est une symétrie. Puisque f est orthogonale, c'est une symétrie orthogonale (cf remarque B.91). □

Définition B.98. On appelle
- $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t AA = \mathrm{I}_n\}$ le **groupe orthogonal**,
- $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ le groupe **spécial orthogonal**.

Exemple B.99. 1) $A = [f]_{e \to e}$, où $f \in O(E)$ et e est une base orthonormée de E euclidien (cf. proposition B.89 (5)). En fait $f \mapsto [f]_{e \to e}$ définit les isomorphismes $\mathrm{O}(E) \approx \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}(E) \approx \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, où $n = \dim E$.

2) $A = [\mathrm{id}]_{e' \to e}$ où e, e' sont deux bases orthonormées de E (cf calcul (B.90))

Proposition B.100. *Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Sont équivalents :*

(1) $X \mapsto AX$ est une une application orthogonale de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

(2) $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

(3) $A^t A = \mathrm{I}_n$.

(4) Les lignes de A sont orthonormées dans $\mathbb{R}^n$.

(5) Les colonnes de A sont orthonormées dans $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. (1) $\Leftrightarrow$ (2) résulte de ce que

$$\langle AX, AY\rangle = \langle X, {}^t AAY\rangle$$

pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$.
(2) $\Rightarrow$ (3) résulte de ${}^tAA = \mathrm{I}_n \Rightarrow A^{-1}$ existe car $\det A \neq 0$, puis ${}^tA = A^{-1}$.
(3) $\Rightarrow$ (2) De même.
(2) $\Leftrightarrow$ (4) résulte de
$$({}^tAA)_{ij} = {}^tA_i \cdot A_j = \langle A_i, A_j \rangle$$
où A_k désigne la k-ième colonne de A.
(3) $\Leftrightarrow$ (5) résulte de
$$(A^tA)_{ij} = A_i \cdot {}^tA_j = \langle A_i, A_j \rangle$$
où A_k désigne la k-ième ligne de A. □

Théorème B.101. *(Digression culturelle)*
Tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

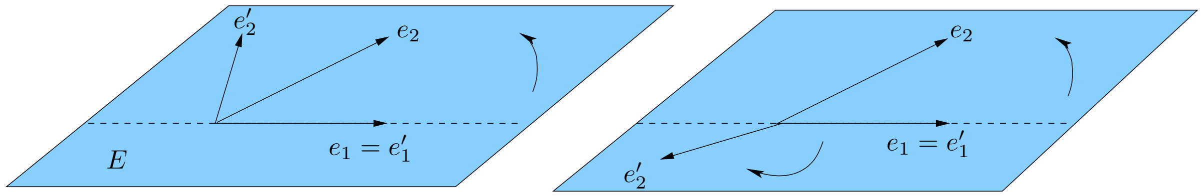
Démonstration. Soit G un groupe de cardinal n, un théorème de Cayley dit qu'alors G est isomorphe à un sous-groupe du groupe des permutations $\mathfrak{S}_n = \mathrm{Bij}(\{1, \ldots, n\})$, l'ensemble des bijections $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ muni de la loi de composition. On considère alors
$$\begin{array}{ccccl} G & \xrightarrow{\text{inj}} & \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \\ g & \longmapsto & \sigma & \longmapsto & f, \text{ où } f(e_i) = e_{\sigma(i)} \end{array}$$
où $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On peut vérifier que la deuxième flèche est bien un morphisme de groupe et injective.
L'idée du théorème de Cayley est de considérer $\mathfrak{S}(G)$ le groupe des bijections de G dans lui-même. On peut injecter G dans $\mathfrak{S}(G)$, en faisant agir G sur lui-même par produit à gauche, i.e. à $g \in G$ on associe la bijection $\phi_g : G \to G$ définie par $\phi_g(h) = gh$, et on pose
$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}(G) \\ g & \longmapsto & \phi_g : h \mapsto gh \end{array}$$
On peut aussi vérifier que c'est un morphisme de groupe injectif. Ensuite $\mathfrak{S}(G)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$ (numéroter de 1 à n les éléments du groupe...). □

B.5.3 Orientation

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. Notons $\mathbb{B} = \{e = (e_1, \ldots, e_n),\ e \text{ base de } E\}$ l'ensemble des bases ordonnées de E. Cela signifie qu'on voit e comme un élément de E^n. Ainsi $(e_1, e_2) \neq (e_2, e_1)$, l'ordre des vecteurs compte.

Définition B.102. On dit que deux bases $e, e' \in \mathbb{B}$ ont la **même orientation** si la matrice de passage de e à e' a un déterminant strictement positif, c'est-à-dire si $\det([\mathrm{id}]_{e' \to e}) > 0$. Sinon on dit qu'elle sont d'**orientation opposée**.

Le déterminant étant une forme multilinéaire alternée, on voit immédiatement que multiplier un vecteur d'une base par -1, ou permuter 2 vecteurs de la base, change l'orientation de la base. Sur l'exemple ci-dessous, $e = (e_1, e_2)$ et $e' = (e'_1, e'_2) := (e_1, ae_1 + be_2)$, alors $[\mathrm{id}]_{e' \to e} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ donc e et e' ont la même orientation si et seulement si $b > 0$.



$(e_1, e_2) \sim (e'_1, e'_2)$ $\qquad$ $(e_1, e_2) \not\sim (e'_1, e'_2)$

Avoir la même orientation définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{B}$, formellement :

$$\forall e, e' \in \mathbb{B}, \quad e \sim e' \Leftrightarrow \det([\mathrm{id}]_{e' \to e}) > 0.$$

Lemme B.103. *$\sim$ est une relation d'equivalence sur $\mathbb{B}$, qui a exactement deux classes d'équivalence.*

Démonstration. On a $e \sim e$ puisque $[\mathrm{id}]_{e \to e} = \mathrm{I}_n$ est de déterminant 1. Si $e \sim e'$, alors $e' \sim e$ puisque $[\mathrm{id}]_{e \to e'} = [\mathrm{id}]^{-1}_{e' \to e}$ et que $\det[\mathrm{id}]_{e' \to e} = (\det[\mathrm{id}]_{e' \to e})^{-1} > 0$. Supposons $e \sim e'$ et $e' \sim e''$. On a donc $\det[\mathrm{id}]_{e' \to e} > 0$ et $\det[\mathrm{id}]_{e'' \to e'} > 0$. Or on a

$$\det([\mathrm{id}]_{e'' \to e}) = \det([\mathrm{id}]_{e' \to e} \cdot [\mathrm{id}]_{e'' \to e'}) = \det([\mathrm{id}]_{e' \to e}) \det([\mathrm{id}]_{e'' \to e'}) > 0$$

ce qui montre que $e \sim e''$. La relation "avoir la même orientation" est donc bien une relation d'équivalence. Il est clair qu'il y a au plus deux classes d'équivalence. De plus, si $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $(-e_1, e_2, \dots, e_n) = e'$ a l'orientation opposée à celle de e. Il y a donc exactement deux classes d'orientation. $\square$

Notons $[e]$ la classe d'équivalence d'une base $e \in \mathbb{B}$. L'ensemble $\mathbb{B}$ des bases ordonnées de E est donc partitionné en deux classes d'équivalence $\mathbb{B} = [e] \cup [e']$, où $e \not\sim e'$.

Définition B.104. Un espace vectoriel **orienté** est un couple $(E, [e])$, où $[e]$ est une des classes d'équivalence de $\mathbb{B}$. Les bases dans $[e]$ sont dites **directes** et les autres **indirectes**.

Quelques observations :
– Orienter E revient à choisir une base e comme directe, toutes les bases ayant même orientation que e (sa classe d'équivalence) le devenant également.
– Dans un espace orienté euclidien, on peut toujours choisir une base directe orthonormée (prendre une base orthonormée et si elle est indirecte, remplacer e_1 par $-e_1$).

– Dans $\mathbb{R}^n$ on utilise souvent l'orientation canonique donnée par la base canonique.
- Un automorphisme $f \in \mathrm{Aut}(E)$ respecte l'orientation si et seulement si $\det f > 0$. En effet, soit $e \in \mathbb{B}$ et soit $f(e) = (f(e_1), \ldots, f(e_n)) \in \mathbb{B}$, alors

$$[f]_{e \to e} = [\mathrm{id}]_{f(e) \to e}$$

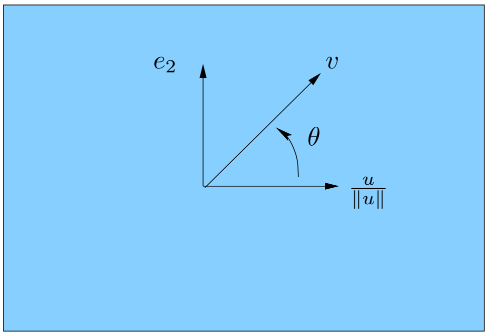
donc $\det[\mathrm{id}]_{f(e)\to e} = \det[f]_{e\to e} = \det f$. Donc $e \sim f(e)$ et seulement si $\det f > 0$.
– Si E est orienté euclidien, $f \in \mathrm{SO}(E)$ envoie les bases orthonormées directes, resp. indirectes, sur les bases orthonormées directes, resp. indirectes.

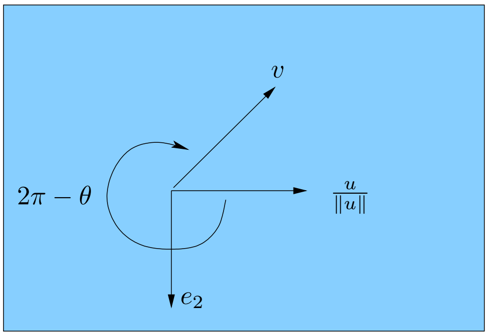
Définition B.105. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2, et soit $u, v \in E \setminus \{0\}$. On appelle **angle orienté** de u à v, l'unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\frac{v}{\|v\|} = \cos(\theta)\frac{u}{\|u\|} + \sin(\theta) e_2$$

où $(\frac{u}{\|u\|}, e_2)$ est orthonormée directe.

Le choix de l'interalle $[0, 2\pi[$ est arbitraire, on peut choisir $[-\pi, \pi[$ ou n'importe quel intervalle $[a, a+2\pi[$. Il est clair que changer l'orientation de E remplace e_2 par $-e_2$, donc θ par $-\theta$ modulo 2π, soit $2\pi - \theta$ avec notre convention.





Lemme B.106. *Soit e une base orthonormée directe, alors l'angle orienté θ de u à v est déterminé par*

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}, \quad \sin(\theta) = \frac{\det([u, v]_e)}{\|u\|\|v\|},$$

où $[u, v]_e = ([u]_e, [v]_e)$ est la matrice des coordonnées de u, v dans la base e.

Démonstration. Puisque les formules sont invariantes par multiplication de u et/ou v par $\lambda > 0$, il suffit de traiter le cas $\|u\| = \|v\| = 1$. Considérons d'abord une base orthonormée directe $e = (e_1, e_2)$ telle que $e_1 = u$. Alors $v = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$ par définition de θ. Donc $\langle u, v\rangle = \langle e_1, \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2\rangle = \cos(\theta)$ alors que $[u, v]_e = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ 0 & \sin(\theta)\end{pmatrix}$ entraîne $\det([u, v]_e) = \sin(\theta)$. Soit maintenant $e' = (e'_1, e'_2)$ une autre base orthonormée directe. Alors on a la formule $[u, v]_{e'} = [\mathrm{id}]_{e' \to e} \cdot [u, v]_e$. Or, puisque e et e' sont orthonormées directes,

$[\mathrm{id}]_{e' \to e} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ et donc $\det[\mathrm{id}]_{e' \to e} = 1$. Il s'ensuit que $\det[u,v]_{e'} = \det[u,v]_e$. □

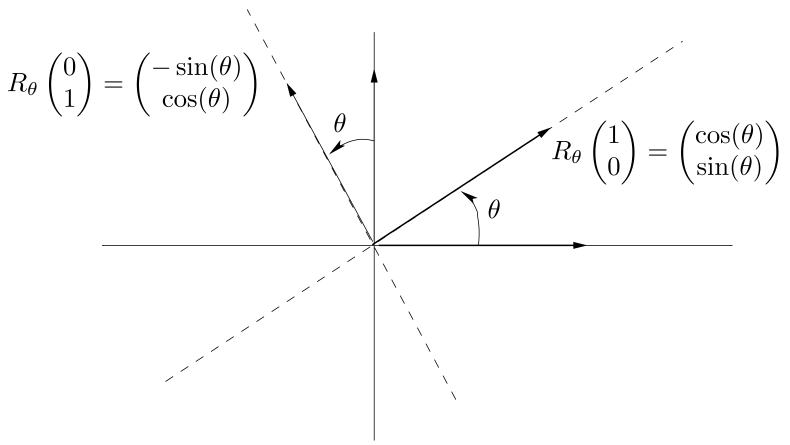
Exercice B.107. $(e_1, e_2, \ldots, e_n) \sim (e_2, e_3, \ldots, e_n, e_1)$ si et seulement si n est impair.

B.5.4 $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$

On rappelle que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}), \det A = 1\}$, et $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

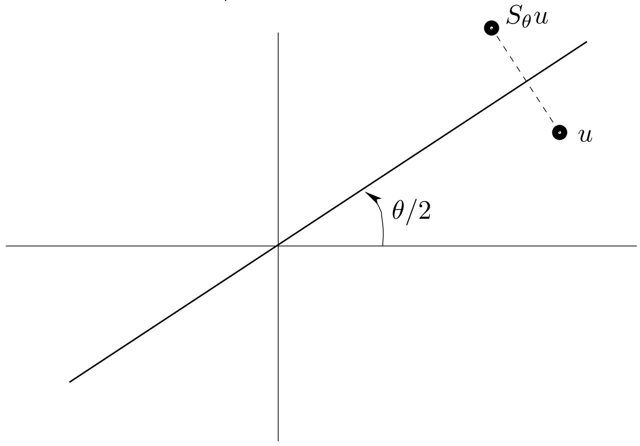
Proposition B.108. *Soit $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ unique modulo 2π tel que :*

(1) $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} =: R_\theta \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ *représente une rotation d'angle θ,*



ou bien

(2) $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} =: S_\theta \in O_2^-(\mathbb{R})$ *représente une symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire $\theta/2$.*



Démonstration. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, les vecteurs colonnes de A sont orthonormés donc

$$\begin{cases} a^2 + c^2 & = & 1 & (1) \\ b^2 + d^2 & = & 1 & (2) \\ ab + cd & = & 0 & (3) \end{cases}$$

Les équations (1) et (2) impliquent qu'il existe $\theta, \beta \in \mathbb{R}$, uniques modulo 2π, tel que

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

L'équation (3) donne $\cos(\theta - \beta) = \cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta = 0$, donc $\theta - \beta = \pi/2\,[\pi]$, puis donc que (i) $\theta = \beta + \pi/2\,[2\pi]$ ou (ii) $\theta = \beta + 3\pi/2\,[2\pi]$.
Cas (i) : alors $\cos\theta + i\sin\theta = (\cos\beta + i\sin\beta)i = -\sin\beta + i\cos\beta$, donc $(\cos\beta, \sin\beta) = (\sin\theta, -\cos\theta)$, d'où $A = S_\theta$.
Cas (ii) : alors $\cos\theta + i\sin\theta = (\cos\beta + i\sin\beta)(-i)$ conduit à $(\cos\beta, \sin\beta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$, d'où $A = R_\theta$. □

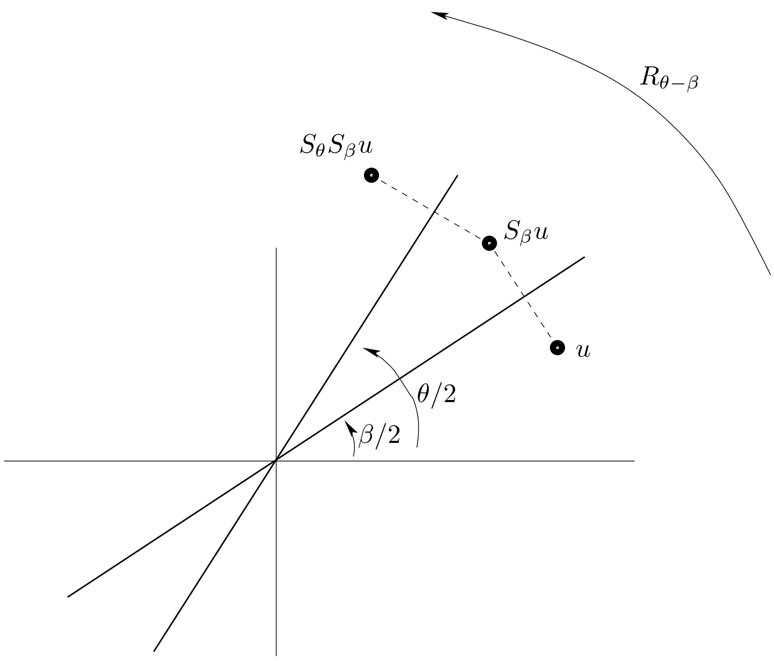
Exercice B.109. Vérifier que

(a) Si on identifie $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ par $(x, y) \approx x + iy$, alors $R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx e^{i\theta}(x + iy)$.

(b) $R_\theta R_\beta = R_{\theta+\beta}$.

(c) S_θ est bien la matrice d'une symétrie orthogonale (tester sur les vecteurs propres)

(d) $S_\theta S_\beta = R_{\theta-\beta}$.



Remarque B.110. L'assertion (b) montre que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est abélien, et en fait que l'application

$(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \circ) \ni R_\theta \mapsto e^{i\theta} \in (S^1, \cdot) \subset (\mathbb{C}^*, \cdot)$ est un isomorphisme de groupe.

Corollaire B.111. *Soit E euclidien de dimension 2 orienté, et soit $u, v \in E \setminus \{0\}$ d'angle orienté θ. Alors*

(1) Il existe un unique $f \in \mathrm{SO}(E)$ tel que $f\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{v}{\|v\|}$,

(2) Dans toute base orthonormée directe $e = (e_1, e_2)$ on a $f(e_1) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$. De manière équivalente, $[f]_{e\to e} = R_\theta$.

Démonstration. (1) On montre d'abord l'existence de f. On peut supposer $\|u\| = \|v\| = 1$. Soit $e = (e_1, e_2)$ la base orthonormée directe de E telle que $e_1 = u$. Alors $U := [u]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V := \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$. Il est clair que $R_\theta(U) = V$. On définit $f \in \mathrm{SO}(E)$ par $[f]_{e\to e} = R_\theta$. Ceci montre l'existence de f vérifiant $f(u) = v$. Montrons maintenant l'unicité. Il suffit de montrer que si $f, g \in \mathrm{SO}(E)$ vérifient $f(w) = g(w)$, où w est un vecteur unitaire fixé, alors $f = g$. Puisque $g^{-1} \circ f(w) = w$, quitte à remplacer f par $g^{-1} \circ f$, on suppose que $f(w) = w$ et on montre que $f = \mathrm{id}$. Soit $w' \in E$ tel que (w, w') soit une base orthonormée directe. Puisque $f \in SO(E)$, la base $(f(w), f(w')) = (w, f(w'))$ est orthonormée directe. Comme la seule base orthonormée directe ayant w pour premier vecteur est (w, w'), on conclut que $f(w') = w'$ et donc que $f = \mathrm{id}$. Ceci montre l'unicité de f.

(2) Soit e la base orthonormée directe construite en (1) telle que $[f]_{e\to e} = R_\theta$ par définition. Il reste à montrer que cette égalité est vraie pour toute base orthonormée directe. Soit e' une base orthononormée directe, alors $P := [\mathrm{id}]_{e'\to e} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est abélien, on a

$$\begin{aligned} [f]_{e'\to e'} &= [\mathrm{id}]_{e\to e'} \cdot [f]_{e\to e} \cdot [\mathrm{id}]_{e'\to e} \\ &= P^{-1}R_\theta P = R_\theta P^{-1}P = R_\theta \end{aligned}$$

□

B.5.5 $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$

Théorème B.112. *Soit $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, alors*

(1) Il existe $P \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ tel que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}, \quad (\det A \in \{-1, 1\})$$

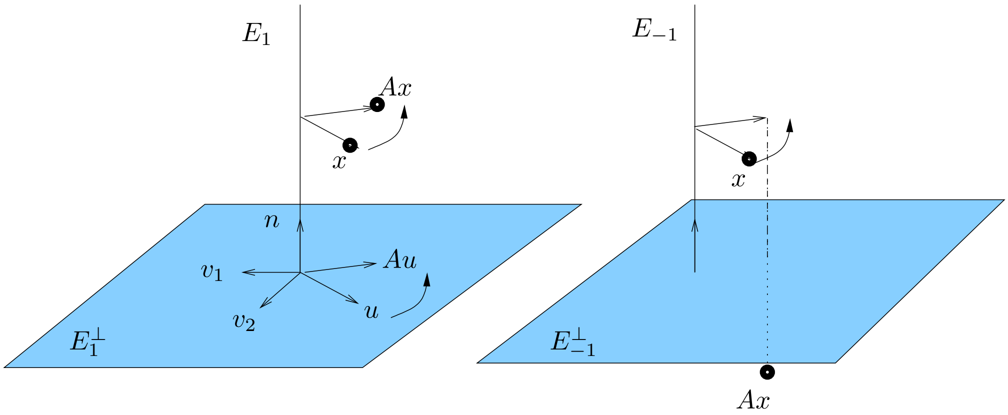
L'angle θ est déterminé, modulo 2π et modulo ± 1, par la relation

$$\mathrm{tr}(A) = 2\cos(\theta) + \det A \tag{B.113}$$

(2) Supposons $\mathbb{R}^3$ *orienté,* $A \neq \pm \mathrm{I}_3$*, et soit* $e = (v_1, v_2, n)$ *une base orthonormée directe telle que* $E_d = \mathbb{R}n$*, où* E_d *est l'espace propre de la valeur propre* $d := \det A$*. Alors l'angle orienté* $\theta \in [0, 2\pi[$ *est déterminé par la relation* $Av_1 = \cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2$*, et de manière équivalente, par les formules*

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, Au \rangle}{\|u\|^2}, \quad \sin(\theta) = \frac{\det \left[u, Au, n\right]_e}{\|u\|^2} \tag{B.114}$$

pour tout $u \in E_d^{\perp} \setminus \{0\}$*.*



rotation

rotation ∘ symmétrie

On voit que si $d = 1$, alors $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est la matrice d'une rotation, d'axe E_1 et dont la restriction à $E_1^{\perp}$ est R_θ. Si $d = -1$, $A \in O_3^-(\mathbb{R})$ est la composée d'une rotation d'axe E_{-1} d'angle θ et de la symétrie orthogonale par rapport au plan $E_{-1}^{\perp}$. Dans ce cas, lorsque $\theta = 0$, A est la matrice d'une symétrie orthogonale.

Démonstration. (1) Notons $d = \det A$, alors $d \in \{-1, 1\}$ puisque A est orthogonale (cf théorème B.93). Si $A = \pm \mathrm{I}_3$, la proposition est vraie avec $P = \mathrm{I}_3$. On suppose $A \neq \pm \mathrm{I}_3$.

Etape 1 : *d est une valeur propre de A de multiplicité* 1 *ou* 3*.*

Puisque le prolynôme caractéristique de A est de degré 3, il a au moins une racine réelle, et donc A a au moins une valeur propre réelle. Il y a deux cas à considérer. Supposons d'abord que A a trois valeurs propres réelles $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$. On sait que $\lambda_i \in \{-1, 1\}$ (cf proposition B.96), donc

$$d = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \begin{cases} (-1)^3 & = & -1 & = & d \text{ d'ordre } 3 \\ (-1)^2 1 & = & 1 & = & d \text{ d'ordre } 1 \\ (-1)1^2 & = & -1 & = & d \text{ d'ordre } 1 \\ 1^3 & = & 1 & = & d \text{ d'ordre } 3 \end{cases}$$

On suppose maintenant que A a une valeur propre réelle α et deux valeurs propres complexes conjuguées μ et $\overline{\mu}$. L'égalité

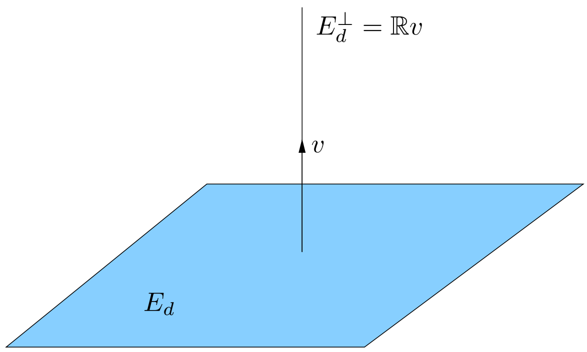
$$d = \alpha |\mu|^2 \in \{-1, 1\}$$

et le fait que $\alpha \in \{-1, 1\}$ impliquent que $|\mu|^2 = 1$, et donc que $d = \alpha$ est de multiplicité 1.

On note E_d l'espace propre associé à la valeur propre d.

Etape 2 : $\dim E_d = 1$

Faisons d'abord l'observation triviale que $\dim E_d \in \{1, 2, 3\}$. Le cas $\dim E_d = 3$ est exclu car il équivaut à $A = \pm I_3$. Supposons que $\dim E_d = 2$. Alors $\dim E_d^\perp = 1$ et il existe $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $E_d^\perp = \mathbb{R}v$. Puisque $A(E_d) = E_d$ et A est orthogonale, on a aussi $A(E_d^\perp) = E_d^\perp$.



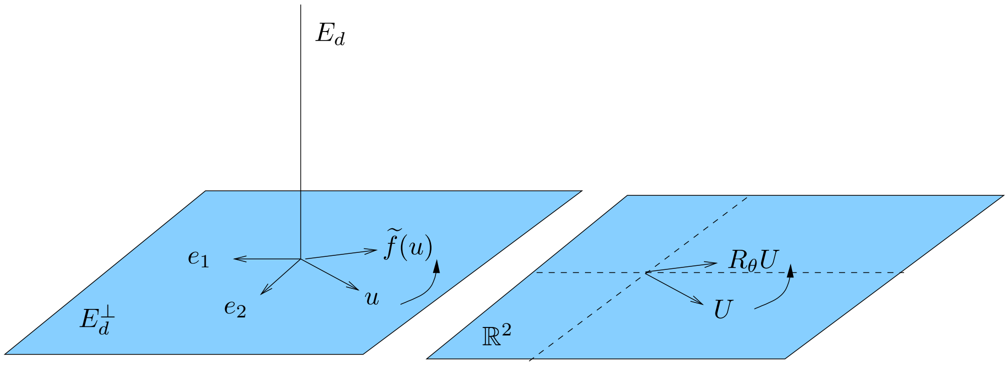
Comme A n'admet que ± 1 comme valeurs propres, on a $Av = \pm v$. Mais l'hypothèse $\dim E_d = 2$ implique que d est de multiplicité ≥ 2, donc égale à 3 d'après l'étape 1, ce qui signifie que d est la seule valeur propre de A. On a donc $Av = dv$, d'où $v \in E_d \cap E_d^\perp = \{0\}$, ce qui contredit notre choix initial. On conclut que $\dim E_d = 1$.

Etape 3 : On conclut.

Puisque $\dim E_d = 1$, on a $\dim E_d^\perp = 2$. Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ (orienté canoniquement) telle que $E_d^\perp = \mathrm{vect}\{e_1, e_2\}$ et $E_d = \mathbb{R}e_3$. Puisque A est orthogonale et stabilise E_d, elle stabilise également son orthogonal $E_d^\perp$. Soit $P = [e_1, e_2, e_3] \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ la matrice formée des e_i (qui sont les coordonnées des e_i dans la base canonique), alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & \\ & d \end{pmatrix}$$

où $\widetilde{A} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ puisque les colonnes de $P^{-1}AP$ sont orthonormées. Notons qu'en terme d'endomorphisme, si on note $f \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme défini par $f(X) = AX$, de matrice A dans la base canonique, alors $f(E_d^\perp) = E_d^\perp$ et sa restriction $\widetilde{f} : E_d^\perp \to E_d^\perp$ est un endomorphisme orthogonal de l'espace euclidien $E_d^\perp$, de matrice $\widetilde{A}$ dans la base (e_1, e_2). Puisque $d = \det A = (\det \widetilde{A})d$, on a $\det \widetilde{A} = 1$, et donc $\widetilde{A} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. D'après la proposition B.108, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ unique modulo 2π tel que $\widetilde{A} = R_\theta$.



On rappelle que la trace d'une matrice est invariante par changement de base (car $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(APP^{-1}) = \mathrm{tr}A$), d'où l'on déduit (B.113).

(2) Puisque $A \neq \pm \mathrm{I}_3$, la discussion précédente montre que $\dim E_d = 1$ et $\dim E_d^{\perp} = 2$. Puisque A stabilise le plan euclidien $E_d^{\perp}$, la formule pour $\cos(\theta)$ dans (B.114) est donnée par la proposition B.108. Vérifions la formule sur $\sin(\theta)$. Par homogénéité on peut supposer que $\|u\| = 1$. Observons que pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, $\det[x, y, z]_e = \det[x, y, z]_{e'}$ si e, e' sont deux bases orthonormées de même orientation. En effet, on a

$$[x, y, z]_e = [\mathrm{id}]_{e' \to e} \cdot [x, y, z]_{e'}$$

et $[\mathrm{id}]_{e' \to e} \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ donc $\det[\mathrm{id}]_{e' \to e} = 1$. La formule se vérifie immédiatement dans la base orthonormée directe $e = (u, v, n)$, puisque $Au = \cos(\theta)u + \sin(\theta)v$, et que

$$[u, Au, n]_e = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Remarque B.115. Dans la partie (2) du théorème, l'angle θ dépend de l'orientation de $\mathbb{R}^3$, mais également du choix de n : si (v_1, v_2, n) est remplacé par $(v_2, v_1, -n)$, l'orientation de $E_d^{\perp}$ est changée et θ est remplacé par $-\theta$ modulo 2π, soit $2\pi - \theta \in [0, 2\pi[$.

Exercice B.116. 1) (Matrice à trou) Compléter la matrice $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & \cdot \\ -2 & 6 & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ en une matrice de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et déterminer quelle est l'application $X \mapsto A \cdot X$ dans $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer la matrice $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ représentant dans la base canonique la rotation d'axe $w = (1, 1, 1)$ d'angle orienté $\pi/3$ dans une base directe (v_1, v_2, w).

B.5.6 Produit vectoriel

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

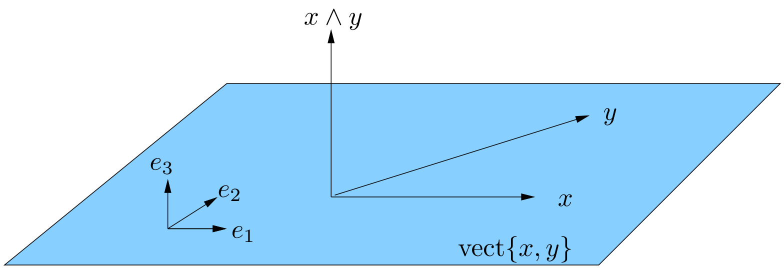
Définition B.117. On appelle **produit vectoriel** de deux vecteurs indépendants $x, y \in E$ le vecteur $x \wedge y \in E$ tel que :

(a) $x \wedge y$ est orthogonal à $\mathrm{vect}\{x, y\}$,

(b) $\|x \wedge y\| = \sin\theta \|x\| \|y\|$, où $\theta \in [0, \pi]$ est l'angle (non orienté) entre x et y,

(c) $(x, y, x \wedge y)$ est une base directe de E.

Si x et y sont liés on pose $x \wedge y = 0$.



Remarque B.118. 1) Si x, y sont indépendants, $\dim \mathrm{vect}\{x, y\} = 2$ et $\dim \mathrm{vect}\{x, y\}^{\perp} = 1$. Les conditions (a)(b)(c) déterminent $x \wedge y \in \mathrm{vect}\{x, y\}^{\perp}$ de manière unique.

2) La quantité $\sin\theta \|x\| \|y\|$ est l'aire du parallélogramme engendré par x et y.

3) Si (x, y) est orthonormée alors $(x, y, x \wedge y)$ est orthonormée directe.

4) Si $\lambda > 0$, alors $(\lambda x) \wedge y = \lambda(x \wedge y) = x \wedge (\lambda y)$.

5) $y \wedge x = -(x \wedge y) = (-x) \wedge y = x \wedge (-y)$.

Proposition B.119. *Soient $x, y \in E$ et soit e une base orthonormée directe de E. Alors*

(1) Si $n \in E$ est unitaire et orthogonal à x, y, alors

$$x \wedge y = \det[x, y, n]_e \, n \tag{B.120}$$

(2) $x \wedge y$ est l'unique vecteur de E tel que

$$\forall z \in E, \qquad \langle x \wedge y, z \rangle = \det \left[x, y, z\right]_e \tag{B.121}$$

Démonstration. (1) Si x, y sont liés, la formule (B.120) est vraie. On suppose x, y non liés. Par homogénéité, il suffit de vérifier (B.120) quand $\|x\| = \|y\| = 1$. Le déterminant ne dépendant pas de la base orthonormée directe e, on choisit $e = (e_1, e_2, n)$ où $e_1 = x$. Soit $\theta' \in [0, 2\pi[$ l'angle orienté de x à y dans le plan euclidien orienté $\mathrm{vect}\{e_1, e_2\}$. On a alors $y = \cos(\theta')e_1 + \sin(\theta')e_2$, et

$$[x, y, n]_e = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta') & 0 \\ 0 & \sin(\theta') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\det[x, y, n]_e = \sin(\theta')$. Montrons que $x \wedge y = \sin(\theta')n$. Notons que (x, y, n) est directe si et seulement si $\sin(\theta') > 0$. Puisque l'angle non orienté $\theta \in [0, \pi]$ de x à y vérifie $\theta = \min(\theta', 2\pi - \theta')$, on a $|\sin(\theta')| = \sin(\theta)$, donc $x \wedge y = \pm \sin(\theta')n$. Si $\sin(\theta') > 0$, (x, y, n) et $(x, y, x \wedge y)$ étant directes on a $x \wedge y = \sin(\theta')n$. Si $\sin(\theta') < 0$, (x, y, n) est indirecte et alors $x \wedge y = \lambda n$ avec $\lambda < 0$, donc $x \wedge y = \sin(\theta')n$.

(2) Il suffit de vérifier (B.121) lorsque x, y sont indépendants unitaires et $e = (x, e_2, n)$ est orthonormée directe, où $n \perp \text{vect}\{x, y\}$. On a en utilisant (1)

$$
\begin{aligned}
\langle x \wedge y, z\rangle &= \left\langle \det\left[x, y, n\right]_e n, z\right\rangle \\
&= \det\left[x, y, n\right]_e \langle n, z\rangle \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \langle n, z\rangle \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \langle n, z\rangle \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) & \langle x, z\rangle \\ 0 & \sin(\theta) & \langle e_2, z\rangle \\ 0 & 0 & \langle n, z\rangle \end{pmatrix} \\
&= \det[x, y, z]_e
\end{aligned}
$$

□

Corollaire B.122. *L'application $E \times E \to E$, $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire alternée. Si $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ est orthonormée directe, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$, alors on a*

$$x \wedge y = (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3$$

Démonstration. On a $x \wedge y = \sum \langle x \wedge y, e_i\rangle e_i = \sum \det[x, y, e_i]_e \, e_i$. □

Proposition B.123. *On a pour tous $x, y, z \in E$:*

(1) **(Identité de Lagrange)**

$$\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2 \tag{B.124}$$

(2) **(double produit vectoriel)**

$$x \wedge (y \wedge z) = \langle x, z\rangle y - \langle x, y\rangle z \tag{B.125}$$

(3) **(Identité de Jacobi)**

$$x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) = 0. \tag{B.126}$$

Démonstration. (1) Par homogénéité, il suffit de vérifier (B.124) pour x, y unitaires. Soient $n \in \text{vect}\{x, y\}^\perp$ unitaire et $e = (x, e_2, n)$ orthonormée directe. En écrivant $y = \cos(\theta)x + \sin(\theta)e_2$,

et $x \wedge y = \sin(\theta)n$, (B.124) se réduit à $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$.
(2) Les deux membres de l'égalité étant multilinéaires, il suffit de vérifier (B.125) pour $x, y, z \in \{e_1, e_2, e_3\}$, où (e_1, e_2, e_3) est orthonormée directe. Les deux membres de l'égalité sont alternés en y, z, on peut donc supposer $(x, y, z) = (e_i, e_j, e_k)$ où $j \neq k$, et si (x, y, z) est libre, on peut quitte à échanger y, z supposer (x, y, z) directe. Si $i \notin \{j, k\}$ alors $e_j \wedge e_k = \pm e_i$ et les deux membres de (B.125) sont nuls. Si $i = j$, alors comme $(e_i, e_k, e_i \wedge e_k)$ est directe, on voit que $e_i \wedge (e_i \wedge e_k) = -e_k = \langle e_i, e_k\rangle e_j - \langle e_i, e_j\rangle e_k$. Si $i = k$, alors comme $(e_j, e_k, e_j \wedge e_k)$ est directe, on voit que $e_i \wedge (e_j \wedge e_k) = e_j = \langle e_i, e_k\rangle e_j - \langle e_i, e_j\rangle e_k$.
(3) En utilisant (B.125), on a

$$\begin{aligned} x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) &= \langle x, z\rangle y - \langle x, y\rangle z \\ &+ \langle y, x\rangle z - \langle y, z\rangle x \\ &+ \langle z, y\rangle x - \langle z, x\rangle y \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Exercice B.127. (VRAI-FAUX) Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $a, b \in E$ donnés, $a \neq 0$. Soit $F = \{x \in E, a \wedge x = b\}$. Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (justifier).

(a) F est toujours non vide.

(b) Si $b = 0$, F est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

(c) Si $b \perp a$ est non nul, alors F est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

B.5.7 Miscellannées : $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, décomposition polaire

On énonce sans démonstration quelques résultats sur le groupe orthogonal en dimension plus grande. Soit E un espace euclidien.

Théorème B.128. *Soit $f \in \mathrm{O}(E)$. Alors il existe une base orthonormée e de E telle que*

$$[f]_{e\to e} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& -1 &&&&&& \\ &&&& \ddots &&&&& \\ &&&&& -1 &&&& \\ &&&&&& \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) && \\ &&&&&& \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) && \\ &&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&& \cos(\theta_r) & -\sin(\theta_r) \\ &&&&&&&&& \sin(\theta_r) & \cos(\theta_r) \end{pmatrix}$$

On note que $f \in \mathrm{SO}(E)$ s'il a un nombre pair $2p$ de valeurs propres -1, qui correspondent à p rotations d'angle π sur des 2-plans deux à deux orthogonaux. On voit donc que $f \in \mathrm{SO}(E)$ si et seulement si c'est une composée de rotations ($p + r$ dans ce cas), ce qui justifie qu'on appelle $\mathrm{SO}(E)$ le groupe des rotations.

On appelle **refléxion** une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E, i.e. la symétrie orthogonale par rapport à $F \subset E$ où F est un sous-espace vectoriel de dimension $\dim F = \dim E - 1$.

Théorème B.129. *On suppose que* $\dim E = n \geq 2$. *Alors toute transformation orthogonale* $f \in \mathrm{O}(E)$ *s'écrit :*

$$f = s_1 \circ \cdots \circ s_r, \quad r \leq n$$

où les s_i *sont des réflexions (la décomposition n'est pas unique).*

Théorème B.130 (Décomposition polaire). *Tout automorphisme* $f \in \mathrm{Aut}(E)$ *s'écrit de manière unique sous la forme*

$$f = o \circ s$$

où o *est orthogonal et* s *est sysmétrique défini positif.*

Index