Cours N1MA6011 : Géométrie Différentielle

Laurent Bessières
Institut de Mathématiques de Bordeaux

2013-2014, S6

Table des matières

Chapitre 1 : courbes, théorie locale

On travaille dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (pour lequel la base canonique est orthonormée). On note $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme associée et $d(x,y) = ||x-y||$ la distance associée.

1 Courbes dans $\mathbb{R}^n$, généralités

1.1 Arcs paramétrés, arcs géométriques

Définition 1.1. On appelle **arc paramétré de classe** C^k, $k \in \mathbb{N}$, un couple (I, f) où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}^n$ est une application de classe C^k.

On rappelle que cela signifie que $f(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ où chaque $x_i : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^k.

Exemple 1.2 (angle droit). Soit $f : R \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$\begin{cases} t & \mapsto & (0, -t), \quad t \in]-1, 0[\\ 0 & \mapsto & (0,0) \\ t & \mapsto & (t, 0), \quad t \in]0, 1[\end{cases}$$

f est de classe C^0 mais pas C^1.

Exemple 1.3 (angle droit C^∞). Soit $f : R \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$\begin{cases} t & \mapsto & (0, e^{1/t}), \quad t < 0 \\ 0 & \mapsto & (0,0) \\ t & \mapsto & (e^{-1/t}, 0), \quad t > 0 \end{cases}$$

Vérifier que f est de classe C^∞.

Définition 1.4. On dit que deux arcs paramétrés de classe C^k par (I, f) et (J, g) sont **équivalents** (resp. **positivement équivalents**) s'il existe un difféomorphisme $\theta : J \to I$ de classe C^k (resp. avec $\theta' > 0$) tel que $g = f \circ \theta$. On appelle **arc géométrique** (resp. arc géométrique orienté) une classe d'équivalence. Le sous-ensemble $f(I) \subset \mathbb{R}^n$ est appelé le **support** de l'arc géométrique.

On rappelle que $\theta : J \to I$ est un difféomorphisme de classe C^k, $k \geq 1$ si θ est bijective, θ et sa réciproque θ^{-1} sont de classe C^k, et θ' ne s'annulle pas sur J. Il s'ensuit que $\theta' > 0$ sur J ou bien $\theta' < 0$ sur J. Il est clair qu'on a bien des relations d'équivalence. Si A est un arc géométrique de représentant (I, f), on dira que A est paramétré par (I, f) ou que (I, f) est un paramétrage de A ; θ est un **changement de paramétrage**.

Exemple 1.5. $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}^2$ défini par $f(t) = (t, 0)$ et $g :]-1/2, 1/2[\to \mathbb{R}^2$, $s \mapsto (2s, 0)$ sont positivements équivalents. Ils sont équivalents à $h :]-1, 1[\to \mathbb{R}^2$, $s \mapsto (-s, 0)$ mais pas positivement.

Un arc géométrique contient exactement 2 arcs géométriques orientés. Si (I, f) et (J, g) paramètrent A, alors $f(I) = g(J)$ mais la réciproque est fausse : le support ne détermine pas l'arc géométrique.

Exercice 1.6. $(I =]0, 5\pi[, f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ et $(J =]0, 3\pi[, g(t) = (\cos(t), \sin(t)))$ définissent le même support $(f(I) = g(J) = S^1)$ mais ne sont pas équivalents.
Indication : montrer que, pour chaque point x du support $f(I)$, le cardinal de la préimage $f^{-1}(x)$ est le même pour tout paramétrage équivalent.

On peut aussi utiliser la longueur, qu'on verra plus loin. On veut donner un sens à l'expression $p \in A$ (p un point de A).

Définition 1.7. Un **point d'un arc géométrique** A est une classe d'équivalence de triplets (I, f, t), où (I, f) paramètre A et $t \in I$, pour la relation d'équivalence $(I, f, t) \sim (J, g, s)$ s'il existe un changement de paramétrage $\theta : J \to I$ tel que $g = f \circ \theta$ et $t = \theta(s)$. L'élément commun $f(t) = g(s)$ est l'image du point.

La notation (I, t, f) étant un peu lourde, on pourra dire simplement $p = f(t)$ un point de A.

1.2 Points réguliers, Tangente

Soit A un arc géométrique paramétré par (I, f) et $p = f(t)$ un point de A.

Définition 1.8. On dit que p est **régulier** si $f'(t) \neq 0$. Dans ce cas la droite passant par p de vecteur directeur $f'(t)$ est la **tangente à** A **en** p. On dit que A est régulier si tous ses points le sont.

Vérifions que la définition en soit bien une, i.e. que la condition $f'(t) \neq 0$ et que la tangente ne dépendent pas du paramétrage. Soit (J, g) un arc paramétré équivalent à (I, f), $\theta : J \to I$ le changement de paramétrage. Comme $g = f \circ \theta$,

$$g'(s) = f'(\theta(s))\theta'(s) = f'(t)\theta'(s)$$

et puisque $\theta' \neq 0$ on a $g'(s) \neq 0 \Leftrightarrow f'(t) \neq 0$. De plus $g'(s)$ est proportionnel à $f'(t)$ donc (J, g) définit la même droite tangente que (I, f) au point $f(t) = g(s)$.

Exemple 1.9. Soit A dans $\mathbb{R}^2$ paramétré par $(]-1,1[, f(t) = (t, 0))$ et B paramétré par $(]-1,1[, g(t) = (t^3, 0))$. Ces arcs géométriques ont même support mais sont différents : A est régulier, B non.

Exercice 1.10. (1) Soit $D = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un unique arc géométrique régulier de support D.
(2) Soit $(\mathbb{R}, f)$ l'angle droit C^∞ de l'exemple 1.3. Montrer qu'il n'existe pas d'arc géométrique régulier de support $f(\mathbb{R})$.

Définition 1.11. Soit A un arc géométrique régulier paramétré par (I, f) et $p = f(t)$ un point de A.

- On dit que p est **birégulier** si $f'(t)$ et $f''(t)$ sont linéairement indépendants, sinon p est un **point d'inflexion**.
- Si p est birégulier, on appelle **plan osculateur à** A **au point** p le plan vectorier engendré par $f'(t)$ et $f''(t)$.
- On dit que A est birégulier si tous ses points le sont.

Vérifions encore que la définition fait sens, i.e. ne dépende pas du paramétrage. Soit (J, g) un paramétrage de A et $\theta : J \to J$ le changement de paramétrage. On a $g = f \circ \theta$, $p = f(t) = g(s)$ et $t = \theta(s)$. On a en posant $a = \theta'(s) \neq 0$,

$$\begin{aligned} g'(s) &= f'(\theta(s))\theta'(s) = af'(t). && (1.1)\\ g''(s) &= f''(\theta(s))(\theta'(s))^2 + f'(\theta(s))\theta''(s) = a^2 f''(t) + bf'(t). && (1.2) \end{aligned}$$

où $b = \theta''(s) \in \mathbb{R}$ (il peut être nul). On a clairement $\mathrm{vect}\{g'(s), g''(s)\} \subset \mathrm{vect}\{f't), f''(t)\}$. Réciproquement puisque

$$\begin{aligned} f'(t) &= a^{-1} g'(s)\\ f''(t) &= a^{-2}(g''(s) - bf'(t)) = a^{-2} g''(s) - ba^{-3} g'(s) \end{aligned}$$

$\mathrm{vect}\{f't), f''(t)\} \subset \mathrm{vect}\{g'(s), g''(s)\}$ et on a égalité. En particulier $f'(t)$ et $f''(t)$ sont colinéaires ssi $g'(s)$ et $g''(s)$ le sont (l'espace engendré étant de dimension 1 dans ce cas).

Exemple 1.12. $(\mathbb{R}, f(t) = (\cos(t), \sin(t), 0))$ dans $\mathbb{R}^3$. On a $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$ et $f''(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$, f' et f'' sont orthogonaux. Le plan osculateur est $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

La "réciproque" de l'exemple ci-dessus est vrai :

Lemme 1.13. Soit A un arc géométrique de $\mathbb{R}^n$ dont le plan osculateur en chaque point est égal à un plan $V \subset \mathbb{R}^n$ fixé. Alors l'arc est contenu dans un plan affine parallèle à V :

`Preuve:` On se donne une application linéaire $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-2}$ dont le noyau est V. On peut prendre par exemple $\phi(xv_1 + \cdots + x_n v_n) = (x_1, \ldots, x_{n-2})$ où $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ telle que v_{n-1}, v_n soient dans V. Soit (I, f) un paramétrage de A. Rappelons que si ϕ est linéaire, $\phi'(a) = \phi$ en tout point $a \in \mathbb{R}^n$. (précisément, si on note plutôt $d_a\phi$ la différentielle de ϕ en un point $a \in \mathbb{R}^n$, la dérivée directionnelle de ϕ dans la direction $u \in \mathbb{R}^n$ est $d_a\phi.u = \frac{d}{dt}(\phi(a + tu)) = \frac{d}{dt}(a + t\phi(u)) = \phi(u)$.) On a donc $(\phi(f(t)))' = \phi.f'(t) = 0$ puisque $f'(t) \in V$. Ceci implique que $t \mapsto \phi(f(t))$ est constante. Fixons $t_0 \in I$, alors pour tout $t \in I$, $0 = \phi(f(t)) - \phi(f(t_0)) = \phi(f(t) - f(t_0))$ donc $f(t) - f(t_0) \in V$, d'où $f(t) \in f(t_0) + V$. $\square$

1.3 Longueur d'arc

Définition 1.14. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un arc géométrique de classe C^1, paramétré par (I, f), $p = f(a)$ et $q = f(b)$ deux points de A. On appelle longueur de l'arc pq de A l'intégrale

$$L_{pq}(A) = \int_a^b ||f'(t)||dt.$$

On appelle longueur de A la quantité $L(A) = \sup_{p,q \in A} L_{pq}(A) \in [0, +\infty]$.

On fait la vérification habituelle : la formule ne dépend pas du paramétrage. Soit (J, g) un paramétrage de A, θ le changement de paramétrage tel que $g = f \circ \theta$, $[c, d] \subset J$ tel que $\theta([c, d]) = [a, b]$. Alors la formule de changement de variables pour $t = \theta(s)$ donne

$$\begin{aligned} \int_c^d ||g'(s)||ds &= \int_c^d ||f'(\theta(s))\theta'(s)||ds \\ &= \int_c^d ||f'(\theta(s))||.|\theta'(s)|ds \\ &= \int_a^b ||f'(t)||dt. \end{aligned}$$

Remarque 1.15. Les grecs de l'antiquité savaient calculer des longueurs, mais pas dériver (le calcul infinitésimal remonte à Fermat, Newton-Leibnitz soit 2000 ans plus tard...). Comment faisaient ils ? En approximant la courbe par des segments de plus en plus petits.

Définition 1.16. Pour $\sigma = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ est une subdivision de $[a, b]$, on définit

$$\ell(f, \sigma) = \sum_{i=0}^{k-1} ||f(t_{i+1}) - f(t_i)||, \quad \text{puis} \quad \ell_{ab}(f) = \sup_{\sigma} \ell(f, \sigma) \in [0, +\infty].$$

Théorème 1.17. Soit A de classe C^1, (I, f) un paramétrage de A, $p = f(a)$ et $q = f(b)$, alors

$$L_{pq}(A) = \ell_{ab}(f).$$

`Preuve:` On montre d'abord l'inégalité $L_{pq}(A) \geq \ell(f, \sigma)$. Soit $\sigma = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ une subdivision de $[a, b]$. Pour chaque $i \in \{0, \ldots, k-1\}$:

$$||f(t_{i+1}) - f(t_i)|| = ||\int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t)dt|| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f'(t)||dt.$$

En sommant de 0 à $k - 1$, on obtient

$$\ell(f, \sigma) \leq \int_a^b ||f'(t)||dt = L_{pq}(A),$$

puis l'inégalité voulue en prenant le sup sur les subdivisions σ.
L'inégalité reciproque est plus délicate. Fixons $\varepsilon > 0$, nous allons montrer que

$$\ell_{ab}(f) \geq \int_a^b ||f'(t)||dt - 2\varepsilon(b - a), \tag{1.3}$$

ce qui donnera l'inégalité voulue en faisant tendre ε vers 0. Observons que si $f'(t)$ est constante sur un intervalle $[c, d]$ on a égalité suivante :

$$||\int_c^d f'(t)dt|| = ||\int_c^d f'(c)dt|| = ||f'(c)(d - c)|| = ||f'(c)||(d - c) = \int_c^d ||f'(t)||dt \tag{1.4}$$

On se rapproche de cette situation optimale en comparant $f'(t)$ à des constantes. Puisque f' est continue, elle est uniformément continue sur le compact $[a, b]$ par le théorème de Heine. Il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\forall s, t \in [a, b], \;\; |t - s| < \delta \Rightarrow |f'(t) - f'(s)| < \varepsilon.$$

On prend une subdivision σ de $[a,b]$ telle que $t_{i+1}-t_i<\delta$. On a

$$\begin{aligned}
||\int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t)dt|| &= ||\int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t_i)dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t)-f'(t_i)dt|| && \text{(en écrivant } a=b+a-b)\\
&\geq ||\int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t_i)dt|| - ||\int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t)-f'(t_i)dt|| && \text{(avec } ||a+b||\geq ||a||-||b||)\\
&\geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f'(t_i)||dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f'(t)-f'(t_i)||\,dt && \text{(avec(1.4))}\\
&\geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f'(t)||dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f'(t_i)||-||f'(t)||dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f'(t)-f'(t_i)||dt\\
&\quad \text{(encore avec } a=b+a-b \text{ dans l'intégrale de gauche)}\\
&\geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f'(t)||dt - 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f'(t_i)-f'(t)||dt, && \text{(avec } ||a||-||b||\geq -||a-b||)\\
&\geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f'(t)||dt - 2\varepsilon(t_{i+1}-t_i).
\end{aligned}$$

par choix de δ et de σ. D'où

$$||f(t_{i+1})-f(t_i)|| = ||\int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t)dt|| \geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f'(t)||dt - 2\varepsilon(t_{i+1}-t_i)$$

et on obtient l'inégalité $\ell(f,\sigma)\geq \int_a^b ||f'(t)||dt - 2\varepsilon(b-a)$ en sommant sur i, d'où (1.3) . □

Remarque 1.18. L'inégalité

$$||f(b)-f(a)|| = ||\int_a^b f'(t)dt|| \leq \int_a^b ||f'(t)||dt = L_{pq}(A)$$

a une signification géométrique très simple : elle dit que les segments minimisent la longueur. En effet, la longueur du segment pq est facile à calculer avec le paramétrage $[0,1]\ni t\mapsto tq+(1-t)p$: elle vaut $||q-p|| = ||f(b)-f(a)||$. L'inégalité dit que toute autre courbe joignant p à q est de longueur plus grande ou égale.

Beaucoup de quantités géométriques auront des expressions plus simples pour un paramétrage à vitesse constante, en particulier si la vitesse est 1. Commençons par montrer l'existence d'un tel paramétrage.

> **Proposition-Définition 1.19.** Soit $A\subset\mathbb{R}^n$ un arc géométrique régulier de classe C^1. Alors il existe un paramétrage (J,g) de A, dit **paramétrage par longueur d'arc**, tel que $||g'(s)||=1$ pour tout $s\in J$.

`Preuve:` Soit (I,f) une paramétrisation de A. Soit $a\in I$, posons $s: I\to\mathbb{R}$,

$$s(t) = \int_a^t ||f'(u)||du.$$

Alors s est de classe C^1 et $s'(t) = ||f'(t)|| > 0$ pour tout $t \in I$, donc s est un difféomorphisme. Posons $J = s(I)$ et notons $\theta : J \to I$ sa réciproque. Alors $g = f \circ \theta$ vérifie

$$||g'(u)|| = ||f'(\theta(u))\theta'(u)|| = ||f'(t)\frac{1}{s'(t)}|| = 1.$$

□

Remarque 1.20. (1) En particulier si $[a, b] \subset J$, la longueur de l'arc $g(a)g(b) \subset A$ est $b-a$.
(2) Si $g = f \circ \theta$ et g, f sont deux paramétrages par longueur d'arc, $\theta(t) = \pm t + C$.
(3) En dérivant l'égalité $\langle g'(s), g'(s)\rangle = 1$ on obtient $2\langle g'(s), g''(s)\rangle = 0$, donc $g'(s)$ et $g''(s)$ sont orthogonaux. Le point $g(s)$ est donc birégulier si et seulement si $g''(s) \neq 0$.

Exemple 1.21 (Cercle de rayon R). Pour un cercle de rayon R dans $\mathbb{R}^n$, centré en p, contenu dans un plan affine V,

$$g(s) = p + R\cos(\frac{s}{R})\overrightarrow{u} + R\sin(\frac{s}{R})\overrightarrow{v},$$

où $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{V}$.

1.4 Courbure

Définition 1.22. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un arc géométrique régulier, (J, g) un paramétrage de A par longueur d'arc et $p = g(s)$ un point de A. On appelle **courbure de A en p**

$$K_A(p) = ||g''(s)||$$

S'il n'y a pas d'ambiguité on notera simplement $K_A(p) = K(p)$. Vérifions la définition : soit (I, f) un autre paramétrage de A par longueur d'arc, θ le changement de paramétrage tel que $g = f \circ \theta$. Reprenons la formule (1.2), valable pour $g = f \circ \theta$ quelconques, $t = \theta(s)$:

$$g''(s) = f''(t)\theta'(s)^2 + f'(t)\theta''(s). \tag{1.5}$$

Or $\theta' = \pm 1$ donc $\theta'^2 = 1$ et $\theta'' = 0$, d'où $g''(s) = f''(t)$.

Exemple 1.23. Pour un cercle de rayon R, la courbure est $1/R$.

Le paramétrage par longueur d'arc peut-être délicat à calculer donc il est utile d'avoir une formule de la courbure pour un paramétrage régulier quelconque de l'arc. Soit (I, f) un tel paramétrage, (J, g) un paramétrage par longueur d'arc tel que $g = f \circ \theta$. Il suffit d'exprimer $\theta'(s)$ et $\theta''(s)$ en fonction de t dans la formule (1.5). On a

$$1 = ||g'(s)|| = ||f'(t)\theta'(s)|| = ||f'(t)|||\theta'(s)|$$

donc

$$\theta'(s)^2 = \frac{1}{||f'(t)||^2} = \frac{1}{\langle f'(t), f'(t)\rangle}.$$

En dérivant

$$2\theta'\theta'' = -2\frac{\langle f'(t), f''(t)\theta'\rangle}{\langle f'(t), f'(t)\rangle^2} \qquad \text{d'où} \qquad \theta'' = -\frac{\langle f'(t), f''(t)\rangle}{\langle f'(t), f'(t)\rangle^2}$$

En posant $\overrightarrow{\tau} = \frac{f'(t)}{||f'(t)||}$, on obtient au point $p = g(s) = f(t)$:

$$g''(s) = \frac{f''}{||f'||^2} - \left\langle \frac{f''}{||f'||^2}, \overrightarrow{\tau} \right\rangle \overrightarrow{\tau}. \tag{1.6}$$

On commente la formule (1.6) : elle dit que $g''(s)$ est le projeté orthogonal de $\frac{f''}{||f'||^2}$ sur $\overrightarrow{\tau}^\perp$. En appliquant le théorème de Pythagore on en déduit :

$$\boxed{K(p)^2 \ \ (= ||g''(s)||^2) \ \ = \left(\frac{f''}{||f'||^2}\right)^2 - \left(\frac{\langle f'(t), f''(t)\rangle}{||f'||^3}\right)^2.}$$

Interprétation cinématique On peut reformuler (1.6) de la manière suivante. Supposons la courbure non nulle et posons $\overrightarrow{\nu} = \frac{g''(s)}{||g''(s)||} \perp \overrightarrow{\tau}$, alors

$$\boxed{f''(t) = \langle f'', \overrightarrow{\tau}\rangle\overrightarrow{\tau} + ||f'(t)||^2 K(p)\overrightarrow{\nu}} \tag{1.7}$$

On y voit que l'accélération $f''(t)$ se décompose en une composante tangentielle et une composante centrifuge. Imaginez qu'en voiture vous accélériez dans un virage. La force ressentie est pour partie dirigée vers son siège (due à la pression sur l'accélérateur) et pour partie vers l'extérieur du virage (composante centrifuge). La courbure n'intervient que dans cette dernière.

Remarque 1.24. La continuité de la courbure explique pourquoi on ne peut pas recoller de manière C^2 un segment de droite, de courbure nulle, et un arc de cercle, de courbure $1/R$.

1.5 Cercle osculateur

Etant donné un arc géométrique A et un point $p \in A$, la tangente à A en p réalise une approximation de A à l'ordre 1 au point p. Existe t'il une courbe (simple) faisant mieux, i.e. approximant A à l'ordre 2 ? Oui, le cercle tangent à A en p de rayon $1/K(p)$ contenu dans le plan osculateur (lorsque $K(p) \neq 0$, sinon la tangente convient).

Définition 1.25. Soit A un arc géométrique régulier, $p \in A$ tel que $K(p) \neq 0$. Soit (J, g) un paramétrage de A par longueur d'arc. On appelle **cercle osculateur à** A **en** p, le cercle $C(A,p)$ contenu dans le plan osculateur, de centre $p + \frac{1}{K(p)})\overrightarrow{\nu}$, de rayon $1/K(p)$.

Proposition 1.26. Supposons que $g(0) = p$ et soit (K, h) un paramétrage par longueur d'arc de $C(A,p)$ tel que $h(0) = p$. Alors

$$g(s) = h(s) + o(s^2)$$

`Preuve:` Dans le plan osculateur muni du répère $(p, \overrightarrow{\tau}(0), \overrightarrow{\nu}(0)$, le paramétrage par longueur d'arc d'un cercle de rayon R centré en $(0, R)$ (avec position $(0,0)$ au temps 0) est

$$s \mapsto (0, R) = (0, R) + R(\sin(s/R), -\cos(s/R)).$$

(en faisant subir une rotation de $-\pi/2$ à la formule habituelle) On a $h'(s) = (\cos(s/R), \sin(s/R))$ et $h''(s) = \frac{1}{R}(-\sin(s/R), \cos(s/R))$ d'où en faisant le développement limité en $s = 0$: $h(s) = (0,0) + s(1,0) + \frac{s^2}{2}(0, \frac{1}{R}) + o(s^2)$ soit

$$h(s) = p + s\overrightarrow{\tau}(0) + \frac{s^2}{2}\frac{1}{R}\overrightarrow{\nu}(0) + o(s^2).$$

Par ailleurs le DL de $g(s)$ donne

$$\begin{aligned} g(s) &= g(0) + sg'(0) + \frac{s^2}{2}g''(0) + o(s^2) \\ &= p + s\overrightarrow{\tau}(0) + \frac{s^2}{2}K(p)\overrightarrow{\nu}(0) + o(s^2). \end{aligned}$$

et comme on a posé $R = \frac{1}{K(p)}$, on a bien $g(s) = h(s) + o(s^2)$. □

1.6 Invariance par isométries

Nous voulons montrer que longueurs et courbures sont invariantes par isométries de $\mathbb{R}^n$. Cela nécessite quelques rappels.

Définition 1.27. On dit qu'un difféomorphisme $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une **isométrie** si $d(F(x), F(y)) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.

On rappelle que les éléments du **groupe orthogonal** sont les isométries *linéaires* :

$$\mathrm{O}(n) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM.M = \mathrm{I}_n\}$$

où I_n est la matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. En effet,

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{O}(n) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Mx, Mx\rangle = \langle x, {}^t M.Mx\rangle = \langle x, x\rangle \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, ||Mx|| = ||x|| \end{aligned}$$

Théorème 1.28. Une isométrie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 est une application affine, i.e. il existe $L \in \mathrm{O}(n)$ et $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n, F(x) = L(x) + v$.

`Preuve:`

On aura besoin d'un résultat intermédiaire :

Lemme 1.29. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme de classe C^1. Alors F est une isométrie si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $D_xF \in \mathrm{O}(n)$.

`Preuve:` (du lemme)
($\Rightarrow$) Supposons que F soit une isométrie et soit $x, u \in \mathbb{R}^n$. Par définition de la différentielle en x dans la direction u,

$$||D_xF.u|| = ||\lim_{t\to 0} \frac{F(x+tu) - F(x)}{t}|| = \lim_{t\to 0} ||\frac{F(x+tu) - F(x)}{t}||.$$

Or

$$||\frac{F(x+tu) - F(x)}{t}|| = ||\frac{d(F(x+tu), F(x))}{t}|| = ||\frac{d(x+tu, x)}{t}|| = \frac{||tu||}{|t|} = ||u||.$$

d'où $||D_xF.u|| = ||u||$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.
($\Leftarrow$) Supposons que $D_xF \in \mathrm{O}(n)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Alors F préserve les longueurs, i.e. $L(F\circ g) = L(g)$ pour tout arc paramétré $g : [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$L(F \circ g) = \int_a^b ||(F \circ g)'(t)||\, dt = \int_a^b ||D_{g(t)}F.g'(t)||\, dt = \int_a^b ||g'(t)||\, dt = L(g).$$

En particulier l'image du segment $[0, 1] \ni t \mapsto (1-t)x + ty$ joignant un point x à un point y, est une courbe C^1 de même longueur $= d(x, y)$ joignant $F(x)$ à $F(y)$. Donc $d(F(x), F(y)) \leq d(x, y)$. On obtient l'autre inégalité en raisonnant de même avec F^{-1}. $\square$

On termine la preuve du théorème 1.28.

Posons $v = F(0)$ et soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la translation $x \mapsto x+v$. Alors $G = T^{-1} \circ F$ est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ qui fixe l'origine $0 \in \mathbb{R}^n$. Montrons que $G \in \mathrm{O}(n)$. Posons $R = D_0G = D_vF \in \mathrm{O}(n)$ d'après le lemme 1.29. Alors $S = R^{-1} \circ G$ est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ qui fixe 0 et telle que $D_0S = \mathrm{I}_n$. Montrons que $S = \mathrm{I}_n$ ce qui terminera la preuve. Puisque S préserve les longueurs et fixe 0, elle envoie une droite vectorielle D sur une droite vectorielle $S(D)$. Soit $u \in D$, alors $D = \{tu \mid t \in \mathbb{R}\}$. La courbe $t \mapsto tu$ est envoyée par S sur $S(D)$ avec vecteur vitesse en $t = 0$, $D_0S.u = u$. Donc $S(D) = D$ et S étant une isométrie fixant u, il s'ensuit que S est l'identité en restriction à D. Comme D est quelconque, $S = \mathrm{I}_n$. □

On en déduit :

Proposition 1.30. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une isométrie.

(1) Si (J, g) est un paramétrage par longueur d'arc, alors $(J, F \circ g)$ aussi.

(2) Soit A un arc géométrique et $p \in A$. Alors $K_A(p) = K_{F\circ A}(F(p))$.

`Preuve:` D'après le théorème 1.28, il existe $L \in O(n)$ fixé tel que $D_xF = L$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
(1) Pour tout $s \in J$,

$$||(F \circ g)'(s) = ||D_{g(s)}F.g'(s)|| = ||L.g'(s)|| = 1.$$

En fait on n'a pas besoin que $D_{g(s)}F$ soit constant pour ce point.
(2) Prenons (J, g) un paramétrage de A par longueur d'arc. Alors, pour tout $s \in J$,

$$||(F \circ g)''(s)|| = ||(D_{g(s)}F.g'(s))'|| = ||(L.g'(s))'|| = ||L.g''(s)|| = ||g''(s)||.$$

□

2 Courbes dans $\mathbb{R}^2$

On travaille dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, orienté par la base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$. On note $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle $+\pi/2$. C'est aussi, via l'identification $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$, $(a, b) \mapsto a + ib$, la multiplication complexe par i. On sait donc donner un sens à "la gauche" d'un vecteur u donné, c'est la direction iu. On peut alors donner un signe à la courbure d'un arc régulier, selon que la courbe tourne à gauche ou à droite de son vecteur vitesse.

2.1 Courbure algébrique

Définition 1.31. Soit A un arc géométrique régulier de paramétrage par longueur d'arc (J, g). On appelle **courbure algébrique** en $p = g(s) \in A$ l'unique réel $k_A(p)$ satisfaisant

$$g''(s) = k_A(p) i g'(s) \tag{1.8}$$

En effet $g'' \perp g'$ donc g'' est colinéaire à ig'. On a évidement $|k_A(p)| = K_A(p)$. On commettra l'abus de notation d'écrire $k_A(p) = k(s)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité. De manière équivalente,

$$k(s) = \langle g''(s), ig'(s) \rangle.$$

Remarque 1.32. En notant $\overrightarrow{\tau} = g'(s)$ et $\overrightarrow{n} = i\overrightarrow{\tau}$ le vecteur normal tel que $\{\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{n}\}$ soit directe, on a

$$\overrightarrow{\tau}' = k\overrightarrow{n}, \qquad \overrightarrow{n}' = -k\overrightarrow{\tau}. \tag{1.9}$$

En effet $\overrightarrow{n}' = (i\overrightarrow{\tau})' = i\overrightarrow{\tau}' = ik\overrightarrow{n} = -k\overrightarrow{\tau}$.

On peut également écrire la courbure algébrique comme vitesse de rotation du vecteur vitesse, soit $k = \theta'$ où θ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est l'angle orienté du vecteur vitesse avec une direction fixe. Précisément :

Proposition 1.33. Soit (J, g) un arc paramétré régulier de classe C^p.

(1) Il existe $\theta : J \to \mathbb{R}$ de classe C^{p-1}, unique modulo 2π telle que

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{g'}{||g'||}(s) = e^{i\theta(s)}.$$

(2) Si g est paramétré par longueur d'arc,

$$k(s) = \theta'(s).$$

`Preuve:` 1) On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. La fonction θ doit vérifier $h' = i\theta' e^{i\theta} = i\theta' h$, soit $\theta' = -i\frac{h'}{h}$. On pose donc, pour $s_0 \in J$,

$$\theta(s) = \theta(s_0) + \int_{s_0}^{s} -i\frac{h'}{h}(t)\, dt, \qquad h(s_0) = e^{i\theta(s_0)}.$$

On a $(he^{i\theta})' = i\theta' e^{i\theta} - i\theta' e^{i\theta} = 0$, et donc $h(s) = h(s_0)e^{i(\theta(s) - \theta(s_0))} = e^{i\theta(s)}$.
2) Puisque $g' = \overrightarrow{\tau}(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))$, $\overrightarrow{\tau}' = \theta'(-\sin(\theta), \cos(\theta)) = \theta'\overrightarrow{n}$. Or $\overrightarrow{\tau}' = k\overrightarrow{n}$ d'après (1.9). $\square$

2.2 La courbure algébrique détermine la courbe

Imaginez que vous êtes enfermé dans le coffre d'une voiture roulant à vitesse constante. Pouvez-vous reconstituer le trajet à partir des accélérations ressenties ? OUI (théoriquement). Mathématiquement : La courbure algébrique détermine la courbe (à isométrie près).

Théorème 1.34. Soit $k : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p, $p \geq 0$. Alors il existe, à isométrie près, un unique arc géométrique orienté A de classe C^{p+2} dont k soit la courbure algébrique.

`Preuve:` Soit $k : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p, $p \geq 0$. Fixons un angle $\theta_0 \in \mathbb{R}$ et un point $p_0 \in \mathbb{R}^2$. Pour $s_0 \in I$, on pose $\theta(s) = \int_{s_0}^{s} k(t)\, dt$, puis on intègre le vecteur vitesse $\tau := e^{i\theta}$:

$$g(s) = p_0 + \int_{s_0}^{s} e^{i\theta(t)}\, dt.$$

Alors $g' = e^{i\theta}$ est paramétré par la longueur et $g'' = \theta' i e^{i\theta} = kig'$. L'unicité de la courbe telle que $g(s_0) = p_0$ et $g'(s_0) = e^{i\theta_0}$ est claire puisque k et θ_0 déterminent θ, puis θ et p_0 déterminent g. $\square$

Remarque 1.35. L'unicité est fausse avec la courbure simple.

Exemple 1.36. La *clothoide* est la courbe de courbure algébrique $k(s) = as$, $a > 0$. On a $\theta(s) = \frac{as^2}{2}$ d'où

$$g(s) = g(0) + \int_0^s (\cos(as^2), \sin(as^2))\, ds.$$

C'est la trajectoire parcourue en voiture si on tourne le volant à vitesse constante. Elle est utilisée dans les constructions de routes ou de rails pour raccorder des droites et des arcs de cercle sans faire d'acoup.

2.3 Formules

Paramétrage quelconque. Si (I, f) est un paramétrage régulier quelconque, on a $f'(t) = ||f'(t)||\overrightarrow{\tau}$, et au point $p = f(t)$ d'après (1.7)

$$f''(t) = \langle f'', \overrightarrow{\tau}\rangle \overrightarrow{\tau} + ||f'(t)||^2 K(p)\overrightarrow{\nu} = \langle f'', \overrightarrow{\tau}\rangle \overrightarrow{\tau} + ||f'(t)||^2 k(s)\overrightarrow{n},$$

donc

$$\det(f', f'') = ||f'(t)||^3 k(s),$$

d'où si $f = (x, y)$,

$$\boxed{k(p) = \frac{\det(f', f'')}{||f'(t)||^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^3}. \qquad (1.10)}$$

En coordonnées polaires. Soit f est donnée par $f(\theta) = r(\theta)e^{i\theta}$, alors

$$f' = r'e^{i\theta} + rie^{i\theta}, \quad f'' = r''e^{i\theta} + 2r'ie^{i\theta} - re^{i\theta} = (r'' - r)e^{i\theta} + 2rie^{i\theta},$$

d'où

$$\boxed{k(\theta) = \frac{\det(f', f'')}{||f'(t)||^3} = \frac{2r'^2 + r^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.}$$

Définition implicite. On peut définir un arc géométrique de manière implicite, c'est-à-dire comme ligne de niveau d'une fonction : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$ où $F : O \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de dérivée non nulle. Rappelons le théorème des fonctions implicites :

Théorème 1.37 (Théorème des fonctions implicites)**.** Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et $F \in C^p(O, \mathbb{R}^m)$ (où $p \geq 1$). On suppose qu'en $(x_0, y_0) \in O, D_yF(x_0, y_0)$ est inversible, alors il existe un voisinage ouvert $U \times V$ de (x_0, y_0) et $\phi : U \to V$ une application de classe C^p telle que

$$(\,(x, y) \in U \times V,\ \ F(x, y) = 0\,) \Longleftrightarrow (\,x \in U,\ y = \phi(x)\,)$$

De plus on a $D\phi(x) = -(DyF(x_0, y_0))^{-1}D_xF(x_0, y_0)$

Ici $D_yF : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est la différentielle par rapport à la variable y. Dans le cas $n = m = 1$ on obtient que $A = \{F(x, y) = 0\}$ peut être décrit au voisinage (x_0, y_0) comme le graphe $\{(x, \phi(x))\}$. En particulier on a le paramétrage régulier $t \mapsto (t, \phi(t))$. Si (I, f) est un paramétrage régulier quelconque de A, on a en dérivant $F(f(t)) = 0$ que $\langle \nabla F, f' \rangle = 0$. En dérivant à nouveau,

$$D^2F(f', f') + \langle \nabla F, f'' \rangle = 0$$

Au signe près, $\frac{\nabla F}{||\nabla F||} = \overrightarrow{n}$. Donc en utilisant (1.7),

$$\begin{aligned} k(p) &= \frac{\langle f'', \overrightarrow{n} \rangle}{||f'^2||} = \pm\frac{\langle f'', \frac{\nabla F}{||\nabla F||} \rangle}{||f'^2||}, \\ &= \pm D^2F\left(\frac{f}{||f'||}, \frac{f}{||f'||}\right)\frac{1}{||\nabla F||} \end{aligned}$$

Au signe près $\frac{f}{||f'||} = \pm i\frac{\partial F}{||\nabla F}$. En notant $\partial_x F = \frac{\partial F}{\partial x}$ et $\partial_y F = \frac{\partial F}{\partial y}$, $\nabla F = (\partial_x F, \partial_y F)$ donc $\frac{f}{||f'||} = \pm\frac{(-\partial_y F, \partial_x F)}{||\nabla F||}$. On obtient

$$\begin{aligned} k(p) &= \pm(-\partial_y F, \partial_x F)\begin{pmatrix} \partial^2_{xx}F & \partial^2_{xy}F \\ \partial^2_{xy}F & \partial^2_{yy}F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\partial_y F \\ \partial_x F \end{pmatrix}\frac{1}{||\nabla F||^3} \\ &= \pm\frac{\partial^2_{xx}F(\partial_y F)^2 - 2\partial^2_{xy}F\partial_x F\partial_y F + \partial^2_{yy}F(\partial_x F)^2}{((\partial_x F)^2 + (\partial_y F)^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

3 Courbes dans $\mathbb{R}^3$, dites courbes gauches

On considère maintenant un arc géométrique A dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, orienté par la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Contrairement à $\mathbb{R}^2$ où A peut tourner à gauche ou à droite (sens direct ou indirect), dans $\mathbb{R}^3$ il n'y a pas de gauche ou de droite pour A induit par la base canonique : on peut toujours envoyer $\overrightarrow{i}$ sur un vecteur vitesse $\overrightarrow{\tau}$ de A par une isométrie directe, mais celle-ci n'est pas unique puisqu'on peut la composer avec n'importe quelle rotation d'axe $\overrightarrow{\tau}$, $\overrightarrow{j}$ donc pas d'image privilégiée. Nous avons bien au quotidien une notion de gauche et de droite, mais celle-ci vient de ce que nous avons 2 axes naturels, définis par la vision (devant-derrière : $\overrightarrow{i}$) et la gravité (haut-bas : $\overrightarrow{k}$). L'arc A n'a qu'un axe devant-derrière ($\overrightarrow{\tau}$).

On définira donc la "gauche" comme la direction vers laquelle tourne l'arc dans son plan osculateur. On pourra ensuite parler de "haut" et de "bas".

Pour cela nous supposerons A birégulier dans toute cette section. Soit (J, g) un paramétrage de A par longueur d'arc.

3.1 Trièdre de Frenet, torsion

Définition 1.38. On appelle **trièdre de Frenet** de A la base orthonormée directe $(\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{\nu}, \overrightarrow{\beta})$ définie par

$$\overrightarrow{\tau} = g', \quad \overrightarrow{\nu} = \frac{g''}{||g''||}, \quad \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\tau} \wedge \overrightarrow{\nu} \tag{1.11}$$

On a besoin de l'hypothèse de birégularité pour définir $\overrightarrow{\nu}$. On rappelle que le produit vectoriel $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est l'application bilinéaire antisymétrique définie par l'égalité

$$\langle X \wedge Y, Z\rangle = \det(X, Y, Z),$$

pour tous $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, le déterminant étant celui des coordonnées de X, Y, Z dans la base canonique. En particulier $X \wedge Y$ est orthogonal à X, Y. On a plus l'égalité

$$||X \wedge Y||^2 + \langle X, Y\rangle = ||X||^2||Y||^2.$$

Si e_1, e_2 sont des vecteurs orthonormés, $e_3 = e_1 \wedge e_2$ est tel que (e_1, e_2, e_3) est orthonormée et directe (i.e. de déterminant $+1$).

Rappelons que $\overrightarrow{\tau}' = K\overrightarrow{\nu}$ où K est la courbure (la non algébrique, celle qui est toujours positive ou nulle). On peut également exprimer $\overrightarrow{\nu}'$ et $\overrightarrow{\beta}'$ grâce aux **relations de Frenet** :

Proposition 1.39. Il existe une fonction $T : J \to \mathbb{R}$, appelée **Torsion**, telle que

$$\begin{array}{rcccc} \overrightarrow{\tau}' & = & 0 & +K\overrightarrow{\nu} & 0 \\ \overrightarrow{\nu}' & = & -K\overrightarrow{\tau} & 0 & -T\overrightarrow{\beta} \\ \overrightarrow{\beta}' & = & 0 & +T\overrightarrow{\nu} & 0 \end{array}$$

`Preuve:` On a les relations

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \vec{\tau}, \vec{\tau} \rangle = \langle \vec{\nu}, \vec{\nu} \rangle = \langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \rangle, \\ 0 &= \langle \vec{\tau}, \vec{\nu} \rangle = \langle \vec{\nu}, \vec{\beta} \rangle = \langle \vec{\tau}, \vec{\beta} \rangle. \end{aligned}$$

En dérivant $\langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \rangle$ on a $\langle \vec{\beta}', \vec{\beta} \rangle = 0$. On dérivant $\langle \vec{\tau}, \vec{\beta} \rangle$, on obtient $\langle \vec{\tau}', \vec{\beta} \rangle = -\langle \vec{\tau}, \vec{\beta}' \rangle$, qui est égale à 0 puisque $\vec{\tau}' = K\vec{\nu}$. Donc $\vec{\beta}'$ est colinéaire à $\vec{\nu}$. On appelle T le réel tel que $\vec{\beta}' = T\vec{\nu}$.
En dérivant $\langle \vec{\nu}, \vec{\nu} \rangle$ on a $\langle \vec{\nu}', \vec{\nu} \rangle = 0$. En dérivant $\langle \vec{\tau}, \vec{\nu} \rangle$ on obtient $\langle \vec{\tau}, \vec{\nu} \rangle = -\langle \vec{\tau}, \vec{\nu}' \rangle$, qui est égale à K. En dérivant $\langle \vec{\nu}, \vec{\beta} \rangle$ on obtient $\langle \vec{\nu}', \vec{\beta} \rangle = -\langle \vec{\nu}, \vec{\beta}' \rangle$, qui est égale à $-T$. □

La torsion mesure le défaut de planeité de la courbe. En effet si la courbe est contenue dans un plan, ce plan est parallèle à vect$\{\vec{\tau}, \vec{\nu}\}$ qui est donc constant. Alors $\vec{\beta} = \vec{\tau} \wedge \vec{\nu}$ également, donc $\vec{\beta}' = 0$, la torsion est nulle. Réciproquement, si $\vec{\beta}' = 0$ alors $\vec{\beta} = \vec{\tau} \wedge \vec{\nu}$ est constant. Le plan osculateur vect$\{\vec{\tau}, \vec{\nu}\} = \vec{\beta}^{\perp}$ est constant et on a vu (lemme 1.13) que cela impliquait que la courbe soit contenue dans un plan. On peut le redémontrer ici : puisque $\vec{\tau} \perp \vec{\beta}$, $\langle g', \vec{\beta} \rangle = 0$ donc par intégration (en utilisant $\vec{\beta}' = 0$), $\langle g, \vec{\beta} \rangle$ est constant. Il s'ensuit que $g(s) - g(s_0) \perp \vec{\beta}$, c'est à dire que $g(s) \in g(s_0) + \vec{\beta}^{\perp}$.

Un développement limité, utilisant $g'''(s) = (K\vec{\nu})' = K'\vec{\nu} + K(-K\vec{\tau} + T\vec{\beta})$, donne

$$\begin{aligned} g(s) &= g(0) + s\vec{\tau}(0) + \frac{s^2}{2}(K\vec{\nu})(0) + \frac{s^3}{6}(K'\vec{\nu} - K^2\vec{\tau} - KT\vec{\beta})(0) + o(s^3) \\ &= g(0) + \left(s - \frac{K^2 s^3}{6}\right)\vec{\tau} + \left(\frac{Ks^2}{2} - \frac{K's^3}{6}\right)\vec{\nu} - \frac{KTs^3}{6}\vec{\beta} + o(s^3). \end{aligned}$$

Pour $s > 0$ petit, le coefficient de $\vec{\nu}$ est positif (on va "à gauche"), celui de $\vec{\beta}$ est négatif si $T > 0$ (on descend), positif si $T < 0$ (on monte). Dès que $T \neq 0$, la courbe traverse son plan osculateur.

3.2 Courbure et torsion déterminent la courbe

Si on connaît la courbure, qui indique de combien on tourne "à gauche", et la torsion, qui indique de combien on monte ou on descend, on doit pouvoir reconstituer la trajectoire ? Effectivement, la courbure et la torsion déterminent la courbe :

Théorème 1.40. Soit $K \in C^1(I, \mathbb{R}_+^*)$, $T \in C^0(I, \mathbb{R})$, $(\vec{\tau}_0, \vec{\nu}_0, \vec{\beta}_0)$ un repère orthonormé direct, $s_0 \in J$ et $p \in \mathbb{R}^3$. Alors il existe un unique arc birégulier (J, g) de classe C^3, paramétré par la longueur, de courbure K et de torsion T, dont le repère de Frenet en $g(s_0) = p$ est $(\vec{\tau}_0, \vec{\nu}_0, \vec{\beta}_0)$.

`Preuve:` Les relations de Frenet écrites en coordonnées équivalent au système suivant :

$$\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ -K & 0 & -T \\ 0 & T & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

soit

$$O'(s) = M(s)O(s), \tag{1.12}$$

où les lignes respectives de $O(s)$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{\tau}$, $\overrightarrow{\nu}$, $\overrightarrow{\beta}$ respectivement, par exemple dans la base $(\overrightarrow{\tau}_0, \overrightarrow{\nu}_0, \overrightarrow{\beta}_0)$. La condition initiale se traduit donc par $O(s_0) = Id_3$. L'équation différentielle (1.12) étant linéaire d'ordre 1 et la fonction $s \mapsto M(s)$ étant continue sur J, le problème de Cauchy ((1.12), $O(s_0) = Id_3$) admet (par le théorème de Cauchy-Lipschitz) une unique solution $s \mapsto O(s)$ définie sur J. Vérifions que $O(s)$ reste orthogonale (ses vecteurs lignes sont alors orthonormés), c'est à dire que ${}^tO.O = Id_3$ ou de manière équivalente $O.{}^tO = Id_3$. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(O.{}^tO) &= O'.{}^tO + O.({}^tO)' \\ &= MO.{}^tO + O.{}^t(MO) \\ &= MO.{}^tO + O.{}^tO.{}^tM \\ &= MO.{}^tO - O.{}^tOM \end{aligned}$$

en utilisant l'antisymétrie de M. Cela signifie que $s \mapsto O.{}^tO$ vérifie aussi une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur J, de condition initiale $(O.{}^tO)(s_0) = Id_3$. Puisque la matrice identité Id_3 est solution de cette équation et de même condition initiale, l'unicité de Cauchy implique que $(O.{}^tO)(s) = Id_3$ pour tout $s \in J$. On définit alors g par intégration :

$$g(s) = p + \int_{s_0}^{s} \overrightarrow{\tau}(t)\, dt.$$

$\square$

Remarque 1.41. Le théorème est faux sans l'hypothèse $K > 0$: d'abord la torsion n'est pas définie ; ensuite même pour une courbe restreinte à un plan, sans signe sur la courbure on ne peut distinguer un virage à gauche d'un virage à droite.

3.3 Formules

Pour le paramétrage par longueur d'arc (J, g), on a

$$\begin{aligned} g' &= \overrightarrow{\tau}, \\ g'' &= \overrightarrow{\tau}' = K\overrightarrow{\nu}, \\ g''' &= K'\overrightarrow{\nu} + K\overrightarrow{\nu}' \\ &= -K^2\overrightarrow{\tau} + K'\overrightarrow{\nu} - KT\overrightarrow{\beta} \end{aligned}$$

En particulier

$$\det(g', g'', g''') = -K^2 T$$

Pour (I, f) un paramétrage de A, et θ le changement de paramétrage tel que $f = g \circ \theta$, on a

$$\begin{array}{rcl} f' &=& \theta' g' \\ f'' &=& \theta'' g' + \theta'^2 g'' \\ f''' &=& \theta''' g' + 3\theta'\theta'' g'' + \theta'^3 g''' \end{array}$$

d'où

$$\|f' \wedge f''\| = |\theta'|^3 K$$

et

$$\det(f', f'', f''') = \det(\theta' g', \theta'^2 g'', \theta'^3 g''') = \theta'^6(-K^2 T)$$

donc

$$\boxed{K = \frac{\|f' \wedge f''\|}{\|f'\|^3}, \qquad T = -\frac{\det(f', f'', f''')}{\|f' \wedge f''\|^2}.}$$

Chapitre 2 : sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

2.1 Introduction

Une sous-variété de dimension d dans $\mathbb{R}^n$ est un objet qui ressemble localement au modèle $\mathbb{R}^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. La ressemblance doit être assez forte pour exclure les cônes par exemple, qu'on ne veut pas comme sous-variétés.

On définit donc une sous-variété comme déformation de $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ par des difféomorphismes locaux ambiants de $\mathbb{R}^n$:

Définition 2.1 (définition locale par redressement). Soit $n \geq d \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On dit qu'une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une **sous-variété de $\mathbb{R}^n$, de dimension d,** (de classe C^k) si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$ un C^k-difféomorphisme tel que

$$f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}).$$

Bon, on a une définition qui tient la route mais qui n'a pas l'air très maniable. Comment on ferait en pratique pour montrer que $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ est bien une sous-variété ? Nous allons donner plusieurs formulations équivalentes de cette définition. Selon les cas, on pourra essayer l'une ou l'autre pour montrer qu'un objet est, ou n'est pas, une sous-variété. Observons qu'on peut représenter un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^n$ de plusieurs manières :

(1) Comme le noyau d'une application linéaire : $\mathbb{R}^d \times \{0\} = g^{-1}(0) = \ker g$ où

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{d+1}, \ldots, x_n).$$

Plus généralement, tout d-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est le noyau d'une application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ *surjective* (par le théorème du rang, dimension du noyau= $n-$ dimension de l'image).

(2) Comme l'image d'une application linéaire : $\mathbb{R}^d \times \{0\} = h(\mathbb{R}^d)$ où

$$h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n, \qquad (x_1, \ldots, x_d) \mapsto (x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0).$$

Plus généralement, un d-sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est l'image de $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ linéaire *injective.*

On va également caractériser une sous-variété générale en termes d'image et de "noyau", de certaines applications différentiables. On a besoin d'un peu de calcul différentiel.

2.2 Immersions, submersions.

Soit E, F deux espaces vectoriels normés (de dimension finie pour rester simple), $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts, un point $a \in U$ et une application $f : U \to V$ différentiable en a. On note $d_a f : E \to F$ sa différentielle, i.e. l'unique application linéaire telle que pour tout $u \in E$ voisin de 0 :

$$f(a+u) = f(a) + d_a f(u) + o(u).$$

Note : on peut trouver dans la litterature les diverses notations :

$$d_a f = D_a f = Df(a) = f'(a)$$

Définition 2.2. On dit que f est une **immersion** en $a \in U$ si sa différentielle $d_a f : E \to F$ est injective. On dit que c'est une immersion sur U si c'est une immersion en chaque point de U.
On dit que f est une **submersion** en $a \in U$ si sa différentielle $d_a f$ est surjective. On dit que c'est une submersion sur U si c'est une submersion en chaque point de U

Clairement $\dim E \leq \dim F$ si f est une immersion, $\dim E \geq \dim F$ si f est une submersion.

EXEMPLE 2.3. Soit $p, q \leq n$ des entiers. Les exemples fondamentaux sont

$$\text{l'inclusion} \quad \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \ldots, x_p) \mapsto (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$$

pour l'immersion et

$$\text{la projection} \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q, \quad (x_1, \ldots, x_q, x_{q+1}, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_q)$$

pour la submersion. Autres exemples :

- un arc paramétré (I, f) régulier dans $\mathbb{R}^n$ est une immersion de I dans $\mathbb{R}^n$.

- Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une submersion en x si et seulement si $d_x f \neq 0$. En notant $\partial_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ la dérivée partielle de f par rapport à la variable x_i, cela revient à vérifier que le vecteur gradient $\nabla_x f = (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x))$ n'est pas nul.

Nous allons voir que, à difféomorphisme local près, les exemples fondamentaux ci-dessus (inclusion et projection) sont les seuls. Etant donné $x \in \mathbb{R}^n$, on appellera *difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ en x* un C^k-difféomorphisme ϕ d'un voisinage de x sur un voisinage de x tel que $\phi(x) = x$. Pour simplifier les énoncés, les propositions suivantes considèrent un point $a = 0$ tel que $f(a) = 0$. Le cas général s'obtient sans peine à appliquant des translations.

Proposition 2.4 (Forme locale normale des immersions). Soit $U \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert contenant 0 et $h : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k, qui est une immersion en 0 et telle que $h(0) = 0$. Alors il existe un C^k-difféomorphisme local ψ de $\mathbb{R}^n$ en 0 tel que au voisinage de 0 :

$$\psi \circ h(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0).$$

`Preuve:` Soit h comme dans l'énoncé. La matrice jacobienne de h en 0 est

$$J_0 h = (\partial_j h_i(0))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}},$$

où $h = (h_1, \ldots, h_n)$ et $\partial_j h_i(0) := \frac{\partial h_i}{\partial x^j}(0)$ dénote la dérivée partielle de h_i par rapport à la variable x_j. Puisque $d_0 h$ est injective par hypothèse, par le théorème du rang ($\dim \ker d_0 h + \dim \mathrm{Im} d_0 h = \dim \mathbb{R}^p$) la matrice $J_0 h$ est de rang p. Quitte à permutter les coordonnées à l'arrivée (ce qui revient à composer h avec un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$), on peut supposer que les p premières lignes de la matrice sont indépendantes (composer revient à échanger $h_i \leftrightarrow h_j$, donc les lignes de $J_0 h$). La matrice $A = (\partial_j h_i(0))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}$ est alors inversible. On "étend" h localement dans $\mathbb{R}^n$ en une application $H : U \times \mathbb{R}^{n-p} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k vérifiant $H(0) = 0$ en posant

$$(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_{n-p}) \mapsto (h_1(x), \ldots, h_p(x), y_1 + h_{p+1}(x), \ldots, y_{n-p} + h_p(x)).$$

La matrice jacobienne de H en 0 est de la forme

$$J_0 H = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & \mathrm{I}_{n-p} \end{pmatrix}.$$

et est donc inversible. Par le théorème d'inversion locale, H est un C^k-difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ en 0. Alors $\psi := H^{-1}$ définit au voisinage de 0 un C^k-difféomorphisme. De plus

$$\begin{aligned} \psi \circ h(x_1, \ldots, x_p) &= H^{-1}(h_1(x), \ldots, h_p(x), h_{p+1}(x), \ldots, h_n(x)) \\ &= (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

□

EXEMPLE 2.5. Un arc paramétré régulier (I, f) de $\mathbb{R}^n$ (pas nécessairement injectif) est une immersion.

Proposition 2.6 (Forme locale normale des submersions). Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0, $g : U \to \mathbb{R}^q$ une application de classe C^k, qui est une submersion en 0, telle que $g(0) = 0$. Alors il existe un difféomorphisme local ϕ de $\mathbb{R}^n$ en 0 tel que au voisinage de 0 :

$$g \circ \phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_q).$$

`Preuve:` Soit g comme dans l'énoncé. La matrice jacobienne $J_0 g = (\partial_j f_i(0))_{1 \le i \le q,\ 1 \le j \le n}$ est de rang q par hypothèse. Quitte à changer les coordonnées *au départ*, (en précomposant avec un isomorphisme, ce qui permet d'échanger les colonnes de $J_0 g$), on peut supposer que

$$B = (\partial_j f_i(0))_{1 \le i \le q,\ 1 \le j \le q}$$

est inversible. On définit $G : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k par

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (g_1(x), \dots, g_q(x), x_{q+1}, \dots, x_n).$$

La matrice jacobienne de G en 0 est de la forme

$$J_0 G = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & \mathrm{I}_{n-q} \end{pmatrix}.$$

Par le théorème d'inversion locale, G est un C^k-difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ en 0. Soit W un voisinage de 0 tel que $\phi = G^{-1} : W \to \mathbb{R}^n$ soit défini et un C^k-difféomorphisme. Alors si

$$\phi(y_1, \dots, y_q, x_{q+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_q, x_{q+1}, \dots, x_n)$$

on a

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_q, x_{q+1}, \dots, x_n) &= (g_1(x), \dots, g_q(x)) \\ &= (y_1, \dots, y_q) \end{aligned}$$

d'où

$$g \circ \phi(y_1, \dots, y_q, x_{q+1}, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_q).$$

□

Remarque 2.7. On a écrit $g \circ \phi = \mathrm{pr}_1$, la projection sur le premier facteur de $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q}$. Quitte à échanger les coordonnées au départ (en précomposant ϕ par un isomorphisme), on peut aussi écrire $g \circ \phi$ comme la projection sur les q dernières coordonnées, i.e. la projection sur le deuxième facteur de $\mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$:

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{n-q+1}, \dots, x_n)$$

Remarque 2.8. Les arguments ci-dessus montrent que si f de classe C^1 est une immersion (resp. submersion) en un point x, elle l'est sur un voisinage de x (le déterminant des matrices A et B est non nul en 0, donc sur un voisinage de 0 par continuité de *df* et du déterminant). La composée de deux immersions est une immersion, la composée de deux submersions est une submersion. Un difféomorphisme est une immersion et une submersion. Une immersion qui est aussi une submersion est un difféomorphisme local.

L'opération faite dans ces deux propositions s'appelle redresser l'immersion ou la submersion.

2.3 Caractérisations d'une sous-variété

On arrive à l'essentiel :

Théorème 2.9. Soit $n \geq d$ et $k \in N^* \cup \{\infty\}$. Soit M une partie de $\mathbb{R}^n$. Sont équivalents :

(1) **(Définition locale par redressement)** M est une sous variété de $\mathbb{R}^n$, de dimension d, de classe C^k.

(2) **(Définition locale implicite, "Noyau")** Pour tout $a \in M$, il existe un voisinage U de a dans $\mathbb{R}^n$ et $g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ une application de classe C^k, qui est une submersion en a, telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$.

(3) **(Définition locale par paramétrage, "image")** Pour tout $a \in M$, il existe un voisinage U de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et $h : V \to U$ une application de classe C^k, qui est une immersion en 0, telle que $h(0) = a$ et qui est un homéomorphisme de V sur $U \cap M$ (muni de la topologie induite).

(4) **(Définition locale comme graphe)** Pour tout $a \in M$, il existe un voisinage U de a dans $\mathbb{R}^n$, un ouvert V de $\mathbb{R}^d$ et $f : V \to \mathbb{R}^{n-d}$ une application de classe C^k telle que, après permutation éventuelle des coordonnées et identification $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$,

$$U \cap M = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \mid x \in V\} = \text{Graphe}(f)$$

`Preuve:` Montrons que (1) $\Rightarrow$ (2) et (3).
Soit U un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ un C^k-difféomorphisme tel que $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$. Si $f = (f_1, \ldots, f_n)$, définissons $g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ par $g = (f_{d+1}, \ldots, f_n)$, c'est-à-dire $g = \text{pr}_2 \circ f$ où $\text{pr}_2 : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \to \mathbb{R}^{n-d}$ est la projection sur le deuxième facteur. Alors g est une submersion et $U \cap M = g^{-1}(0)$.
Pour (3) définissons $h : V' = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\} \to U$ comme la restriction de f^{-1} à (l'ouvert de $\mathbb{R}^d$) V'. Alors h est une immersion de V' dans $\mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme de V' sur $M \cap U$.
(2) $\Rightarrow$ (1) Soit $g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ la submersion définie au voisinage de a. D'après la proposition 2.6 et la remarque 2.7, il existe ϕ un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ d'un voisinage de 0 sur un voisinage de a tel que

$$g \circ \phi(x_1, \ldots, x_n) = (x_{d+1}, \ldots, x_n).$$

au voisinage de 0. Notons W le voisinage de 0 où ϕ est défini, U' son image, qu'on peut supposer $\subset U$. Alors $f = \phi^{-1} : U' \to W$ est un difféomorphisme qui vérifie $f(M \cap U') = (g \circ \phi)^{-1}(0) = W \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$, comme voulu dans la définition 2.1.
(3) $\Rightarrow$ (1) Par hypothèse il existe deux ouverts V de $\mathbb{R}^d$, U de $\mathbb{R}^n$ et $h : V \to U$ une immersion en 0 tel que $h(0) = a$ et telle que $h : V \to U \cap M$ soit un homéomorphisme. D'après la proposition 2.4, il existe un difféomorphisme ψ de $\mathbb{R}^n$ d'un voisinage de a sur un voisinage de 0 tel que

$$\psi \circ h(x_1, \ldots, x_d) = (x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}.$$

Montrons que ψ est le difféomorphisme cherché dans la définition 2.1. Soit $U' \subset U$ le voisinage de a où ψ est défini, W son image. Notons $V' = h^{-1}(U' \cap M) \subset V$ l'image réciproque de $U' \cap M$ par h, c'est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Comme h est un homéomorphisme de V' sur $M \cap U'$,

$$y \in M \cap U' \Leftrightarrow \exists x \in V', h(x) = y \Leftrightarrow \psi(y) \in \mathbb{R}^d \times \{0\}.$$

Donc $\psi(M \cap U')$ est exactement égal à $W \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$.
(4) $\Rightarrow$ (2) Par hypothèse il existe une identification $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$, $V \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $f : V \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k et U un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$U \cap M = \{(x, f(x)) \mid x \in V\}$$

On définit $g : V \times \mathbb{R}^{n-dM} \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k par $(x, y) \mapsto y - f(x)$. En coordonnées :

$$(x_1, \dots, x_d, y_{d+1}, \dots, y_n) \mapsto (y_{d+1} - f_1(x_1, \dots, x_d), \dots, y_n - f_{n-d}(x_1, \dots, x_d)).$$

Sa matrice jacobienne est

$$J_{(x,y)}g = \begin{pmatrix} -J_x f & \mathrm{I}_{n-d} \end{pmatrix},$$

une matrice de rang $n - d$. L'application g est donc une submersion. De plus $g^{-1}(0) = U \cap M$.

(2) $\Rightarrow$ (4) Soit $g = (g_1, \dots, g_{n-d}) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ la submersion définie au voisinage de a, telle que $g^{-1}(0) = U \cap M$. Quitte à permutter les coordonnées au départ, on peut supposer que

$$C = (\partial_j g_i)_{1 \le i \le n-d, d+1 \le j \le n}$$

est inversible. On définit $G : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k en posant

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_d, g_1(x), \dots, g_{n-d}(x)).$$

La matrice jacobienne de G en a est

$$J_a G = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_d & 0 \\ * & C \end{pmatrix}.$$

et donc inversible. Le théorème d'inversion locale donne un voisinage U' de a dans $\mathbb{R}^n$ et un voisinage W de 0 dand $\mathbb{R}^n$ tel que $G : U' \to W$ est un C^k-difféomorphisme. Observons que $G(U' \cap M) = W \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}) =: W'$ est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^d$. De plus G^{-1} est de la forme

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_d, F_1(y), \dots, \dots, F_{n-d}(y)).$$

Pour $y = (y_1, \dots, y_d) \in W'$, on pose $f(y_1, \dots, y_d) = F(y_1, \dots, y_d, 0, \dots, 0)$. Alors

$$\begin{aligned} M \cap U' &= G^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}) \\ &= \{(y_1, \dots, y_d, f_1(y_1, \dots, y_d), \dots, f_{n-d}(y_1, \dots, y_d)) \mid (y_1, \dots, y_d) \in W'\} \\ &= \{(x, f(x) \mid x \in W'\}. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.10. Dans (3) il ne suffit pas de demander que l'immersion soit injective : la courbe $c :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2, t - t^3)$ est une immersion injective mais $M = c(]-\infty, 1[$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$. Si U est un voisinage de $(0, 1)$ dans M, alors $U \setminus \{(0, 1)\}$ a 3 composantes connexes au moins ; or si un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ envoie U sur un segment dans $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, le segment privé de l'image de $(0, 1)$ aura 2 composantes connexes.

Définition 2.11. On appelle **paramétrisation** de M une application $h : V \to \mathbb{R}^n$ qui est une immersion et un homéomorphisme de V sur un ouvert de M (i.e. $U \cap M$ pour un ouvert U de $\mathbb{R}^n$). On appelle **paramétrisation locale** une application $h : V \to \mathbb{R}^n$ qui induit une paramétrisation locale au voisinage de tout point de V. (3) affirme qu'on peut recouvrir M par des ouverts qui sont des images de paramétrisations.

2.4 Exemples

Exemple 2.12 (La sphère). La sphère $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, définie comme

$$\{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}) \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

est une sous-variété de dimension n de classe C^∞. En effet $S^n = g^{-1}(0)$ où

$$g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 - 1,$$

est une submersion C^∞, car $J_x g = (2x_1, \ldots, 2x_{n+1})$ est non nul si $x \neq 0$, donc en particulier sur S^n. L'application $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ est une paramétrisation locale du cercle S^1.

Exemple 2.13 (Les tores). Soit

$$\begin{aligned} T^n &= \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 - 1 = 0, \cdots, |z_n|^2 - 1 = 0\} \\ &= \{x = (x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \cdots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 - 1 = 0\} \end{aligned}$$

C'est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{2n} \approx \mathbb{C}^n$ (considérer la submersion adéquate). On peut également le paramétrer localement par l'application

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (e^{it_1}, \ldots, e^{it_n}) \quad \text{de } \mathbb{R}^n \text{ dans } \mathbb{C}^n.$$

Exercice 2.14 (Tore de révolution). Soit $0 < a < b$. Soit $C \subset \mathbb{R}^3$ le cercle centré en $(b, 0, 0)$, de rayon a, dans le plan des $(x, 0, z)$. Soit M l'ensemble des points parcourus par C sous l'effet de toutes les rotations d'axe $(0, 0, 1)$. Construire une paramétrisation locale de M (paramétrer le cercle et faites tourner).

Exemple 2.15. L'arc paramétré $(\mathbb{R}, f)$, $t \mapsto (t^2, t^3)$ n'est pas une immersion en 0, mais cela ne suffit pas pour conclure que $M = f(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de classe C^1. De même dire que $M = g^{-1}(0)$ où $g(x, y) = x^3 - y^2$ n'est pas une submersion en $(0, 0)$ n'est pas concluant. Raisonnons par contradiction en supposant que M est une sous-variété. Alors d'après la caratérisation (4) c'est au voisinage de $(0, 0)$ un graphe, de la forme $\{(x, F(x)) \mid x \in V\}$ ou $\{(F(y), y) \mid y \in V$, avec F de classe C^1 définie sur V voisinage de 0. Dans le premier M contiendrait des $(x, F(x))$ avec $x < 0$, ce qui est exclu. Dans le deuxième, on aurait $F^3(y) = y^2$, soit $F(y) = y^{2/3}$, mais cette fonction n'est pas dérivable en 0.

Exemple 2.16. Le cône de révolution, $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 = 0\}$ n'est pas une sous-variété de R^3. Le fait que l'application $(x,y,z) \mapsto x^2+y^2-z^2 = 0$ ne soit pas une submersion en 0 ne suffit pas (il pourrait y avoir une autre submersion qui marche). Un argument de connexité fait l'affaire. Si on pouvait redresser localement C au voisinage de 0 en un disque de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ on trouverait un voisinage épointé de 0 dans C ayant deux composantes connexes, homéomorphe à une boule épointée de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, qui est connexe.

Exemple 2.17. Considérons $C_+ = \{(x,y,z) \in C \mid z \geq 0\}$ la partie supérieure de cône. Ce n'est pas une sous-variété mais l'argument de connexité ne tient plus. On revient à la définition. Supposons que ψ soit un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^3$ en 0, qui envoie un voisinage de 0 dans C_+ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Considérons les vecteurs $u_1 = (0,1,-1)$, $u_2 = (0-1,-1)$ et $u_3 = (-1,0,-1)$. Les courbes $\gamma_i(t) = t.u_i$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et dans C_+ pour $t \leq 0$, pour $i = 1,2,3$. Alors les courbes $t \mapsto \psi \circ \gamma_i(t)$, sont dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ pour $t \leq 0$ voisin de 0. On peut calculer leur dérivée en $t = 0$, comme leur dérivée à gauche :

$$d_0\psi.u_i = d_0\psi.\gamma_i'(0) = \lim_{t\to 0, t<0} \frac{\psi \circ \gamma_i(t) - 0}{t} \in \mathbb{R}^2 \times \{0\},$$

donc $d_0\psi$ envoie $\{u_1,u_2,u_3\}$ dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Or $\{u_1,u_2,u_3\}$ est linéairement indépendante, cela contredit le fait que $d_0\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ soit un isomorphisme.

2.5 Espace tangent

Définition 2.18. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, $a \in M$ et $v \in \mathbb{R}^n$. On dit que v est un **vecteur tangent à M en a** s'il est le vecteur vitesse en a d'une courbe tracée sur M :

$$\exists c :]-\varepsilon,\varepsilon[\to \mathbb{R}^n \text{ différentiable, } c(0) = a,\ c(]-\varepsilon,\varepsilon[) \subset M,\ c'(0) = v.$$

On note T_aM l'ensemble des vecteurs tangents à M en a, qu'on appelle *espace tangent à M en a*.

Proposition 2.19. Soit M une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$ et $a \in M$. Alors T_aM est un sous-espace de vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension d.

`Preuve:` Revenons à la définition d'une sous-variété. Soit U un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$, V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$ un difféomorphisme tel que $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$, $f(a) = 0$. Montrons que $T_aM = (d_af)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$.
Soit $v \in T_aM$ alors il existe $c :]-\varepsilon,\varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ différentiable tel que $c(0) = a$, $c(]-\varepsilon,\varepsilon[) \subset M$ et $c'(0) = v$. On peut supposer ε assez petit pour que $c(]-\varepsilon,\varepsilon[) \subset U$. Alors $f \circ c :]-\varepsilon,\varepsilon[\to \mathbb{R}^d \times \{0\}$ et

$$(f \circ c)'(0) = d_{c(0)}f.c'(0) = d_af.v \in \mathbb{R}^d \times \{0\}.$$

d'où $d_af(T_aM) \subset \mathbb{R}^d \times \{0\}$, soit $T_aM \subset (d_af)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$. Inversement, soit $w \in \mathbb{R}^d \times \{0\}$. Posons $c_w(t) = f^{-1}(tw)$ pour $t \in]-\varepsilon,\varepsilon[$, $\varepsilon > 0$ assez petit. C' est une courbe dans M telle que

$c_w(0) = a$. En dérivant on obtient un vecteur $v = d_0 f^{-1}.w = (d_a f)^{-1}.w \in T_a M$ puisque vecteur vitesse d'une courbe de M. D'où $(d_a f)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}) \subset T_a M$. $\square$

Caractérisons $T_a M$ suivant les différentes formulations de M.

Point de vue équation implicite Soit U un voisinage de a, $g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ une submersion en a telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$. Alors

$$\boxed{T_a M = \ker d_a g}$$

Les sous-espaces vectoriels $T_a M$ et $\ker d_a g$ ayant la même dimension, il suffit de vérifier que $T_a M \subset \ker d_a g$. Or si $v \in T_a M$ est le vecteur vitesse en a d'une courbe $c_v :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$, on a $g \circ c_v(t) = 0$ pour t voisin de 0 d'où

$$d_a g.v = d_a g.c_v'(0) = (g \circ c_v)'(0) = 0$$

et le résultat.
Le cas particulier $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (hypersurface $d = n - 1$) est inté ressant : Si on note

$$\nabla_a g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right),$$

le vecteur gradient de g, $d_a g.v = \langle \nabla_a g, v \rangle$ pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, donc

$$\boxed{T_a M = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla_a g, v \rangle = 0\} = \nabla_a g^{\perp}}$$

L'espace tangent est l'orthogonal du vecteur gradient de la submersion. Si $g = (g_1, \ldots, g_{n-d})$, $\ker dg = \cap \ker dg_i$ donc

$$T_a M = \nabla_a g_1{}^{\perp} \cap \ldots \cap \nabla_a g_{n-d}{}^{\perp}$$

Point de vue paramétrisation Soit U un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et $h : V \to U$ une paramétrisation de M telle que $h(0) = a$. Alors

$$\boxed{T_a M = d_0 h(\mathbb{R}^d).}$$

Puisque $d_a h$ est injective, $\dim d_0 h(\mathbb{R}^d) = d$ et il suffit de montrer que $T_a M \supset d_0 h(\mathbb{R}^d)$. Or pour chaque vecteur $v \in \mathbb{R}^d$, $t \mapsto c_v(t) = h(tv)$ est une courbe tracée sur M (pour t proche de 0) différentiable d'où $d_0 h.v = c_v'(0) \in T_a M$. Une base, souvent utile, de $T_a M$ est donné e par les dé rivé es partielles

$$\{\frac{\partial h}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_d}\}$$

En effet $\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} h(x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_d) = d_a h.e_i \in T_a M$ et les vecteurs sont indé pendants puisque d_h est injective.

point de vue Graphe Soit U un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$, une identification par un automorphisme linéaire $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$, un ouvert V de $\mathbb{R}^d$ et $f : V \to \mathbb{R}^{n-d}$ une application de classe C^k telle que $U \cap M = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \mid x \in V\}$. Supposons que $a = (x_0, f(x_0))$, alors

$$\boxed{T_a M = \{(w, d_{x_0} f.w) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \mid w \in \mathbb{R}^d\} = \text{graphe de } d_{x_0} f.}$$

En effet pour tout vecteur $w \in \mathbb{R}^d$, la courbe $t \mapsto (x_0 + tw, f(x_0 + tw)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ est contenue dans M (t petit) différentiable dans $\mathbb{R}^n$ de vecteur vitesse en a égal à $v = (w, d_{x_0} f.w)$. Ceci montre que $T_a M$ contient le graphe de $d_{x_0} f$. Comme le graphe d'une application liné aire dé finie sur $\mathbb{R}^d$ est un sous-espace vectoriel de dimension d, on a é galité .

La notion d'espace tangent permet de faire du calcul différentiel entre sous variétés : si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ et N une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, on peut donner un sens à la différentiabilité de $F : M \to N$ en un point $a \in M$. La différentielle est alors une application linéaire $d_a F : T_a M \to T_{F(a)} N$. Nous n'allons pas pénétrer dans ce vaste continent (hors programme) mais simplement donner une nouvelle saveur au fait suivant bien connu : une fonction différentiable a une différentielle nulle en un extremum. Le point intéressant est que la fonction sera définie sur une sous-variété M, la différentielle sera nulle en restriction à l'espace tangent.

Théorème 2.20 (extrémas liés). Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d, F une fonction différentiable à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un voisinage de M. Si $a \in M$ est tel que $F(a)$ est un extremum local de $F_{|M}$, alors $d_a F_{|T_a M} = 0$. De plus, si $g = (g_1, \ldots, g_{n-d})$ est une submersion telle que $M = g^{-1}(0)$, alors il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-d}) \in \mathbb{R}^{n-d}$ tels que

$$d_a F = \lambda_1 d_a g_1 + \cdots + \lambda_{n-d} d_a g_{n-d}.$$

Les réels λ_i sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

`Preuve:` Soit $v \in T_a M$ et $t \mapsto c_v(t)$ une courbe tracée sur M telle que $c(0) = a$ et $c'(0) = v$. La fonction d'une variable $t \mapsto F \circ c_v(t)$ admet un extremum local en $t = 0$, donc y est de dérivée nulle. Or $(F \circ c_v(t))'(0) = d_{c_v(0)} F.c_v'(0) = d_a F.v$, d'où $d_a F.v = 0$ pour tout $v \in T_a M$. Montrons la dernière assertion du théorème. Puisque g est une submersion, les formes linéaires $d_a g_1, \ldots, d_a g_{n-d}$ sont linéairement indépendantes. Supposons que $\{d_a g_1, \ldots, d_a g_{n-d}, d_a F\}$ soit linéairement indépendante. Alors l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n-d+1}$ définie par

$$v \mapsto (d_a g_1 v, \ldots, d_a g_{n-d} v, d_a F v)$$

est de rang $n-d+1$, donc de noyau de dimension $d-1$. Or le noyau contient T_aM : puisque $g = 0$ sur M, $T_aM = \ker d_a g$ et on a vu que $d_aF(T_aM) = 0$. Il s'ensuit que $\{d_a g_1, \ldots, d_a g_{n-d}, d_aF\}$ est liée, et comme les $n - d$ premiers éléments sont indépendants, on a le résultat. $\square$

Chapitre 3 : étude métrique locale des surfaces de $\mathbb{R}^3$

On s'intéresse à la géométrie locale des surfaces $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$: longueur de courbes tracées sur Σ, aires de domaines $\subset \Sigma$, courbure(s) de Σ. Comme on travaille localement, on supposera qu'il existe une paramétrisation

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \Sigma \subset \mathbb{R}^3$$

(immersion + homéomorphisme sur son image)

1 Première forme fondamentale

1.1 Rappels sur les produits scalaires

Si E est un espace vectoriel (réel), un produit scalaire sur E est $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique défini positif ($\langle x, x \rangle > 0, \forall x \neq 0$). Si E de dimension finie, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base, la matrice symétrique $M = (\langle e_i, e_j \rangle)$ détermine le produit scalaire par la formule

$$\langle \sum x_i e_i, \sum y_j e_j \rangle = \sum x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = (x_1, \ldots, x_n) \left(\langle e_i, e_j \rangle \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^t XMY$$

Si $L : E \to F$ est linéaire injective et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur F, on peut le tirer en arrière en un produit scalaire sur E noté $L^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$L^* \langle x, y \rangle = \langle Lx, Ly \rangle.$$

On va appliquer ceci en chaque $a \in U$ pour tirer en arrière avec $d_a f$ le produit scalaire standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^3$, ou ce qui revient au même, sa restriction à $T_{f(a)}\Sigma$.

1.2 Première forme fondamentale, expression locale

Définition 3.1. On appelle **première forme fondamentale** en $p \in \Sigma$, et on note I_p, la restriction du produit scalaire standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ à $T_p\Sigma$:

$$\forall X, Y \in T_p\Sigma, \quad I_p(X,Y) = \langle X, Y \rangle.$$

Si $a \in U$ et $f(a) = p$, puisque $d_af : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est injective (et $d_af : \mathbb{R}^2 \to T_p\Sigma$ est un isomorphisme), on peut tirer en arrière $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (ou I_p). On obtient un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, dépendant du point a :

$$g_a = (d_af)^* \langle \cdot, \cdot \rangle = (d_af)^* I_p$$

défini donc par

$$g_a(V, W) = \langle d_af.V, d_af.W \rangle = I_p(V, W)$$

Si $\{e_1, e_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, (u, v) les coordonnées dans cette base, alors $d_af.e_1 = \frac{\partial f}{\partial u}$ et $d_af.e_2 = \frac{\partial f}{\partial v}$. La matrice de g_a dans $\{e_1, e_2\}$, qu'on note $(g_{ij})_a$ est donc

$$(g_{ij})_a = \begin{pmatrix} g_a(e_1,e_1) & g_a(e_1,e_2) \\ g_a(e_2,e_1) & g_a(e_2,e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \rangle & \langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \rangle \\ \langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \rangle & \langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \rangle \end{pmatrix} (a) =: \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

où E, F, et G sont des fonctions de (u, v). C'est aussi matrice de I_p dans la base $\{\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\}$ de $T_p\Sigma$. On a aussi l'expression plus synthétique

$$(g_{ij})_a = {}^tJ_af \cdot J_af$$

où $J_af = (\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v})$ est la matrice jacobienne de f

((si $f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, Jf est la matrice 3×2, $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$ donc ${}^tJ_af \cdot J_af$ est bien 2×2. Exercice : vérifier la formule.))

Définition 3.2. L'application $U \to M_2(\mathbb{R}), a \mapsto (g_{ij})(a)$ est appelée **expression de la première forme fondamentale** dans les coordonnées (U, f).

Si on a une autre paramétrisation $(\tilde{U}, \tilde{f})$, le lien entre les deux expressions de la première forme fondamentale est donnée par :

Lemme 3.3. Soit $(\tilde{U}, \tilde{f})$ une autre paramétrisation de Σ, avec $\tilde{f} = f \circ \phi$, alors

$$(\tilde{g}_{ij}) = {}^t J\phi \cdot (g_{ij} \circ \phi) \cdot J\phi$$

Preuve:

$$\begin{aligned}
(\tilde{g}_{ij})_a &= {}^t J_a \tilde{f} \cdot J_a \tilde{f} \\
&= {}^t (J_{\phi(a)} f \cdot J_a \phi) \cdot (J_{\phi(a)} f \cdot J_a \phi) \\
&= {}^t J_a \phi \cdot {}^t J_{\phi(a)} f \cdot J_{\phi(a)} f \cdot J_a \phi \\
&= {}^t J_a \phi \cdot (g_{ij})_{\phi(a)} \cdot J_a \phi
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple 3.4. $\Sigma = S^2$ (ou un bout de S^2). On a une première paramétrisation $U = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$, $f : (u,v) \mapsto (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$, qui donne

$$J_{(u,v)}\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{pmatrix}, \qquad (g_{ij})_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{u^2}{1-u^2-v^2} & \frac{-uv}{1-u^2-v^2} \\ \frac{-uv}{1-u^2-v^2} & 1 + \frac{v^2}{1-u^2-v^2} \end{pmatrix}$$

Une autre paramétrisation (coordonnées sphériques)

$$\tilde{U} =]-\pi/2, \pi/2[\times]-\pi/2, 3\pi/2[, \qquad \tilde{f}(r,\theta) = (\cos(r)\cos(\theta), \cos(r)\sin(\theta), \sin(r)).$$

Alors

$$(\tilde{g})_{(r,\theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2(r) \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.5. Calculer l'expression de la première forme fondamentale lorsque la paramétrisation est donnée par un graphe $(u,v) \mapsto (u, v, h(u,v))$.

1.3 Longueur

La longueur de $\gamma : [a,b] \to \Sigma$ est sa longueur dans $\mathbb{R}^3$:

$$L(\gamma) = \int_a^b \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle^{1/2} \, dt.$$

Il peut-être avantageux de calculer cette longueur dans U : si $\gamma = f \circ \beta$, $\beta : [0,1] \to U$, alors

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= \int_a^b \langle d_{\beta(t)} f.\beta'(t), d_{\beta(t)} f.\beta'(t) \rangle^{1/2} \, dt \\
&= \int_a^b g_{\beta(t)}(\beta'(t), \beta'(t))^{1/2} \, dt \\
&= \int_a^b \sqrt{{}^t\beta'(t) \cdot (g_{ij})_{\beta(t)} \cdot \beta'(t)} \, dt
\end{aligned}$$

De même, l'angle de vecteurs unitaires X, Y de $T_p\Sigma$, peut se calculer comme

$$\arccos I_p(X,Y) = \arccos g_a(V,W)$$

où $d_af.V = X$ et $d_af.W = Y$.

Il peut paraître plus compliqué de travailler dans U avec un produit scalaire variable plutôt qu'avec le produit scalaire ambiant de $\mathbb{R}^3$, qui est fixe. L'avantage est que l'espace tangent de U est fixe, c'est $\mathbb{R}^2$, alors que celui de Σ dépend de p. Voyons par exemple comment montrer que les plus courts chemins sur S^2 sont les arcs de grand cercle, en travaillant en coodonnées.

Lemme 3.6. Les plus courts chemins sur S^2 sont exactement les arcs de grand cercle (intersection de S^2 avec un plan vectoriel).

`Preuve:` On travaille en coordonnées sphériques. Quitte à changer de repère, on se ramène à considérer deux points p, q situés sur un méridien, avec $p = \tilde{f}(r_1, 0)$ et $q := \tilde{f}(r_2, 0)$ (où $\tilde{f}$ est la paramétrisation de 3.4). Soit $\beta(t) = (r(t), \theta(t)) \,:\, [0,1] \to \tilde{U}$ joignant $(r_1, 0)$ à $(r_2, 0)$, $\gamma = \tilde{f} \circ \beta$. Alors

$$\begin{aligned}
L(\gamma) = L_{\tilde{g}}(\beta) &= \int_0^1 \sqrt{(r', \theta') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix}}\, dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{r'^2 + \theta'^2 \cos^2(r)}\, dt \\
&\geq \int_0^1 \sqrt{r'^2}\, dt \\
&\geq \int_0^1 |r'|\, dt = |r_2 - r_1|
\end{aligned}$$

si la courbe ne fait pas d'aller-retour, soit la longueur de l'arc de méridien joignant p à q. De plus l'inégalité est stricte si $\theta' \neq 0$. □

Remarque 3.7. Plus généralement, si l'expression de la première forme fondamentale est du type $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^2(u,v) \end{pmatrix}$, les segments horizontaux dans U sont minimisants pour la "longueur"

$$L_g(\beta) = \int \sqrt{g(\beta', \beta')_{\beta(t)}}\, dt$$

Leur image dans Σ est donc minimisante pour la longueur usuelle, parmi les courbes de Σ. Par contre le segment vertical n'est pas minimisant en général. Par exemple les parallèles (sauf l'équateur) ne sont pas minimisants sur la sphère, donc les segments verticaux de $\tilde{U} = \times] - \pi/2, \pi/2[\times] - \pi/2, 3\pi/2[$ non plus pour $L_{\tilde{g}}$.

Exercice 3.8. Montrer que les longueurs mesurées dans (U, f) sont les longueurs usuelles (à multiple près) si et seulement si il existe $C > 0$ tel que $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (soit $g = C\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$).

Remarque 3.9. On peut également exprimer la première forme fondamentale en coordonnées à l'aide de *formes différentielles*. Si (u, v) sont des coordonnés de $U \subset \mathbb{R}^2$ ($x = ue_1 + ve_2$ est représenté par (u, v)), la différentielle des applications u et v sont des formes linéaires $du : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $dv : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si $V = (a, b)$, $du(V) = a$ et $dv(V) = b$. Si on note du^2 la forme quadratique $(du)^2$ et $(dudv)(V) = du(V)dv(V)$ alors la forme quadratique notée ds^2 définie par $ds^2(V) = g(V, V)$, vérifie

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \tag{3.2}$$

Par exemple, la première forme fondamentale de la sphère en coordonnées sphériques s'écrit $ds^2 = dr^2 + \cos^2(r)d\theta^2$. Si (u', v') sont d'autres coordonnées, par exemple si $(u, v) = \Phi(u', v')$ ou Φ est un difféomorphisme, il suffit de calculer

$$du = \frac{\partial u}{\partial u'}du' + \frac{\partial u}{\partial v'}dv'$$

et

$$dv = \frac{\partial v}{\partial u'}du' + \frac{\partial v}{\partial v'}dv'$$

de remplacer dans (3.2) et développer comme des produits, pour obtenir $ds^2 = E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2$.

1.4 Aire

Soit $D \subset \Sigma$ un domaine compact, $f^{-1}(D) \subset U$. On veut mesurer l'aire de D en faisant le calcul dans U.

Définition 3.10. On appelle *aire de D* l'intégrale

$$A(D) = \int_{f^{-1}(D)} \sqrt{\det(g_{ij})}\, dudv.$$

Vérifions que cela ne dépend pas de la paramétrisation. Si $\tilde{f} = f \circ \phi$,

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{f}^{-1}(D)} \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})}\, dudv &= \int_{\tilde{f}^{-1}(D)} \sqrt{\det({}^tJ\phi \cdot (g_{ij})_\phi \cdot J\phi)}\, dudv \\
&= \int_{\phi^{-1}\circ f^{-1}(D)} |\det J\phi| \sqrt{\det(g_{ij})_\phi}\, dudv \\
&= \int_{f^{-1}(D)} \sqrt{\det(g_{ij})}\, dudv
\end{aligned}$$

d'après la formule de changement de variable.

Pourquoi dit-on cette expression mesure t'on l'aire ? Il faudrait définir l'aire proprement, ce qui serait technique. Donnons juste une explication heuristique. Si V, W sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, l'aire du losange engendré par $\{V, W\}$ est $|\det(V, W)|$. On voudrait définir l'aire dA d'un élément infinitésimal de Σ comme l'aire du losange P engendré par $\{\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\} \subset T_p\Sigma$. Cependant on ne peut prendre le déterminant de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$...Ajoutons leur un troisième vecteur normal unitaire n, par exemple le normalisé de $\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}$. Alors le volume du parallélépipède engendré par $M = \{\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, n\}$ est $|\det(M)| = Aire(P)$. Or

$$|\det(M)| = \sqrt{\det({}^tM \cdot M)} = \sqrt{{}^tJf \cdot Jf} = \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

Exercice 3.11. (1) Montrer que l'aire de S^2 est 4π.

(2) Montrer qu'il existe des paramétrisations (U, f) et $(\tilde{U}, \tilde{f})$ de S^2 tel que parallèles et méridiens soient orthogonaux vus dans U et $\tilde{U}$, avec de plus $\det(g_{ij}) = 1$ (projection de Peters) et $(\tilde{g}_{ij}) = \lambda(\cdot)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. (projection de Mercator). *Indication : On pourra partir des coordonnées sphériques.*

2 Courbures

Heuristique de la courbure : on déplace sur Σ un vecteur unitaire normal N et on regarde comment il tourne : on mesure N'. Sur une sphère, le vecteur normal tourne d'autant plus vite que le rayon est petit, confirmant l'intuition qu'une petite sphère est plus courbée qu'une grosse. Sur un plan, le vecteur normal est constant : le plan est de courbure nulle. Comme il y a plusieurs directions dans lesquelles déplacer N, l'objet que l'on récupère est plus compliqué qu'un nombre, c'est un endomorphisme.

2.1 Application de Gauss

On commence par munir Σ d'une normale unitaire "différentiable", qu'on appelle application de Gauss.

Définition 3.12. On appelle $N : \Sigma \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ une application de Gauss si pour tout $p \in \Sigma$, $N(p)$ est perpandiculaire à $T_p\Sigma$, et si $N \circ f : U \to \mathbb{R}^3$ est différentiable, lorsque (U, f) est une paramétrisation de Σ.

Il est clair que la condition de différentiabilité de dépend pas de (U, f). De plus il n'y a que 2 applications de Gauss possibles. En effet, notons

$$\nu(x) = \frac{\partial_u f \wedge \partial_v f}{\|\partial_u f \wedge \partial_v f\|}.$$

C'est en chaque point x un vecteur unitaire normal à $T_{f(x)}\Sigma$. Il est clair qu'en chaque $x \in U$, $N(f(x)) = \pm\nu(x)$. Un argument immédiat de continuité implique que $N \circ f = \nu$ ou $N \circ f = -\nu$, sur U. Alors $N = \nu \circ f^{-1}$ ou $N = -\nu \circ f^{-1}$.

Choisir une application de Gauss revient donc à choisir une paramétrisation (U, f) et à poser $N = \nu \circ f^{-1}$. On dit qu'on *oriente* la surface Σ. Une autre paramétrisation donne la même application de Gauss si la matrice jacobienne du changement de paramétrisation est de déterminant positif. En effet :

Lemme 3.13. Si $(\tilde{U}, \tilde{f})$ est une paramétrisation de Σ et $\tilde{f} = f \circ \varphi$, alors

$$\tilde{\nu}(x) = \varepsilon.\nu(\phi(x))$$

où $\varepsilon = \pm 1$ est le signe du déterminant de $J_x\varphi$.

`Preuve:` Notons $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, $J_x\varphi = \begin{pmatrix} \partial_u \varphi_1 & \partial_v \varphi_1 \\ \partial_u \varphi_2 & \partial_v \varphi_2 \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'où au point x,

$$\begin{aligned} \partial_u \tilde{f} &= (\partial_u f \circ \phi)\partial_u \varphi_1 + (\partial_v f \circ \phi)\partial_u \varphi_2 = (a\partial_u f + c\partial_v f) \circ \phi \\ \partial_v \tilde{f} &= (\partial_u f \circ \phi)\partial_v \varphi_1 + (\partial_v f \circ \phi)\partial_v \varphi_2 = (b\partial_u f + d\partial_v f) \circ \phi \end{aligned}$$

D'où en utilisant la bilinéarité et l'antisymétrie du produit vectoriel,

$$\partial_u \tilde{f} \wedge \partial_v \tilde{f} = (ad - bc)(\partial_u f \wedge \partial_v f) \circ \phi.$$

□

EXEMPLE 3.14. Sur S^2, $N = Id$ ou $N = -Id$. Sur le cylindre, paramétré par $f(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$, $\nu(u, v) = (\cos(u), \sin(u), 0)$.

2.2 Endomorphisme de Weingarten, seconde forme fondamentale

On veut maintenant dériver l'application de Gauss en un point $p \in \Sigma$ dans une direction $X \in T_p\Sigma$. Soit c une courbe lisse tracée sur Σ telle que $c(0) = p$ et $c'(0) = X$. On commet l'abus de notation d'écrire $N(t) = N \circ c(t)$. On définit

Définition 3.15. On appelle différentielle de l'application de Gauss, $d_pN : T_p\Sigma \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$d_pN.X = N'(0) \left(= \frac{d}{dt}_{|t=0} N \circ c(t) \right)$$

Vérifions que l'expression de dépend pas de la courbe c. On a $N \circ c(t) = \nu \circ f^{-1} \circ c$, donc

$$N'(0) = d_x\nu.(d_xf)^{-1}.c'(0)$$

ne dépend que de $c'(0) = X$. L'identité

$$d_pN = d_x\nu.(d_xf)^{-1} \tag{3.3}$$

montre que d_pN est linéaire.

On a de plus :

Proposition 3.16. La différentielle de l'application de Gauss d_pN est un endomorphisme $T_p\Sigma \to T_p\Sigma$, symétrique au sens que

$$I_p(d_pN.X, Y) = I_p(X, d_pN.Y)$$

pour tous $X, Y \in T_p\Sigma$.

`Preuve:` En dérivant l'égalité $\langle N(t), N(t)\rangle = 1$, il vient $\langle N'(0), N(0)\rangle = 0$ d'où $N'(0)$ est orthogonal à $N(0)$, donc dans $T_p\Sigma$. Il reste à voir la symétrie. ll suffit de la vérifier dans la base $\{\partial_u f, \partial_v f\}$ de $T_p\Sigma$. On a

$$\begin{aligned} d_pN.\partial_u f &= d_x\nu.(d_xf)^{-1}\partial_u f = \partial_u\nu \\ d_pN.\partial_v f &= \partial_v\nu \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} I_p(d_pN.\partial_u f, \partial_v f) &= \langle \partial_u\nu, \partial_v f\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial u}\langle \nu, \partial_v f\rangle - \langle \nu, \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\rangle \\ &= 0 - \langle \nu, \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\rangle \\ &= I_p(\partial_u f, d_pN.\partial_v f) \end{aligned}$$

par les mêmes égalités. □

Définition 3.17. On appelle **endomorphisme de Weingarten** l'endomorphisme symétrique

$$L_p = -d_pN : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$$

et **seconde forme fondamentale** la forme bilinéaire symétrique sur $T_p\Sigma$:

$$II_p(X, Y) = I_p(L_pX, Y).$$

La seconde forme est symétrique, mais pas nécessairement définie et positive.

EXEMPLE 3.18. Sur la sphère, puisque $\nu(x) = \pm x$, $d_x\nu = \pm Id$.
Sur le cylindre

$$J\nu = \begin{pmatrix} -\sin(u) & 0 \\ \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (\partial_u\nu \partial_v\nu)$$

$\partial_u f = \begin{pmatrix} -\sin(u) \\ \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\partial_v f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a donc

$$\begin{aligned} d_pN.\partial_u f &= \partial_u\nu = \partial_u f \\ d_pN.\partial_v f &= \partial_v\nu = 0 \end{aligned}$$

La matrice de $L_p = -d_pN$ dans la base $\{\partial_u f, \partial_v f\}$ est donc $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donnons une interprétation géométrique du nombre $\Pi_p(X, X)$.

Proposition 3.19. Soit c une courbe tracée sur Σ, notons $X = c'$. Alors

$$\langle c'', N\rangle = II_p(X, X).$$

Autrement dit $II_p(X, X)$ est la composante normale de l'accélération de c.

`Preuve:` Puisque c est tracée sur Σ, $\langle c', N \circ c\rangle = 0$ en tout point. En dérivant :

$$\langle c'', N\rangle + \langle c', d_pN.c'\rangle = 0.$$

□

Si on décompose l'accélération c'' en sa composante normale (colinéaire à N) et sa composante tangencielle dans $T\Sigma$, on a

$$\begin{aligned} c'' &= \langle c'', N\rangle + c''_T \\ &= II_p(X, X) + c''_T \end{aligned} \tag{3.4}$$

Il y a là un fait remarquable : la composante normale de l'accéleration de dépend pas de c mais uniquement de $X = c'(0)$, elle est imposée par la surface. On note souvent $K_N = II_p(X, X)$ la *courbure normale* de c en p. Toute courbe de Σ passant par p à la vitesse X a la même courbure normale K_N. Si c est paramétrée par longueur d'arc, sa courbure usuelle est $K = \|c''(s)\|$. La décomposition ci-dessus montre que $K^2 \geq K_N^2$. On peut voir K_N comme une courbure minimale imposée par Σ à toute courbe de vitesse X restant sur Σ.

On peut se demander s'il existe toujours sur Σ, des courbes de "courbure minimale", c'est-à-dire donc l'accélération tangencielle c''_T est identiquement nulle. On verra que oui. Ces courbes s'appelent des *géodésiques* et jouent un rôle très important en géométrie. Ce sont exactement les courbes localement minimisantes pour la longueur.

Exercice 3.20. Vérifier que les grands cercles de la sphère sont des géodésiques.

Le signe $II_p(X,X)$ renseigne également sur la position de c par rapport au plan tangent. Un développement limité et (3.4) donne

$$c(t) = c(0) + tc'(0) + \frac{t^2}{2}c''_T(0) + \frac{t^2}{2}II_p(X,X) + o(t^2)$$

donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que la restriction de c à $]-\varepsilon,\varepsilon[$ est dans le demi-espace délimité par $p + T_p\Sigma$, du coté de $N(p)$ si $II_p(X,X) > 0$ et de $-N(p)$ si $II_p(X,X) < 0$. On ne peut rien dire si $II_p(X,X) = 0$.

On peut définir à partir de $L_p = -d_pN$ plusieurs notions de courbure :

Définition 3.21. (1) Les valeurs propres de L_p sont appelées les **courbures principales** et sont notées κ_1, κ_2. Les directions propres sont appelées **directions principales**
(2) Le déterminant $K = \det(L) = \kappa_1\kappa_2$ est appelée **courbure de Gauss**.
(3) La moyenne $H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(L) = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ est appelée **courbure moyenne**.

Remarque 3.22. (1) On peut montrer que les courbures principales sont le minimum et le maximum de la courbure normale $II_p(X,X)$ sous la contrainte $\|X\| = 1$. Les directions propres sont orthogonales.
(2) Le signe de κ_1 et de κ_2 dépend de l'orientation choisie pour N, mais pas leur produit K.

Exemple 3.23. La sphère est de courbures principales $\kappa_1 = \kappa_2$ égales en tout point (à ± 1), donc de courbure de Gauss $+1$.
Le cyclindre est de courbure principales 0 et 1, donc de courbure de Gauss nulle.

2.3 Expression en coordonées locales

Notons $(h_{ij}) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ l'expression de II_p dans la base $\{\partial_u f, \partial_v f\}$. Notons $(u_1,u_2) = (u,v)$, alors

$$II_p(\partial_{u_i}f, \partial_{u_j}f) = \langle -d_pN.\partial_{u_i}f, \partial_{u_j}f\rangle = \langle -\partial_{u_i}\nu, \partial_{u_j}f\rangle = \langle \nu, \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}\rangle. \tag{3.5}$$

Par définition du produit vectoriel on a donc

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\|\partial_u f \wedge \partial_v f\|} \det\left(\partial_u f, \partial_v f, \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right) \\ B &= \frac{1}{\|\partial_u f \wedge \partial_v f\|} \det\left(\partial_u f, \partial_v f, \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\right) \\ C &= \frac{1}{\|\partial_u f \wedge \partial_v f\|} \det\left(\partial_u f, \partial_v f, \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) \end{aligned}$$

Notons (h_i^j) les coordonées de L_p dans la base $\{\partial_{u_1} f, \partial_{u_2} f\}$ (avec $L_p \partial_{u_i} f = h_i^1 \partial_{u_1} f + h_i^2 \partial_{u_2} f$). Pour simplifier on note $\partial_i f = \partial_{u_i} f$ et on utilise les conventions d'Einstein de sommation : si une lettre apparait à la fois en indice et en exposant dans un expression, celle-ci-est à considérer comme une somme sur la lettre en question. Ainsi

$$L_p(\partial_i f) = h_i^j \partial_j f \quad (= \sum_j h_i^j \partial_j f)$$

On a

$$h_{ij} = II_p(\partial_i f, \partial_j f) = \langle L_p \partial_i f, \partial_j f \rangle = \langle h_i^k \partial_k f, \partial_j f \rangle = h_i^k g_{kj}$$

Notons (g^{ij}) la matrice inverse $(g_{ij})^{-1}$,

$$(g^{ij}) = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

Alors

$$h_{ij} g^{jl} = h_i^k g_{kj} g^{jl} = h_i^k \delta_k^l$$

où δ_k^l est le symbole de Kronecker, égal à 0 si $k \neq l$ et $\delta_k^k = 1$. On voit que la somme sur k se réduit à $k = l$ d'où

$$h_i^l = h_{ij} g^{jl}.$$

Par exemple

$$\begin{aligned} h_1^1 &= h_{11} g^{11} + h_{12} g^{21} = \frac{1}{EG - F^2}(AG - BF) \\ h_2^2 &= h_{21} g^{12} + h_{22} g^{22} = \frac{1}{EG - F^2}(-BF + CE) \end{aligned}$$

D'un point de vue matriciel

$$\boxed{(h_i^j) = (h_{ij})(g^{ij}).}$$

Donnons une autre preuve, complètement matricielle. Notons $H = (h_{ij})$ et $G = (g_{ij})$ les matrices dans la base $\{\partial_1 f, \partial_2 f\}$ des deuxièmes et première forme fondamentale, et $H' = (h_i^j) = \begin{pmatrix} h_1^1 & h_1^2 \\ h_2^1 & h_2^2 \end{pmatrix}$. Notons que la matrice de l'endomorphisme L_p est dans cette même base, ${}^t H'$. On a

$$II(x, y) = {}^t X H Y = \langle L_p x, y \rangle = {}^t({}^t H' X) G Y = {}^t X H' G Y$$

d'où $H' = H G^{-1}$. On en déduit

Proposition 3.24.

$$K = \det(h_i^j) = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{AC - B^2}{EG - F^2}$$

et

$$H = \frac{1}{2} h_i^i = \frac{1}{2(EG - F^2)}(AG - \mathbf{2}BF + CE)$$

Le signe de la courbure de Gauss renseigne sur la position de Σ par rapport au plan (affine) tangent :

Proposition 3.25. Si $K(p) > 0$, il existe un voisinage Ω de p tel que $(\Sigma \cap \Omega) \cap (p + T_p\Sigma) = \{p\}$. Si $K(p) < 0$, pour tout voisinage Ω de p il existe des points de $\Omega \cap \Sigma$ de part et d'autre de $p + T_p\Sigma$.

`Preuve:` Ecrivons Σ au voisinage de p comme un graphe. Quitte à changer les axes de coordonnées, on peut alors prendre comme paramétrisation $f(u,v) = (u, v, h(u,v))$ où $p = f(0,0) = (0,0,0)$ et $T_p\Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, soit $d_{(0,0)}h = 0$. On a $\nu(0,0) = (0,0,1)$, $\partial_u f(0) = (1,0,0)$ et $\partial_v f(0) = (0,1,0)$. Des expressions pour A, B, C ci-dessus, on tire

$$(h_{ij})_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \end{pmatrix} = D^2 h(0,0)$$

est la matrice héssienne de h en $(0,0)$. Le développement limité donne

$$h(u,v) = p + (u,v) D^2 h(0,0) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + o(u^2 + v^2).$$

Si $K(p) > 0$, $D^2h(0,0)$ est définie positive ou définie négative ; si $K(p) < 0$ elle a deux valeurs propres de signe opposé. $\square$

3 Géodésiques

Définition 3.26. Un arc paramétré (I, c) tracé sur Σ est une géodésique si $c'' \in T_{c(t)}\Sigma^\perp$ sur I.

Cela équivaut à $c'' = \langle c'', N \rangle N$, et aussi à la nullité de la composante tangentielle $c''_T = 0$.

Lemme 3.27. Une géodésique est paramétrée à vitesse constante.

Preuve:

$$\frac{d}{dt}\langle c', c'\rangle = 2\langle c'', c'\rangle = 0.$$

□

Il est clair que si $c : [-a, a] \to \Sigma$ est une géodésique telle que $c'(0) = X$, alors $t \mapsto c(kt)$ est une géodésique sur $]-\frac{a}{k}, \frac{a}{k}[$ de vecteur vitesse kX en $t = 0$. On va montrer que les géodésiques existent dans toutes les directions.

Théorème 3.28. Etant donné $p \in \Sigma$ et $X \in T_p\Sigma$, il existe une unique géodésique maximale (I, c) telle que $c(0) = p$ et $c'(0) = X$.

Preuve: Soit $x : I \to U$ un arc paramétré. Cherchons une condition différentielle pour que $c = f \circ x$ soit une géodésique. On a

$$(f \circ x)'(t) = d_{x(t)}f.x'(t)$$

puis

$$\begin{aligned}(f \circ x)''(t) &= D^2 f(x', x') + d_{x(t)}f.x''(t)\\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} x_i'(t)x_j'(t) + \sum_k \partial_k f.x_k''(t)\end{aligned}$$

où on note $x = (x_1, x_2)$ et $\partial_k f = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$. Ecrivons $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ dans la base $\{\partial_1 f, \partial_2 f, \nu\}$ (en utilisant (3.5)) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \sum_{k=1,2} \Gamma_{ij}^k(x)\partial_k f + II_p(\partial_i f, \partial_j f)\nu \tag{3.6}$$

Les coefficients Γ_{ij}^k sont appelés *symboles de Christoffel* (ce sont des fonctions). La composante tangentielle de c'' en $p = f(x(t))$ est donc

$$c_T'' = \sum_k \left(\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(x)\, x_i' x_j' + x_k'' \right) \partial_k f.$$

On conclut que c est une géodésique si pour $k = 1$ et $k = 2$,

$$\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(x)\, x_i' x_j' + x_k'' = 0 \tag{3.7}$$

C'est une équation différentielle de la forme

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, \frac{dx}{dt})$$

où $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est lisse et on cherche $x : I \to \mathbb{R}^2$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz donne existence et unicité de solutions maximales étant fixés $x(0) = f^{-1}(p)$ et $x'(0) = (d_x f)^{-1}.X$. □

On peut en fait obtenir beaucoup plus. D'abord la dépendance continue des données initiales montre que tout $(x_0, x_0') \in U \times \mathbb{R}^2$ admet un voisinage $V \times W$ et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $(x_1, x_1') \in V \times W$, il existe une unique solution de (3.7), $x_{x_1,x_1'}(t)$ définie sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, de données initiales (x_1, x_1'). De plus l'application $\Phi : (t, x_1, x_1') \mapsto x_{x_1,x_1'}(t)$ de $]-\varepsilon, \varepsilon[\times V \times W$ dans U est lisse. Considérons $x_0' = 0$ et $W \supset B(0, \delta)$. Si $\|x_1'\| = \delta$, la géodésique de vecteur $\lambda x_1'$ est définie sur $]\lambda\delta, \lambda\delta[$. On en déduit que Φ est définie sur $]-2, 2[\times V \times B(0, \frac{2}{\varepsilon}\delta)$. On définit en chaque $x_1 \in V$ une application $\exp_{x_1} : B(0, \frac{2}{\varepsilon}\delta) \to U$ par $\exp_{x_1}(v) = \Phi(1, x_1, v) = x_{x_1,v}(1)$ et une application $Exp : V \times B(0, \frac{2}{\varepsilon}\delta) \to V \times U$ par $Exp(x_1, v) = (x_1, \exp_{x_1}(v))$.

Lemme 3.29. L'application Exp est un difféomorphisme local au voisinage de $(x_0, 0)$.

`Preuve:` On calcule la différentielle de l'application. La dérivée par rapport à la première variable est clairement l'identité. Pour la seconde variable, remarquons que $\exp_{x_0}(sv) = x_{x_0,sv}(1) = x_{x_0,v}(s)$. Autrement dit $s \mapsto \exp_{x_0}(sv)$ est la géodésique de vecteur initial v. La dérivée de Exp en $(x_0, 0)$ par rapport à la seconde variable dans une direction v est alors

$$\frac{d}{dr}_{|r=0} Exp(x_0, rv) = \frac{d}{dr}_{|r=0} \exp_{x_0}(rv) = v$$

On en déduit que la matrice jacobienne de Exp est de la forme $\begin{pmatrix} Id & 0 \\ * & Id \end{pmatrix}$ et on conclut avec le théorème d'inversion locale. □

Etant donné $p \in \Sigma$ et $X \in T_p\Sigma$ voisin de 0, on définit $\exp_p(X) = c_X(1)$ où c est la géodésique telle que $c(0) = p, c'(0) = X$. On déduit :

Corollaire 3.30. Pour tout $p \in \Sigma$, il existe un voisinage $\Omega \subset \Sigma$ de p et $\varepsilon > 0$ tel que

(1) Pour tout $q, q' \in \Sigma$, il existe un unique $X \in T_q\Sigma$ tel que $\|X\| < \varepsilon$ et $\exp_q(X) = q'$.

(2) Pour tout $q \in \Omega$, l'application $\exp_q : B(0, \varepsilon) \subset T_q\Sigma \to \Sigma$ est un difféomorphisme sur son image (au sens que $f^{-1} \circ \exp_q$ est un difféomorphisme).

Corollaire 3.31. Les géodésiques sont exactement les courbes localement minimisantes pour la longueur. En particulier une courbe lisse par morceaux globalement minimisante est géodésique et donc lisse.

`Preuve:` Montrons d'abord que les géodésiques minimisent la longueur localement et ceci de manière unique. Soit q, q' deux points que tel que le corollaire 3.30 s'applique. Soit $\{v_1, v_2\}$ une base orthonormée de $T_q\Sigma$. Considérons la paramétrisation locale

$$]0,\varepsilon[\times\mathbb{R}\to \exp_q(B(0,\varepsilon))\setminus\{q\}\subset\Sigma$$

définie par

$$f(r,\theta)=\exp_q(r(\cos(\theta)v_1+\sin(\theta)v_2))$$

(qu'on appelle *coordonnées géodésiques polaires*). Les segments horizontaux $]0,\varepsilon[\times\{\theta_0\}$ sont envoyés exactement sur les géodésiques issues de q. Pour justifier que $r\mapsto \exp_q(rv)$ est l'unique courbe de longueur minimale entre q et $\exp_q(\varepsilon v)$, il suffit de montrer que la première forme fondamentale s'écrit $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & h(r,\theta)\end{pmatrix}$ (cf. remarque 3.7). Notons $v(\theta)=\cos(\theta)v_1+\sin(\theta)v_2$, alors $f(r,\theta)=c_v(r)$ est une géodésique et puisqu'une géodésique est paramétrée à vitesse constante,

$$\langle\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial r}\rangle=\langle c_v'(r),c_v'(r)\rangle=\langle c_v'(0),c_v'(0)=\|v\|^2=1.$$

Pour estimer $\langle\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial\theta}\rangle$, commençons par estimer sa dérivée :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\langle\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial\theta}\rangle &= \langle\frac{\partial^2 f}{\partial r^2},\frac{\partial f}{\partial\theta}\rangle+\langle\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\rangle\\ &= \langle c_v''(r),\frac{\partial f}{\partial\theta}\rangle+\langle\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial r}\rangle\\ &= 0+\frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\langle\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial r}\rangle\end{aligned}$$

puisque c_v'' est perpandiculaire à $T_{c_v(r)}\Sigma\ni\frac{\partial f}{\partial\theta}$. Maintenant on a vu $\langle\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial r}\rangle=\langle c_v'(r),c_v'(r)\rangle=\|v\|=1$ pour tout θ donc la dérivée restante est nulle. Il s'ensuit que $\langle\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial\theta}\rangle$ est constant par rapport à r. Lorsque $r\to 0$, $\frac{\partial f}{\partial r}=c_v'(r)$ tend vers v. D'autre part, si on pose $w=-\sin(\theta)v_1+\cos(\theta)v_2=v'(\theta)$, alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial\theta} &= \frac{d}{d\theta}(exp_q(rv))=d_{rv}exp_q(rv'(\theta))\\ &= d_{rv}exp_q(rw)\\ &\to 0\end{aligned}$$

quand $r\to 0$, d'où $\langle\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial\theta}\rangle=0$. Ceci montre que $(g_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & g_{22}\end{pmatrix}$.

La conclusion du corollaire est maintenant facile. Si γ est une courbe minimisante sur Σ, deux points quelconques de γ assez proches sont joints par une unique géodésique courte, qui nécessairement coincide avec γ. □

Remarque 3.32. L'argument ci-dessus s'appelle le lemme de Gauss. Si on munit Σ de la distance définie par l'infimum des longueurs des courbes (c'est une distance), l'argument montre en particulier que $\exp_q(B(0,\varepsilon)=B(q,\varepsilon)\subset\Sigma$. Les sphères $S(0,\varepsilon)\subset T_p\Sigma$ sont envoyées sur les sphères $S(q,\varepsilon)$ et les rayons géodésiques issus de g sont orthogonaux aux sphères $S(q,\varepsilon)$.
Il ne résoud pas le problème de trouver une géodésique entre 2 points quelconques de Σ. Il faut ajouter des hypothèses. Sur $\mathbb{R}^2\times\{0\}\setminus\{0\}$, $(1,0)$ et $(-1,0)$ ne sont pas joints par une géodésique. Si Σ est compacte (et connexe), on peut montrer que 2 points quelconques sont joints par une géodésique minimisante.

4 Le "Theorema Egregium"

Il s'agit du "théorème remarquable" de Gauss :

Théorème 3.33 (Theorema Egregium). La courbure de Gauss est invariante par isométrie locale

Il s'agit ici d'une isométrie $\Sigma \to \Sigma'$ (pas une isométrie de $\mathbb{R}^3$) qui ne préserve à priori que les longueurs des surfaces et donc la distance définie par l'infimum des longueurs. D'une certaine manière, le théorème dit que la courbure de Gauss est déterminée par les longueurs. De fait nous allons montrer que la courbure de Gauss peut-être calculée à partir de la première forme fondamentale et de ses dérivées à l'ordre ≤ 2, sans recours à la seconde forme fondamentale. On le fait dans le cas particulier des coordonnées géodésiques polaires, où la formule est particulièrement simple

Lemme 3.34. Soit $f(r,\theta) : U \to \Sigma$ des coordonnées géodésiques polaires autour d'un point $p \in \Sigma$, $ds^2 = dr^2 + J^2(r,\theta)d\theta^2$ l'expression de la première forme fondamentale dans ces coordonnées. Alors

$$K = -\frac{J''}{J}$$

où $J'' = \frac{\partial^2 J}{\partial r^2}$.

(une formule générale existe pour des coordonnées quelconques, en fonction de E, F, G et de leurs dérivées à l'ordre ≤ 2).

Démontrons le lemme.

`Preuve:` Commençons par écrire les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}$ (où $(u_1, u_2) = (r, \theta)$) dans la base $\{\partial_r f, \partial_\theta f, \nu\}$. Pour plus de lisibilité, on note $\partial^2_{ij} f = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}$ et on s'autorise à écrire $r = 1$ et $\theta = 2$. Alors

$$\begin{aligned}
\partial^2_{rr} f &= \Gamma^1_{11}\partial_r f + \Gamma^2_{11}\partial_\theta f + h_{11}\nu && (3.8)\\
\partial^2_{r\theta} f &= \Gamma^1_{12}\partial_r f + \Gamma^2_{12}\partial_\theta f + h_{12}\nu && (3.9)\\
\partial^2_{\theta\theta} f &= \Gamma^1_{22}\partial_r f + \Gamma^2_{22}\partial_\theta f + h_{22}\nu && (3.10)\\
-\partial_r \nu &= h^1_1 \partial_r f + h^2_1 \partial_\theta f && (3.11)\\
-\partial_\theta \nu &= h^1_2 \partial_r f + h^2_2 \partial_\theta f && (3.12)
\end{aligned}$$

La base $(\partial_r f, \partial_\theta f, \overrightarrow{u})$ est orthogonale et $r \mapsto f(r,\theta)$ est une géodésique. Cela permet de simplifier (3.8),(3.9). Montrons que (3.8) se réduit à

$$\partial^2_{rr} f = h_{11}\nu \qquad (3.13)$$

En dérivant $1 = \langle \partial_r f, \partial_r f\rangle$ par rapport à r on a $\langle \partial^2_{rr} f, \partial_r f\rangle = 0$. En dérivant en θ on a $\langle \partial^2_{\theta r} f, \partial_r f\rangle = 0$. En dérivant alors $0 = \langle \partial_r f, \partial_\theta f\rangle$, on a $0 = \langle \partial^2_{rr} f, \partial_\theta f\rangle + \langle \partial_r f, \partial_{r\theta} f\rangle = \langle \partial^2_{rr} f, \partial_\theta f\rangle$. On aurait aussi pu dire que $\partial^2_{rr} f = c''$, où $c(r) = f(r,\theta)$ est une géodésique.

Montrons que (3.9) se réduit elle à

$$\partial^2_{r\theta} f = \frac{J'}{J}\partial_\theta f + h_{12}\nu \tag{3.14}$$

La nullité de Γ^1_{12} vient de $\langle \partial^2_{\theta r} f, \partial_r f\rangle = 0$. Le coefficient de $\partial_\theta f$ vient de

$$2JJ' = \frac{\partial}{\partial r}\langle \partial_\theta f, \partial_\theta f\rangle = 2\langle \partial^2_{r\theta} f, \partial_\theta f\rangle = 2\Gamma^2_{12}\langle \partial_\theta f, \partial_\theta f\rangle = 2\Gamma^2_{12} J^2$$

On utilise maintenant l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\partial^2_{rr} f\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\partial^2_{r\theta} f\right) = 0$$

dont laquelle on injecte (3.13) et (3.14) :

$$0 = (\partial_\theta h_{11})\nu + h_{11}\partial_\theta \nu - \left[(\frac{J''}{J} - \frac{J'^2}{J^2})\partial_\theta f + \frac{J'}{J}\partial^2_{r\theta} f + (\partial_r h_{12})\nu + h_{12}\partial_r \nu\right]$$

Injectons à nouveau (3.14), mais aussi (3.11) et (3.12) :

$$0 = (\partial_\theta h_{11})\nu - h_{11}(h^1_2\partial_r f + h^2_2\partial_\theta f) - \left[(\frac{J''}{J} - \frac{J'^2}{J^2})\partial_\theta f + \frac{J'}{J}\left(\frac{J'}{J}\partial_\theta f + h_{12}\nu\right) + (\partial_r h_{12})\nu - h_{12}(h^1_1\partial_r f + h^2_1\partial_\theta f)\right]$$

Regroupons :

$$0 = \left(-h_{11}h^1_2 + h_{12}h^1_1\right)\partial_r f + \left(-h_{11}h^2_2 - \frac{J''}{J} + h_{12}h^2_1\right)\partial_\theta f + \left(\partial_\theta h_{11} - \frac{J'}{J}h_{12} - \partial_r h_{12}\right)\nu$$

En particulier la nullité du deuxième coefficient donne

$$-\frac{J''}{J} = h_{11}h^2_2 - h_{12}h^2_1 = h^1_1 h^2_2 - h^1_2 h^2_1 = \det(L) = K$$

en utilisant

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^1_1 & h^2_1 \\ h^1_2 & h^2_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J^2\end{pmatrix}$$

(et $h_{12} = h_{21}$). □

La preuve du théorème est maintenant immédiate. Soit $\varphi : \Sigma \to \Sigma$ une isométrie. On peut supposer que ϕ est différentiable et que $\varphi^* I_{\Sigma'} = I_\Sigma$. Alors l'expression de la première forme fondamentale de Σ' via $\varphi \circ f$ (autour de $\phi(p)$) est exactement celle de Σ via f autour de p. Il s'ensuit que $K(p) = \lim_{r\to 0}\frac{J''(r,\theta)}{J(r,\theta}) = K(\varphi(p))$.

La relation entre courbure de Gauss et longueur est encore plus claire dans le résultat suivant :

Corollaire 3.35. Soit $p \in \Sigma$, $C(p, \varepsilon)$ le cercle de Σ de centre p et de rayon $\varepsilon > 0$, alors

$$L(C(p,\varepsilon)) = 2\pi\varepsilon\left(1 - K(p)\frac{\varepsilon^2}{6} + o(\varepsilon^2)\right).$$

On voit que la courbure mesure le défaut d'euclidianité des petits cercles.

`Preuve:` Soit $\{v_1, v_2\}$ une base orthonormée de $T_p\Sigma$ et $v(\theta) = \cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2$. Posons $w(\theta) = -\sin(\theta)v_1 + \cos(\theta)v_2 = v'(\theta)$. Soit $f(r,\theta) = \exp_p(rv)$. On voit que

$$\partial_\theta f = d_{rv}exp_p(\frac{d}{d\theta}rv) = d_{rv}exp_p(rw) = rw + o(r)$$

puisque $d_0 exp_p = Id$. Il s'ensuit que $J(r,\theta) = r + o(r)$ et $J'(r,\theta) = 1 + o(1)$. On prolonge en 0 en $J(0) = 0$ et $J'(0) = 1$. Puisque $J'' = -KJ$, on $J''' = -K'J - KJ'$ et on prolonge en 0 en $J'''(0) = -K(p)$. Le développement limité donne alors

$$J(r) = r - K(p)\frac{r^3}{6} + o(r^3)$$

En intégrant θ de 0 à 2π,

$$L(C(p,\varepsilon)) = \int_0^{2\pi} \|\partial_\theta f(\varepsilon,\theta)\| d\theta = \int_0^{2\pi} J(\varepsilon,\theta)d\theta = 2\pi\left(\varepsilon - K(p)\frac{\varepsilon^3}{6} + o(\varepsilon^3)\right).$$

□

Géométrie intrinsèque vs géométrie extrinsèque La courbure de Gauss est une quantité issue de la géométrie "interne à la surface", on dit que c'est une quantité *intrinsèque*. Elle ne dépend pas de comment la surface est pliée dans l'espace, du moment que le plongement soit localement isométrique. Ainsi un cylindre étant localement isométrique à un plan, ils ont même courbure de Gauss, identiquement nulle. A contrario les courbures principales dépendent du plongement, ont dit que ce sont des quantités *extrinsèques*. le cylindre est localement isométrique à un plan mais admet une courbure principale non nulle.

Chapitre 4 : champs de vecteurs

On ne donnera qu'un aperçu.

1 Champs de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Définition 4.1. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Un **champ de vecteurs de classe** C^k, $k \geq 1$, sur U est $X : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C. On note souvent $X_x = X(x)$. Une **courbe intégrale** ou **trajectoire** de X est (J, c) où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, $c : I \to U$ est différentiable et vérifie

$$c'(t) = X_{c(t)}$$

pour tout $t \in I$.

Une courbe intégrale est une solution de l'équation différentielle d'ordre 1, $x' = X(x)$. On suppose les champs de vecteur au moins C^1. Les résultats classiques, (Cauchy-Lipschitz et dépendance en les conditions initiales), donnent

Théorème 4.2. Soit X un champ de vecteurs sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et x un point de U. Alors il existe une unique trajectoire maximale (J_x, c_x) de X telle que $c_x(0) = x$. De plus la réunion des $J_x \times \{x\}$, lorsque x parcourt U, est un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times U$, sur lequel l'application

$$(x, t) \mapsto c_x(t)$$

est lisse.

Remarque 4.3. (1) La solution est maximale au sens que tout autre trajectoire $(\tilde{J}, \tilde{c})$ satisfaisant $\tilde{c}(0) = x$ vérifie $\tilde{J} \subset J$ (et $\tilde{c} = c$ sur $\tilde{J}$).

(2) L'intervalle J_x dépend de x, et peut être fini même lorsque $U = \mathbb{R}^n$: sur $\mathbb{R}$, le champ de vecteurs $X(x) = x^2$ a pour trajectoire $c_x(t) = \frac{x}{1-xt}$, définie sur $\mathbb{R}$ si $x = 0$, sur $]-\infty, x^{-1}[$ si $x > 0$ et sur $]x^{-1}, +\infty[$ si $x < 0$.

Essentiellement on peut prolonger une courbe intégrale tant qu'elle reste dans U :

Lemme 4.4. Soit $x \in U$, supposons que $J_x = (\alpha, \beta)$ avec $\beta < \infty$. Alors pour tout compact $K \subset U$, il existe $t_K \in (\alpha, \beta)$ tel que $c_x(t) \notin K$ pour tout $t \in [t_K, \beta)$.

`Preuve:` Par contradiction. Soit $K \subset U$ compact et $t_n \to \beta$ tel que $x_n = c_x(t_n) \in K$. Par compacité de K et quitte à extraire on peut supposer que $c_x(t_n) \to x_\infty \in K$ lorsque $n \to \infty$. Soit $]-\varepsilon, \varepsilon[\times V \subset \Omega$ un ouvert contenant $(0, x_\infty)$. Alors c_{x_n} est défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dès que $x_n \in V$. En posant

$$\tilde{c}_x(t) = \begin{cases} c_x(t) & , t \in J_x \\ c_{x_n}(t - t_n) & , t_n - \varepsilon < t < t_n + \varepsilon \end{cases}$$

on obtient une trajectoire de x issue de x qui prolonge c_x au delà de β, d'où la contradiction. □

On a un résultat semblable si $-\infty < \alpha$.

Corollaire 4.5. Soit X un champ de vecteur à support compact (il existe $K \subset U$ compact tel que $X = 0$ sur $\mathbb{R}^n - K$). Alors $J_x = \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

`Preuve:` Exercice. □

On a utilisé le fait que si $t \mapsto c(t)$ est une trajectoire, pour tout réél $a \in \mathbb{R}$ il en est de même pour $t \mapsto c(t + a)$. L'unicité conduit à l'égalité

$$c_x(t + a) = c_{c_x(a)}(t).$$

Posons, pour $(t, x) \in \Omega$,

$$\phi(t, x) = \phi_t(x) = c_x(t).$$

En particulier $\phi_0 = id$ est défini sur U, mais pas nécessairement les ϕ_t. L'égalité ci-dessus se traduit par

$$\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x)) = \phi_s(\phi_t(x))$$

au sens que si l'un des termes est défini, les autres aussi et on a égalité.

Définition 4.6. L'application $\phi : \Omega \to U$ s'appelle le **flot** ou la **coulée** du champ de vecteurs X.

Chaque ϕ_t est un difféomorphisme de $\{x \in U \mid t \in J_x\}$ sur son image, d'inverse ϕ_{-t}. Observons qu'en dérivant le flot $t \mapsto \phi_t(x)$, on retrouve le vecteur $X_{\phi_t(x)}$.

2 Champ de vecteurs sur des sous-variétés

Définition 4.7. Soit M^d une sous variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$, de classe C^k, $k \geq 1$. On appelle **champ de vecteurs** sur M de classe C^p une application $X : M \to \mathbb{R}^n$ telle que pour tout $p \in M$, $X_p \in T_pM$ et si $f : U \subset \mathbb{R}^d \to M$ est une paramétrisation de M au voisinage de p alors $X \circ f$ est de classe C^p.

Une courbe intégrale de X est alors une courbe de M. Le théorème 4.2 est vrai dans ce cadre. De plus l'équivalent du corollaire 4.5 implique :

Théorème 4.8. Soit X un champ de vecteurs sur une sous-variété compacte M, alors le flot de X est défini sur $\mathbb{R} \times M$. En particulier ϕ_t est pour tout t un difféomorphisme de M.

Théorème 4.9. Soit M^d une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$. Soit $h : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Pour tout réel a on pose $M_a = \{x \in M \mid h(x) \leq a\}$. Si $a < b$ et $h^{-1}([a,b])$ ne contient pas de point critique, il existe un difféomorphisme de M_a sur M_b.

Précisons la notion de point critique. D'abord par définition h est lisse si $h \circ f$ est lisse pour toute paramétrisation locale de M. Etant donné $p \in M$ et $X \in T_pM$, soit $c(t)$ une courbe de M telle que $c(0) = p$, $c'(0) = X$, alors

$$d_ph.X = \frac{d}{dt}_{|t=0} h \circ c(t)$$

ne dépend pas de c. En fait $d_ph = d_x(h \circ f)(d_xf)^{-1}$ si $f(x) = p$, c'est donc une application linéaire de T_pM dans $\mathbb{R}$. On dit que p un point critique de h si $d_ph = 0$, i.e. $d_ph.X = 0$ pour tout $X \in T_pM$. Si h est la restriction à M d'une application H définie sur un ouvert O de $\mathbb{R}^n$ contenant M, cela revient à dire que $T_pM \subset \ker d_pH$.

`Preuve:` Supposons donc que h n'a pas de point critique sur $h^{-1}([a,b])$. Définissons un champ de vecteur ∇h sur M par la relation

$$\forall p \in M, \forall X \in T_pM, \quad \langle \nabla_p h, X \rangle = d_ph.X$$

Si h est la restriction de H, c'est simplement la projection du gradient ∇H sur T_pM. L'hypothèse que $h^{-1}([a,b])$ n'a pas de point critique dit que ∇h ne s'annulle pas sur $h^{-1}([a,b])$. Comme l'ensemble des zéros de ∇h est un fermé, il existe un ouvert U de M contenant $h^{-1}([a,b])$ sur lequel ∇h ne s'annule pas. Soit g une fonction plateau sur M, égale à 1 sur $h^{-1}([a,b])$ et nulle sur le complémentaire de U. On définit alors, pour tout $m \in M$,

$$X_m = \frac{g(m)}{\langle \nabla_m h, \nabla_m h \rangle} \nabla_m h.$$

Si ϕ_t est le flot de X, on a

$$\frac{d}{dt} h(\phi_t(m)) = d_{\phi_t(m)} h . X_{\phi_t(m)} = \frac{\langle \nabla_{\phi_t(m)} h, \nabla_{\phi_t(m)} h \rangle}{\langle \nabla_{\phi_t(m)} h, g(m) \nabla_{\phi_t(m)} h \rangle} = g(\phi_t(m)) \geq 0$$

et

$$\frac{d}{dt} h(\phi_t(m)) = 1, \quad \text{si } \phi_t(m) \in h^{-1}([a,b]).$$

On en déduit que $\phi_{b-a}(M_a) \subset M_b$ et $\phi_{a-b}(M_b) \subset M_a$ puis l'égalité $\phi_{b-a}(M_a) = M_b$. $\square$