Cours N1MA6011 : Géométrie Différentielle

Laurent Bessières
Institut de Mathématiques de Bordeaux

2015-2016, S6

Table des matières

Chapitre 1 : courbes, théorie locale

On travaille dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (pour lequel la base canonique est orthonormée). On note $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme associée et $d(x, y) = ||x - y||$ la distance associée.

1 Courbes dans $\mathbb{R}^n$, généralités

1.1 Arcs paramétrés, arcs géométriques

Définition 1.1. On appelle **arc paramétré de classe** C^k, $k \in \mathbb{N}$, un couple (I, f) où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}^n$ est une application de classe C^k.

On rappelle que cela signifie que $f(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ où chaque $x_i : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^k.

Exemple 1.2 (angle droit). Soit $f : R \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$\begin{cases} t & \mapsto & (0, -t), \quad t \in]-1, 0[\\ 0 & \mapsto & (0, 0) \\ t & \mapsto & (t, 0), \quad t \in]0, 1[\end{cases}$$

f est de classe C^0 mais pas C^1.

Exemple 1.3 (angle droit C^∞). Soit $f : R \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$\begin{cases} t & \mapsto & (0, e^{1/t}), \quad t < 0 \\ 0 & \mapsto & (0, 0) \\ t & \mapsto & (e^{-1/t}, 0), \quad t > 0 \end{cases}$$

Vérifier que f est de classe C^∞.

Définition 1.4. On dit que deux arcs paramétrés de classe C^k ($k \geq 1$) (I, f) et (J, g) sont **équivalents** (resp. **positivement équivalents**) s'il existe un difféomorphisme $\theta : J \to I$ de classe C^k (resp. avec $\theta' > 0$) tel que $g = f \circ \theta$. On appelle **arc géométrique** (resp. arc géométrique orienté) une classe d'équivalence. Le sous-ensemble $f(I) \subset \mathbb{R}^n$ est appelé le **support** de l'arc géométrique.

On rappelle que $\theta : J \to I$ est un difféomorphisme de classe C^k, $k \geq 1$ si θ est bijective, θ et sa réciproque θ^{-1} sont de classe C^k, et θ' ne s'annulle pas sur J. Il s'ensuit que $\theta' > 0$ sur J ou bien $\theta' < 0$ sur J. Il est clair qu'on a bien des relations d'équivalence. Si A est un arc géométrique de représentant (I, f), on dira que A est paramétré par (I, f) ou que (I, f) est un paramétrage de A ; θ est un **changement de paramétrage**.

Exemple 1.5. $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}^2$ défini par $f(t) = (t, 0)$ et $g :]-1/2, 1/2[\to \mathbb{R}^2$, $s \mapsto (2s, 0)$ sont positivements équivalents. Ils sont équivalents à $h :]-1, 1[\to \mathbb{R}^2$, $s \mapsto (-s, 0)$ mais pas positivement.

Un arc géométrique contient exactement 2 arcs géométriques orientés. Si (I, f) et (J, g) paramètrent A, alors $f(I) = g(J)$ mais la réciproque est fausse : le support ne détermine pas l'arc géométrique.

Exercice 1.6. $(I =]0, 5\pi[, f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ et $(J =]0, 3\pi[, g(t) = (\cos(t), \sin(t)))$ définissent le même support ($f(I) = g(J) = S^1$) mais ne sont pas équivalents.
Indication : montrer que pour deux paramétrages équivalents (I, f) et (J, g), si un point $x = f(t)$ a k antécédents par f il a k aussi k antécédents par g.

On pourrait aussi utiliser la longueur, qu'on définira plus loin (elle sera la même pour des paramétrages équivalents). On veut donner un sens à l'expression $p \in A$ (p un point de A).

Définition 1.7. Un **point d'un arc géométrique** A est une classe d'équivalence de triplets (I, f, t), où (I, f) paramètre A et $t \in I$, pour la relation d'équivalence $(I, f, t) \sim (J, g, s)$ s'il existe un changement de paramétrage $\theta : J \to I$ tel que $g = f \circ \theta$ et $t = \theta(s)$. L'élément commun $f(t) = g(s)$ est l'image du point.

La notation (I, t, f) étant un peu lourde, on pourra dire simplement $p = f(t)$ un point de A.

1.2 Points réguliers, Tangente

Soit A un arc géométrique paramétré par (I, f) et $p = f(t)$ un point de A.

Définition 1.8. On dit que p est **régulier** si $f'(t) \neq 0$. Dans ce cas la droite passant par p de vecteur directeur $f'(t)$ est la **tangente à** A **en** p. On dit que A est régulier si tous ses points le sont.

Vérifions que la définition en soit bien une, i.e. que la condition $f'(t) \neq 0$ et que la tangente ne dépendent pas du paramétrage. Soit (J, g) un arc paramétré équivalent à (I, f), $\theta : J \to I$ le changement de paramétrage. Comme $g = f \circ \theta$,

$$g'(s) = f'(\theta(s))\theta'(s) = f'(t)\theta'(s)$$

et puisque $\theta' \neq 0$ on a $g'(s) \neq 0 \Leftrightarrow f'(t) \neq 0$. De plus $g'(s)$ est proportionnel à $f'(t)$ donc (J, g) définit la même droite tangente que (I, f) au point $f(t) = g(s)$.

Exemple 1.9. Soit A dans $\mathbb{R}^2$ paramétré par $(]-1,1[, f(t) = (t, 0))$ et B paramétré par $(]-1,1[, g(t) = (t^3, 0))$. Ces arcs géométriques ont même support mais sont différents : A est régulier, B non.

Exercice 1.10. (1) Soit $D = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un unique arc géométrique régulier de support D.
(2) Soit $(\mathbb{R}, f)$ l'angle droit C^∞ de l'exemple 1.3. Montrer qu'il n'existe pas d'arc géométrique régulier de support $f(\mathbb{R})$.

Définition 1.11. Soit A un arc géométrique régulier paramétré par (I, f) et $p = f(t)$ un point de A.
(1) On dit que p est **birégulier** si $f'(t)$ et $f''(t)$ sont linéairement indépendants, sinon p est un **point d'inflexion**.
(2) Si p est birégulier, on appelle **plan osculateur à** A **au point** p le plan vectorier engendré par $f'(t)$ et $f''(t)$.
(3) On dit que A est birégulier si tous ses points le sont.

Vérifions encore que la définition fait sens, i.e. ne dépende pas du paramétrage. Soit (J, g) un paramétrage de A et $\theta : J \to J$ le changement de paramétrage. On a $g = f \circ \theta$, $p = f(t) = g(s)$ et $t = \theta(s)$. On a en posant $a = \theta'(s) \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} g'(s) &= f'(\theta(s))\theta'(s) = af'(t). && (1.1) \\ g''(s) &= f''(\theta(s))(\theta'(s))^2 + f'(\theta(s))\theta''(s) = a^2 f''(t) + bf'(t). && (1.2) \end{aligned}$$

où $b = \theta''(s) \in \mathbb{R}$ (il peut être nul). On a clairement $\mathrm{vect}\{g'(s), g''(s)\} \subset \mathrm{vect}\{f'(t), f''(t)\}$. Réciproquement puisque

$$\begin{aligned} f'(t) &= a^{-1}g'(s) \\ f''(t) &= a^{-2}(g''(s) - bf'(t)) = a^{-2}g''(s) - ba^{-3}g'(s) \end{aligned}$$

$\mathrm{vect}\{f't), f''(t)\} \subset \mathrm{vect}\{g'(s), g''(s)\}$ et on a égalité. En particulier $f'(t)$ et $f''(t)$ sont colinéaires ssi $g'(s)$ et $g''(s)$ le sont (l'espace engendré étant de dimension 1 dans ce cas).

Exemple 1.12. $(\mathbb{R}, f(t) = (\cos(t), \sin(t), 1))$ dans $\mathbb{R}^3$. On a $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$ et $f''(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$, f' et f'' sont orthogonaux non nuls donc indépendants. Le plan osculateur est $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

La "réciproque" de l'exemple ci-dessus est vrai :

Lemme 1.13. Soit A un arc géométrique de $\mathbb{R}^n$ dont le plan osculateur en chaque point est égal à un plan $V \subset \mathbb{R}^n$ fixé. Alors l'arc est contenu dans un plan affine parallèle à V :

`Preuve:` On se donne une application linéaire $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-2}$ dont le noyau est V. On peut prendre par exemple $\phi(xv_1 + \cdots + x_n v_n) = (x_1, \ldots, x_{n-2})$ où $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ telle que v_{n-1}, v_n soient dans V. Soit (I, f) un paramétrage de A. Rappelons que si ϕ est linéaire, $\phi'(a) = \phi$ en tout point $a \in \mathbb{R}^n$. (précisément, si on note plutôt $d_a\phi$ la differentielle de ϕ en un point $a \in \mathbb{R}^n$, la dérivée directionnelle de ϕ dans la direction $u \in \mathbb{R}^n$ est $d_a\phi.u = \frac{d}{dt}(\phi(a + tu)) = \frac{d}{dt}(a + t\phi(u)) = \phi(u)$.) On a donc $(\phi(f(t)))' = \phi.f'(t) = 0$ puisque $f'(t) \in V$. Ceci implique que $t \mapsto \phi(f(t))$ est constante. Fixons $t_0 \in I$, alors pour tout $t \in I$, $0 = \phi(f(t)) - \phi(f(t_0)) = \phi(f(t) - f(t_0))$ donc $f(t) - f(t_0) \in V$, d'où $f(t) \in f(t_0) + V$. $\square$

1.3 Longueur d'arc

Définition 1.14. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un arc géométrique de classe C^1, paramétré par (I, f), $p = f(a)$ et $q = f(b)$ deux points de A. On appelle longueur de l'arc pq de A l'intégrale

$$L_{pq}(A) = \int_a^b ||f'(t)||dt.$$

On appelle longueur de A la quantité $L(A) = \sup_{p,q \in A} L_{pq}(A) \in [0, +\infty]$.

On fait la vérification habituelle : la formule ne dépend pas du paramétrage. Soit (J, g) un paramétrage de A, θ le changement de paramétrage tel que $g = f \circ \theta$, $[c, d] \subset J$ tel que $\theta([c, d]) =$

$[a,b]$. Alors la formule de changement de variables pour $t = \theta(s)$ donne

$$\begin{aligned}
\int_c^d ||g'(s)||ds &= \int_c^d ||f'(\theta(s))\theta'(s)||ds \\
&= \int_c^d ||f'(\theta(s))||.|\theta'(s)|ds \\
&= \int_a^b ||f'(t)||dt.
\end{aligned}$$

Remarque 1.15. Les grecs de l'antiquité savaient calculer des longueurs, mais pas dériver (le calcul infinitésimal remonte à Fermat, Newton-Leibnitz soit 2000 ans plus tard...). Comment faisaient ils ? En approximant la courbe par des segments de plus en plus petits.

Définition 1.16. Pour $\sigma = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ est une subdivision de $[a,b]$, on définit

$$\ell(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{k-1} ||f(t_{i+1}) - f(t_i)||, \quad \text{puis} \quad \ell_{ab}(f) = \sup_\sigma \ell(f,\sigma) \in [0,+\infty].$$

Théorème 1.17. Soit A de classe C^1, (I,f) un paramétrage de A, $p = f(a)$ et $q = f(b)$, alors

$$L_{pq}(A) = \ell_{ab}(f).$$

`Preuve:` On montre d'abord l'inégalité $L_{pq}(A) \geq \ell(f,\sigma)$. Soit $\sigma = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ une subdivision de $[a,b]$. Pour chaque $i \in \{0,\ldots,k-1\}$:

$$||f(t_{i+1}) - f(t_i)|| = ||\int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t)dt|| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f'(t)||dt.$$

En sommant de 0 à $k-1$, on obtient

$$\ell(f,\sigma) \leq \int_a^b ||f'(t)||dt = L_{pq}(A),$$

puis l'inégalité voulue en prenant le sup sur les subdivisions σ.
L'inégalité reciproque est plus délicate. Fixons $\varepsilon > 0$, nous allons montrer que

$$\ell_{ab}(f) \geq \int_a^b ||f'(t)||dt - 2\varepsilon(b-a), \tag{1.3}$$

ce qui donnera l'inégalité voulue en faisant tendre ε vers 0. Observons que si $f'(t)$ est constante sur un intervalle $[c,d]$ on a égalité suivante :

$$||\int_c^d f'(t)dt|| = ||\int_c^d f'(c)dt|| = ||f'(c)(d-c)|| = ||f'(c)||(d-c) = \int_c^d ||f'(t)||dt \tag{1.4}$$

On se rapproche de cette situation optimale en comparant $f'(t)$ à des constantes. Puisque f' est continue, elle est uniformément continue sur le compact $[a,b]$ par le théorème de Heine. Il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\forall s,t \in [a,b],\ \ |t-s| < \delta \Rightarrow |f'(t) - f'(s)| < \varepsilon.$$

On prend une subdivision σ de $[a,b]$ telle que $t_{i+1} - t_i < \delta$. On a

$$\begin{aligned}
||\int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t)dt|| &= ||\int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t_i)dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) - f'(t_i)dt|| \qquad \text{(en écrivant } X = Y + X - Y\text{)}\\
&\geq ||\int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t_i)dt|| - ||\int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) - f'(t_i)dt|| \qquad \text{(avec } ||X+Y|| \geq ||X|| - ||Y||\text{)}\\
&\geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f'(t_i)||dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f'(t) - f'(t_i)||\, dt \qquad \text{(avec(1.4))}\\
&\geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f'(t)||dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f'(t_i)|| - ||f'(t)||dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f'(t) - f'(t_i)||dt\\
&\quad \text{(encore avec } X = Y + X - Y \text{ dans l'intégrale de gauche)}\\
&\geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f'(t)||dt - 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f'(t_i) - f'(t)||dt, \qquad \text{(avec } ||X|| - ||Y|| \geq -||X-Y||\text{)}\\
&\geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f'(t)||dt - 2\varepsilon(t_{i+1} - t_i).
\end{aligned}$$

par choix de δ et de σ. D'où

$$||f(t_{i+1}) - f(t_i)|| = ||\int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t)dt|| \geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f'(t)||dt - 2\varepsilon(t_{i+1} - t_i)$$

et on obtient l'inégalité $\ell(f,\sigma) \geq \int_a^b ||f'(t)||dt - 2\varepsilon(b-a)$ en sommant sur i, d'où (1.3) . □

Remarque 1.18. Le chemin le plus court (de plus petite longueur) entre un point p et un point q est le segment $[0,1] \ni t \mapsto tq + (1-t)p$. C'est évident en termes de subdivision (découle de l'inégalité triangulaire). En termes d'intégrale, si f joint p à q :

$$||f(b) - f(a)|| = ||\int_a^b f'(t)dt|| \leq \int_a^b ||f'(t)||dt = L_{pq}(A)$$

et par ailleurs la longueur $[0,1] \ni t \mapsto tq + (1-t)p$ est exactment $\int_0^1 ||q-p||dt = ||f(b) - f(a)||$.

Beaucoup de quantités géométriques auront des expressions plus simples pour un paramétrage à vitesse constante, en particulier si la vitesse est 1. Commençons par montrer l'existence d'un tel paramétrage.

Proposition-Définition 1.19. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un arc géométrique régulier de classe C^1. Alors il existe un paramétrage (J,g) de A, dit **paramétrage par longueur d'arc**, tel que $||g'(s)|| = 1$ pour tout $s \in J$.

Preuve: Soit (I, f) une paramétrisation de A. Soit $a \in I$, posons $s : I \to \mathbb{R}$,

$$s(t) = \int_a^t ||f'(u)||du.$$

Alors s est de classe C^1 et $s'(t) = ||f'(t)|| > 0$ pour tout $t \in I$, donc s est un difféomorphisme. Posons $J = s(I)$ et notons $\theta : J \to I$ sa réciproque. Alors $g = f \circ \theta$ vérifie

$$||g'(u)|| = ||f'(\theta(u))\theta'(u)|| = ||f'(t)\frac{1}{s'(t)}|| = \frac{||f'(t)||}{||f'(t)||} = 1.$$

□

Remarque 1.20. (1) En particulier si $[a, b] \subset J$, la longueur de l'arc $g(a)g(b) \subset A$ est $b-a$.

(2) Si $g = f \circ \theta$ et g, f sont deux paramétrages par longueur d'arc, $\theta(t) = \pm t + C$.

(3) En dérivant l'égalité $\langle g'(s), g'(s)\rangle = 1$ on obtient $2\langle g'(s), g''(s)\rangle = 0$, donc $g'(s)$ et $g''(s)$ sont orthogonaux. Le point $g(s)$ est donc birégulier si et seulement si $g''(s) \neq 0$.

Exemple 1.21 (Cercle de rayon R). Pour un cercle de rayon R dans $\mathbb{R}^n$, centré en p, contenu dans un plan affine V,

$$g(s) = p + R\cos(\frac{s}{R})\overrightarrow{u} + R\sin(\frac{s}{R})\overrightarrow{v},$$

où $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{V}$.

1.4 Courbure

Définition 1.22. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un arc géométrique régulier, (J, g) un paramétrage de A par longueur d'arc et $p = g(s)$ un point de A. On appelle **courbure de A en p**

$$K_A(p) = ||g''(s)||$$

S'il n'y a pas d'ambiguité on notera simplement $K_A(p) = K(p)$. Vérifions la définition : soit (I, f) un autre paramétrage de A par longueur d'arc, θ le changement de paramétrage tel que $g = f \circ \theta$. Reprenons la formule (1.2), valable pour $g = f \circ \theta$ quelconques, $t = \theta(s)$:

$$g''(s) = f''(t)\theta'(s)^2 + f'(t)\theta''(s). \tag{1.5}$$

Or $\theta' = \pm 1$ donc $\theta'^2 = 1$ et $\theta'' = 0$, d'où $g''(s) = f''(t)$.

Exemple 1.23. Pour un cercle de rayon R, la courbure est $1/R$.

Le paramétrage par longueur d'arc peut-être délicat à calculer donc il est utile d'avoir une formule de la courbure pour un paramétrage régulier quelconque de l'arc. Soit (I, f) un tel paramétrage, (J, g) un paramétrage par longueur d'arc tel que $g = f \circ \theta$. Il suffit d'exprimer $\theta'(s)$ et $\theta''(s)$ en fonction de t dans la formule (1.5). On a

$$1 = ||g'(s)|| = ||f'(t)\theta'(s)|| = ||f'(t)|||\theta'(s)|$$

donc

$$\theta'(s)^2 = \frac{1}{||f'(t)||^2} = \frac{1}{\langle f'(t), f'(t)\rangle}.$$

En dérivant

$$2\theta'\theta'' = -2\frac{\langle f'(t), f''(t)\theta'\rangle}{\langle f'(t), f'(t)\rangle^2} \qquad \text{d'où} \qquad \theta'' = -\frac{\langle f'(t), f''(t)\rangle}{\langle f'(t), f'(t)\rangle^2}$$

En posant $\overrightarrow{\tau} = \frac{f'(t)}{||f'(t)||}$, on obtient au point $p = g(s) = f(t)$:

$$g''(s) = \frac{f''}{||f'||^2} - \left\langle \frac{f''}{||f'||^2}, \overrightarrow{\tau} \right\rangle \overrightarrow{\tau}. \tag{1.6}$$

On commente la formule (1.6) : elle dit que $g''(s)$ est le projeté orthogonal de $\frac{f''}{||f'||^2}$ sur $\overrightarrow{\tau}^{\perp}$. En appliquant le théorème de Pythagore on en déduit :

$$\boxed{K(p)^2 \ \left(= ||g''(s)||^2\right) \ = \left(\frac{f''}{||f'||^2}\right)^2 - \left(\frac{\langle f'(t), f''(t)\rangle}{||f'||^3}\right)^2.}$$

Interprétation cinématique On peut reformuler (1.6) de la manière suivante. Supposons la courbure non nulle et posons $\overrightarrow{\nu} = \frac{g''(s)}{||g''(s)||} \perp \overrightarrow{\tau}$, alors

$$\boxed{f''(t) = \langle f'', \overrightarrow{\tau}\rangle \overrightarrow{\tau} + ||f'(t)||^2 K(p) \overrightarrow{\nu}} \tag{1.7}$$

On y voit que l'accélération $f''(t)$ se décompose en une composante tangentielle et une composante centrifuge. Imaginez qu'en voiture vous accéleriez dans un virage. La force ressentie est pour partie dirigée vers son siège (due à la pression sur l'accélérateur) et pour partie vers l'extérieur du virage (composante centrifuge). La courbure n'intervient que dans cette dernière.

Remarque 1.24. La continuité de la courbure explique pourquoi on ne peut pas recoller de manière C^2 un segment de droite, de courbure nulle, et un arc de cercle, de courbure $1/R$.

1.5 Cercle osculateur

Etant donné un arc géométrique A et un point $p \in A$, la tangente à A en p réalise une approximation de A à l'ordre 1 au point p. Existe t'il une courbe (simple) faisant mieux, i.e. approximant

A à l'ordre 2 ? Oui, le cercle tangent à A en p de rayon $1/K(p)$ contenu dans le plan osculateur (lorsque $K(p) \neq 0$, sinon la tangente convient). Dit autrement, c'est un cercle du plan osuclateur avec même vitesse et courbure que l'arc au point considéré.

Définition 1.25. Soit A un arc géométrique régulier, $p \in A$ tel que $K(p) \neq 0$. Soit (J, g) un paramétrage de A par longueur d'arc. On appelle **cercle osculateur à A en p**, le cercle $C(A, p)$ contenu dans le plan osculateur, de centre $p + \frac{1}{K(p)}\overrightarrow{\nu}$, de rayon $1/K(p)$.

Proposition 1.26. Supposons que $g(0) = p$ et soit (K, h) un paramétrage par longueur d'arc de $C(A, p)$ tel que $h(0) = p$. Alors

$$g(s) = h(s) + o(s^2)$$

`Preuve:` Dans le plan osculateur muni du repère $(p, \overrightarrow{\tau}(0), \overrightarrow{\nu}(0)$, le paramétrage par longueur d'arc d'un cercle de rayon R centré en $(0, R)$ (avec position $(0, 0)$ au temps 0) est

$$s \mapsto (0, R) = (0, R) + R(\sin(s/R), -\cos(s/R)).$$

(en faisant subir une rotation de $-\pi/2$ à la formule habituelle) On a $h'(s) = (\cos(s/R), \sin(s/R))$ et $h''(s) = \frac{1}{R}(-\sin(s/R), \cos(s/R))$ d'où en faisant le développement limité en $s = 0$: $h(s) = (0, 0) + s(1, 0) + \frac{s^2}{2}(0, \frac{1}{R}) + o(s^2)$ soit

$$h(s) = p + s\overrightarrow{\tau}(0) + \frac{s^2}{2}\frac{1}{R}\overrightarrow{\nu}(0) + o(s^2).$$

Par ailleurs le DL de $g(s)$ donne

$$\begin{aligned} g(s) &= g(0) + sg'(0) + \frac{s^2}{2}g''(0) + o(s^2) \\ &= p + s\overrightarrow{\tau}(0) + \frac{s^2}{2}K(p)\overrightarrow{\nu}(0) + o(s^2). \end{aligned}$$

et comme on a posé $R = \frac{1}{K(p)}$, on a bien $g(s) = h(s) + o(s^2)$. □

1.6 Invariance par isométries

Nous voulons montrer que longueurs et courbures sont invariantes par isométries de $\mathbb{R}^n$. Cela nécessite quelques rappels.

Définition 1.27. On dit que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une **isométrie** si $d(F(x), F(y)) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.

On rappelle que les éléments du **groupe orthogonal** sont les isométries *linéaires* :

$$\mathrm{O}(n) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM.M = \mathrm{I}_n\}$$

où I_n est la matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. En effet,

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{O}(n) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Mx, Mx\rangle = \langle x, {}^t M.Mx\rangle = \langle x, x\rangle \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, ||Mx|| = ||x|| \end{aligned}$$

Théorème 1.28. Une isométrie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application affine, i.e. il existe $L \in \mathrm{O}(n)$ et $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n, F(x) = L(x) + v$. En particulier elle est de classe C^∞.

`Preuve:` Si on compose F avec une translation T qui ramène $F(0)$ en 0, on obtient une isométrie $G = T \circ F$ telle que $G(0) = 0$. Il suffit de montrer que G est linéaire et alors $F = T^{-1} \circ G$ comme voulu. Puisque G est une isométrie, elle envoie segments sur segments et donc droites sur droites. Comme $G(0) = 0$, G envoie droites vectorielles sur droites vectorielles et en fait $G(tu) = tG(u)$ pour tout vecteur u et réel t. Si u et v sont unitaires et orthogonaux, $G(u)$ et $G(v)$ aussi (en utilisant $||u - v|| = \sqrt{2}/2 = ||G(u) - G(v)||$). Il s'ensuit que G envoie une base orthonormée $(e_1, \cdots, e_n)$ sur une base orthonormée $(u_1, \cdots, u_n)$. On raisonne par récurrence sur la dimension n. Si $n = 1$ on voit que $G(x) = x$ ou $G(x) = -x$. Considérons le rang $n + 1$ en supposant le résultat vrai au rang n : la restriction de G à $\mathrm{vect}\{e_1, \cdots, e_n\}$ à valeurs dans $\mathrm{vect}\{u_1, \cdots, u_n\}$ est linéaire. Considérons alors $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n + x_{n+1}e_{n+1} = y + x_{n+1}e_{n+1}$. La droite passant par y de vecteur e_{n+1} est envoyée sur la droite passant par $G(y)$ de vecteur u_{n+1}, et $G(x)$ est à distance $|x_{n+1}|$ de $G(y)$. On conclut que $G(x) = G(y) + x_{n+1}e_{n+1}$ en considérant l'image du segment joignant e_{n+1} à x. □

On en déduit :

Proposition 1.29. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une isométrie.

(1) Si (J, g) est un paramétrage par longueur d'arc, alors $(J, F \circ g)$ aussi.

(2) Soit A un arc géométrique et $p \in A$. Alors $K_A(p) = K_{F\circ A}(F(p))$.

`Preuve:` D'après le théorème 1.28, il existe $L \in O(n)$ fixé tel que $D_xF = L$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
(1) Pour tout $s \in J$,

$$||(F \circ g)'(s)|| = ||D_{g(s)}F.g'(s)|| = ||L.g'(s)|| = 1.$$

Rq : en fait il suffit que $D_{g(s)}F$ soit orthogonale pour tout s pour que ce calcul soit valable.
(2) Prenons (J, g) un paramétrage de A par longueur d'arc. Alors, pour tout $s \in J$,

$$||(F \circ g)''(s)|| = ||(D_{g(s)}F.g'(s))'|| = ||(L.g'(s))'|| = ||L.g''(s)|| = ||g''(s)||.$$

□

2 Courbes dans $\mathbb{R}^2$

On travaille dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, orienté par la base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$. On note $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle $+\pi/2$. C'est aussi, via l'identification $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$, $(a, b) \mapsto a + ib$, la multiplication complexe par i. On sait donc donner un sens à "la gauche" d'un vecteur u donné, c'est la direction iu. On peut alors donner un signe à la courbure d'un arc régulier, selon que la courbe tourne à gauche ou à droite de son vecteur vitesse.

2.1 Courbure algébrique

Définition 1.30. Soit A un arc géométrique orienté régulier de paramétrage par longueur d'arc (J, g). On appelle **courbure algébrique** en $p = g(s) \in A$ l'unique réel $k_A(p)$ satisfaisant

$$g''(s) = k_A(p) i g'(s) \tag{1.8}$$

En effet $g'' \perp g'$ donc g'' est colinéaire à ig'. On a évidement $|k_A(p)| = K_A(p)$. On commettra l'abus de notation d'écrire $k_A(p) = k(s)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité. De manière équivalente,

$$k(s) = \langle g''(s), ig'(s) \rangle.$$

Remarque 1.31. En notant $\vec{\tau} = g'(s)$ et $\vec{n} = i\vec{\tau}$ le vecteur normal tel que $\{\vec{\tau}, \vec{n}\}$ soit directe, on a

$$\vec{\tau}' = k\vec{n}, \qquad \vec{n}' = -k\vec{\tau}. \tag{1.9}$$

En effet $\vec{n}' = (i\vec{\tau})' = i\vec{\tau}' = ik\vec{n} = -k\vec{\tau}$.

On peut également écrire la courbure algébrique comme vitesse de rotation du vecteur vitesse, soit $k = \theta'$ où θ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est l'angle orienté du vecteur vitesse avec une direction fixe. Précisément :

Proposition 1.32. Soit (J, g) un arc géométrique orienté régulier de classe C^p.

(1) Il existe $\theta : J \to \mathbb{R}$ de classe C^{p-1}, unique modulo 2π telle que

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{g'}{||g'||}(s) = e^{i\theta(s)}.$$

(2) Si g est paramétré par longueur d'arc,

$$k(s) = \theta'(s).$$

`Preuve :` 1) On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. La fonction θ doit vérifier $h' = i\theta' e^{i\theta} = i\theta' h$, soit $\theta' = -i\frac{h'}{h}$. On pose donc, pour $s_0 \in J$,

$$\theta(s) = \theta(s_0) + \int_{s_0}^{s} -i\frac{h'}{h}(t)\,dt, \qquad h(s_0) = e^{i\theta(s_0)}.$$

On a $(\mathbf{h}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta})' = \mathbf{h}'\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta} - \mathbf{i}\theta'\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta} = \mathbf{0}$, et donc $h(s) = h(s_0)e^{i(\theta(s)-\theta(s_0))} = e^{i\theta(s)}$.
2) Puisque $g' = \overrightarrow{\tau}(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))$, $\overrightarrow{\tau}' = \theta'(-\sin(\theta), \cos(\theta)) = \theta'\overrightarrow{n}$. Or $\overrightarrow{\tau}' = k\overrightarrow{n}$ d'après (1.9). □

2.2 La courbure algébrique détermine la courbe

Imaginez que vous êtes enfermé dans le coffre d'une voiture roulant à vitesse constante. Pouvez-vous reconstituer le trajet à partir des accélérations ressenties ? OUI (théoriquement). Mathématiquement : La courbure algébrique détermine la courbe (à isométrie près : il faut connaître position et vitesse initiales).

Théorème 1.33. Soit $k : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p, $p \geq 0$. Alors il existe, à isométrie près, un unique arc géométrique orienté A de classe C^{p+2} dont k soit la courbure algébrique.

`Preuve :` Soit $k : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p, $p \geq 0$. Fixons un angle $\theta_0 \in \mathbb{R}$ et un point $p_0 \in \mathbb{R}^2$. Pour $s_0 \in I$, on pose $\theta(s) = \int_{s_0}^{s} k(t)\,dt$, puis on intègre le vecteur vitesse $\tau := e^{i\theta}$:

$$g(s) = p_0 + \int_{s_0}^{s} e^{i\theta(t)}\,dt.$$

Alors $g' = e^{i\theta}$ est paramétré par la longueur et $g'' = \theta' i e^{i\theta} = kig'$. L'unicité de la courbe telle que $g(s_0) = p_0$ et $g'(s_0) = e^{i\theta_0}$ est claire puisque k et θ_0 déterminent θ, puis θ et p_0 déterminent g. □

Remarque 1.34. L'unicité est fausse avec la courbure simple.

Exemple 1.35. La *clothoide* est la courbe de courbure algébrique $k(s) = as$, $a > 0$. On a $\theta(s) = \frac{as^2}{2}$ d'où

$$g(s) = g(0) + \int_0^s (\cos(as^2), \sin(as^2))\, ds.$$

C'est la trajectoire parcourue en voiture si on tourne le volant à vitesse constante. Elle est utilisée dans les constructions de routes ou de rails pour raccorder des droites et des arcs de cercle sans faire d'acoup.

2.3 Formules

Paramétrage quelconque. Si (I, f) est un paramétrage régulier quelconque, on a $f'(t) = ||f'(t)||\overrightarrow{\tau}$, et au point $p = f(t)$ d'après (1.7)

$$f''(t) = \langle f'', \overrightarrow{\tau}\rangle\overrightarrow{\tau} + ||f'(t)||^2 K(p)\overrightarrow{\nu} = \langle f'', \overrightarrow{\tau}\rangle\overrightarrow{\tau} + ||f'(t)||^2 k(s)\overrightarrow{n},$$

donc

$$\det(f', f'') = ||f'(t)||^3 k(s),$$

d'où si $f = (x, y)$,

$$\boxed{k(p) = \frac{\det(f', f'')}{||f'(t)||^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^3}.} \tag{1.10}$$

En coordonnées polaires. Soit f est donnée par $f(\theta) = r(\theta)e^{i\theta}$, alors

$$f' = r'e^{i\theta} + rie^{i\theta}, \quad f'' = r''e^{i\theta} + 2r'ie^{i\theta} - re^{i\theta} = (r'' - r)e^{i\theta} + 2rie^{i\theta},$$

d'où

$$\boxed{k(\theta) = \frac{\det(f', f'')}{||f'(t)||^3} = \frac{2r'^2 + r^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.}$$

Définition implicite. On peut définir un arc géométrique de manière implicite, c'est-à-dire comme ligne de niveau d'une fonction : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$ où $F : O \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de dérivée non nulle. Rappelons le théorème des fonctions implicites :

Théorème 1.36 (Théorème des fonctions implicites)**.** Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et $F \in C^p(O, \mathbb{R}^m)$ (où $p \geq 1$). On suppose qu'en $(x_0, y_0) \in O, D_yF(x_0, y_0)$ est inversible, alors il existe un voisinage ouvert $U \times V$ de (x_0, y_0) et $\phi : U \to V$ une application de classe C^p telle que

$$(\,(x, y) \in U \times V,\;\; F(x, y) = 0\,) \iff (\,x \in U,\; y = \phi(x)\,)$$

De plus on a $D\phi(x) = -(DyF(x_0, y_0))^{-1} D_xF(x_0, y_0)$

Ici $D_yF : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est la différentielle par rapport à la variable y. Dans le cas $n = m = 1$ on obtient que $A = \{F(x,y) = 0\}$ peut être décrit au voisinage (x_0, y_0) comme le graphe $\{(x, \phi(x))\}$. En particulier on a le paramétrage régulier $t \mapsto (t, \phi(t))$. Si (I, f) est un paramétrage régulier quelconque de A, on a en dérivant $F(f(t)) = 0$ que $\langle \nabla F, f' \rangle = 0$. En dérivant à nouveau,

$$D^2F(f', f') + \langle \nabla F, f'' \rangle = 0$$

Au signe près, $\frac{\nabla F}{||\nabla F||} = \overrightarrow{n}$. Donc en utilisant (1.7),

$$\begin{aligned} k(p) &= \frac{\langle f'', \overrightarrow{n} \rangle}{||f'^2||} = \pm \frac{\langle f'', \frac{\nabla F}{||\nabla F||} \rangle}{||f'^2||}, \\ &= \pm D^2F \left(\frac{f}{||f'||}, \frac{f}{||f'||} \right) \frac{1}{||\nabla F||} \end{aligned}$$

Au signe près $\frac{f}{||f'||} = \pm i \frac{\partial F}{||\nabla F}$. En notant $\partial_x F = \frac{\partial F}{\partial x}$ et $\partial_y F = \frac{\partial F}{\partial y}$, $\nabla F = (\partial_x F, \partial_y F)$ donc $\frac{f}{||f'||} = \pm \frac{(-\partial_y F, \partial_x F)}{||\nabla F||}$. On obtient

$$\begin{aligned} k(p) &= \pm(-\partial_y F, \partial_x F) \begin{pmatrix} \partial^2_{xx} F & \partial^2_{xy} F \\ \partial^2_{xy} F & \partial^2_{yy} F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial_y F \\ \partial_x F \end{pmatrix} \frac{1}{||\nabla F||^3} \\ &= \pm \frac{\partial^2_{xx} F (\partial_y F)^2 - 2\partial^2_{xy} F \partial_x F \partial_y F + \partial^2_{yy} F (\partial_x F)^2}{((\partial_x F)^2 + (\partial_y F)^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

3 Courbes dans $\mathbb{R}^3$, dites courbes gauches

On considère maintenant un arc géométrique A dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, orienté par la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Contrairement à $\mathbb{R}^2$ où A peut tourner à gauche ou à droite (sens direct ou indirect), dans $\mathbb{R}^3$ il n'y a pas de gauche ou de droite pour A induit par la base canonique : on peut toujours envoyer $\overrightarrow{i}$ sur un vecteur vitesse $\overrightarrow{\tau}$ de A par une isométrie directe, mais celle-ci n'est pas unique puisqu'on peut la composer avec n'importe quelle rotation d'axe $\overrightarrow{\tau}$, $\overrightarrow{j}$ donc pas d'image privilégiée. Nous avons bien au quotidien une notion de gauche et de droite, mais celle-ci vient de ce que nous avons 2 axes naturels, définis par la vision (devant-derrière : $\overrightarrow{i}$) et la gravité (haut-bas : $\overrightarrow{k}$). L'arc A n'a qu'un axe devant-derrière ($\overrightarrow{\tau}$).

On définira donc la "gauche" comme la direction vers laquelle tourne l'arc dans son plan osculateur. On pourra ensuite parler de "haut" et de "bas".

Pour cela nous supposerons A birégulier dans toute cette section. Soit (J, g) un paramétrage de A par longueur d'arc.

3.1 Trièdre de Frenet, torsion

Définition 1.37. On appelle **trièdre de Frenet** de A la base orthonormée directe $(\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta})$ définie par

$$\vec{\tau} = g', \quad \vec{\nu} = \frac{g''}{||g''||}, \quad \vec{\beta} = \vec{\tau} \wedge \vec{\nu} \tag{1.11}$$

On a besoin de l'hypothèse de birégularité pour définir $\vec{\nu}$. On rappelle que le produit vectoriel $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est l'application bilinéaire antisymétrique vérifiant $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$. Il s'ensuit que $(x_1, x_2, x_3) \wedge (y_1, y_2, y_3) = (x_2y_3 - x_3y_2, -(x_1y_3 - x_3y_1), x_1y_2 - x_2y_1)$ et aussi l'égalité par l'égalité

$$\langle X \wedge Y, Z \rangle = \det(X, Y, Z),$$

pour tous $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, le déterminant étant celui des coordonnées de X, Y, Z dans la base canonique. En particulier $X \wedge Y$ est orthogonal à X, Y. On a plus l'égalité

$$||X \wedge Y||^2 + \langle X, Y \rangle = ||X||^2 ||Y||^2.$$

Si e_1, e_2 sont des vecteurs orthonormés, $e_3 = e_1 \wedge e_2$ est tel que (e_1, e_2, e_3) est orthonormée et directe (i.e. de déterminant $+1$).

Rappelons que $\vec{\tau}' = K\vec{\nu}$ où K est la courbure (la non algébrique, celle qui est toujours positive ou nulle). On peut également exprimer $\vec{\nu}'$ et $\vec{\beta}'$ grâce aux **relations de Frenet** :

Proposition 1.38. Il existe une fonction $T : J \to \mathbb{R}$, appelée **Torsion**, telle que

$$\begin{array}{rcccc} \vec{\tau}' & = & 0 & +K\vec{\nu} & 0 \\ \vec{\nu}' & = & -K\vec{\tau} & 0 & -T\vec{\beta} \\ \vec{\beta}' & = & 0 & +T\vec{\nu} & 0 \end{array}$$

`Preuve:` On a les relations

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \vec{\tau}, \vec{\tau} \rangle = \langle \vec{\nu}, \vec{\nu} \rangle = \langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \rangle, \\ 0 &= \langle \vec{\tau}, \vec{\nu} \rangle = \langle \vec{\nu}, \vec{\beta} \rangle = \langle \vec{\tau}, \vec{\beta} \rangle. \end{aligned}$$

En dérivant $\langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \rangle$ on a $\langle \vec{\beta}', \vec{\beta} \rangle = 0$. On dérivant $\langle \vec{\tau}, \vec{\beta} \rangle$, on obtient $\langle \vec{\tau}', \vec{\beta} \rangle = -\langle \vec{\tau}, \vec{\beta}' \rangle$, qui est égale à 0 puisque $\vec{\tau}' = K\vec{\nu}$. Donc $\vec{\beta}'$ est colinéaire à $\vec{\nu}$. On appelle T le réel tel que $\vec{\beta}' = T\vec{\nu}$.
En dérivant $\langle \vec{\nu}, \vec{\nu} \rangle$ on a $\langle \vec{\nu}', \vec{\nu} \rangle = 0$. En dérivant $\langle \vec{\tau}, \vec{\nu} \rangle$ on obtient $\langle \vec{\tau}, \vec{\nu} \rangle = -\langle \vec{\tau}, \vec{\nu}' \rangle$, qui est égale à K. En dérivant $\langle \vec{\nu}, \vec{\beta} \rangle$ on obtient $\langle \vec{\nu}', \vec{\beta} \rangle = -\langle \vec{\nu}, \vec{\beta}' \rangle$, qui est égale à $-T$. □

La torsion mesure le défaut de planeité de la courbe. En effet si la courbe est contenue dans un plan, ce plan est parallèle à $\text{vect}\{\vec{\tau}, \vec{\nu}\}$ qui est donc constant. Alors $\vec{\beta} = \vec{\tau} \wedge \vec{\nu}$ également, donc $\overrightarrow{\beta}' = 0$, la torsion est nulle. Réciproquement, si $\overrightarrow{\beta}' = 0$ alors $\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\tau} \wedge \overrightarrow{\nu}$ est constant. Le plan osculateur vect$\{\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{\nu}\} = \overrightarrow{\beta}^{\perp}$ est constant et on a vu (lemme 1.13) que cela impliquait que la courbe soit contenue dans un plan. On peut le redémontrer ici : puisque $\overrightarrow{\tau} \perp \overrightarrow{\beta}$, $\langle g', \overrightarrow{\beta}\rangle = 0$ donc par intégration (en utilisant $\overrightarrow{\beta}' = 0$), $\langle g, \overrightarrow{\beta}\rangle$ est constant. Il s'ensuit que $g(s) - g(s_0) \perp \overrightarrow{\beta}$, c'est à dire que $g(s) \in g(s_0) + \overrightarrow{\beta}^{\perp}$. Un développement limité, utilisant $g'''(s) = (K\overrightarrow{\nu})' = K'\overrightarrow{\nu} + K(-K\overrightarrow{\tau} + T\overrightarrow{\beta})$, donne

$$\begin{aligned} g(s) &= g(0) + s\overrightarrow{\tau}(0) + \frac{s^2}{2}(K\overrightarrow{\nu})(0) + \frac{s^3}{6}(K'\overrightarrow{\nu} - K^2\overrightarrow{\tau} - KT\overrightarrow{\beta})(0) + o(s^3) \\ &= g(0) + \left(s - \frac{K^2 s^3}{6}\right)\overrightarrow{\tau} + \left(\frac{Ks^2}{2} - \frac{K's^3}{6}\right)\overrightarrow{\nu} - \frac{KTs^3}{6}\overrightarrow{\beta} + o(s^3). \end{aligned}$$

Pour $s > 0$ petit, le coefficient de $\overrightarrow{\nu}$ est positif (on va "à gauche"), celui de $\overrightarrow{\beta}$ est négatif si $T > 0$ (on descend), positif si $T < 0$ (on monte). Dès que $T \neq 0$, la courbe traverse son plan osculateur.

3.2 Courbure et torsion déterminent la courbe

Si on connaît la courbure, qui indique de combien on tourne "à gauche", et la torsion, qui indique de combien on monte ou on descend, on doit pouvoir reconstituer la trajectoire ? Effectivement, la courbure et la torsion déterminent la courbe :

Théorème 1.39. Soit $K \in C^1(I, \mathbb{R}_+^*)$, $T \in C^0(I, \mathbb{R})$, $(\overrightarrow{\tau}_0, \overrightarrow{\nu}_0, \overrightarrow{\beta}_0)$ un repère orthonormé direct, $s_0 \in J$ et $p \in \mathbb{R}^3$. Alors il existe un unique arc birégulier (J, g) de classe C^3, paramétré par la longueur, de courbure K et de torsion T, dont le repère de Frenet en $g(s_0) = p$ est $(\overrightarrow{\tau}_0, \overrightarrow{\nu}_0, \overrightarrow{\beta}_0)$.

`Preuve:` Les relations de Frenet écrites en coordonnées équivalent au système suivant :

$$\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ -K & 0 & -T \\ 0 & T & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

soit

$$O'(s) = M(s)O(s), \tag{1.12}$$

où les lignes respectives de $O(s)$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{\tau}$, $\overrightarrow{\nu}$, $\overrightarrow{\beta}$ respectivement, par exemple dans la base $(\overrightarrow{\tau}_0, \overrightarrow{\nu}_0, \overrightarrow{\beta}_0)$. La condition initiale se traduit donc par $O(s_0) = Id_3$. L'équation différentielle (1.12) étant linéaire d'ordre 1 et la fonction $s \mapsto M(s)$ étant continue sur J, le problème de Cauchy ((1.12), $O(s_0) = Id_3$) admet (par le théorème de Cauchy-Lipschitz) une unique solution $s \mapsto O(s)$ définie sur J. Vérifions que $O(s)$ reste orthogonale (ses vecteurs lignes sont alors orthonormés), c'est à dire que ${}^tO.O = Id_3$ ou de manière équivalente $O.{}^tO = Id_3$. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(O.{}^tO) &= O'.{}^tO + O.({}^tO)' \\ &= MO.{}^tO + O.{}^t(MO) \\ &= MO.{}^tO + O.{}^tO.{}^tM \\ &= MO.{}^tO - O.{}^tOM \end{aligned}$$

en utilisant l'antisymétrie de M. Cela signifie que $s \mapsto O.{}^tO$ vérifie aussi une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur J, de condition initiale $(O.{}^tO)(s_0) = Id_3$. Puisque la matrice identité Id_3 est solution de cette équation et de même condition initiale, l'unicité de Cauchy implique que $(O.{}^tO)(s) = Id_3$ pour tout $s \in J$. On définit alors g par intégration :

$$g(s) = p + \int_{s_0}^{s} \overrightarrow{\tau}(t)\, dt.$$

□

Remarque 1.40. Le théorème est faux sans l'hypothèse $K > 0$: d'abord la torsion n'est pas définie ; ensuite même pour une courbe restreinte à un plan, sans signe sur la courbure on ne peut distinguer un virage à gauche d'un virage à droite.

3.3 Formules

Pour le paramétrage par longueur d'arc (J, g), on a

$$\begin{aligned} g' &= \overrightarrow{\tau}, \\ g'' &= \overrightarrow{\tau}' = K\overrightarrow{\nu}, \\ g''' &= K'\overrightarrow{\nu} + K\overrightarrow{\nu}' \\ &= -K^2\overrightarrow{\tau} + K'\overrightarrow{\nu} - KT\overrightarrow{\beta} \end{aligned}$$

En particulier

$$\det(g', g'', g''') = -K^2 T$$

Pour (I, f) un paramétrage de A, et θ le changement de paramétrage tel que $f = g \circ \theta$, on a

$$\begin{aligned} f' &= \theta' g' \\ f'' &= \theta'' g' + \theta'^2 g'' \\ f''' &= \theta''' g' + 3\theta'\theta'' g'' + \theta'^3 g''' \end{aligned}$$

d'où

$$\| f' \wedge f'' \| = |\theta'|^3 K$$

et

$$\det(f', f'', f''') = \det(\theta' g', \theta'^2 g'', \theta'^3 g''') = \theta'^6(-K^2 T)$$

donc

$$\boxed{K = \frac{\| f' \wedge f'' \|}{\| f' \|^3}, \qquad T = -\frac{\det(f', f'', f''')}{\| f' \wedge f'' \|^2}.}$$

Chapitre 2 : sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

2.1 Introduction

Une sous-variété de dimension d dans $\mathbb{R}^n$ est un objet qui ressemble localement au modèle $\mathbb{R}^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. La ressemblance doit être assez forte pour exclure les cônes par exemple, qu'on ne veut pas comme sous-variétés.

On définit donc une sous-variété comme déformation de $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ par des difféomorphismes locaux ambiants de $\mathbb{R}^n$:

Définition 2.1 (définition locale par redressement). Soit $n \geq d \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On dit qu'une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une **sous-variété de $\mathbb{R}^n$, de dimension d,** (de classe C^k) si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$ un C^k-difféomorphisme tel que

$$f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}).$$

Bon, on a une définition qui tient la route mais qui n'a pas l'air très maniable. Comment on ferait en pratique pour montrer que $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ est bien une sous-variété ? Nous allons donner plusieurs formulations équivalentes de cette définition. Selon les cas, on pourra essayer l'une ou l'autre pour montrer qu'un objet est, ou n'est pas, une sous-variété. Observons qu'on peut représenter un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^n$ de plusieurs manières :

(1) Comme le noyau d'une application linéaire : $\mathbb{R}^d \times \{0\} = g^{-1}(0) = \ker g$ où

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{d+1}, \ldots, x_n).$$

Plus généralement, tout d-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est le noyau d'une application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ *surjective* (par le théorème du rang, dimension du noyau$= n-$ dimension de l'image).

(2) Comme l'image d'une application linéaire : $\mathbb{R}^d \times \{0\} = h(\mathbb{R}^d)$ où

$$h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n, \qquad (x_1, \ldots, x_d) \mapsto (x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0).$$

Plus généralement, un d-sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est l'image de $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ linéaire *injective*.

On va également caractériser une sous-variété générale en termes d'image et de "noyau", de certaines applications différentiables. On a besoin d'un peu de calcul différentiel.

2.2 Immersions, submersions.

Soit E, F deux espaces vectoriels normés (de dimension finie pour rester simple), $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts, un point $a \in U$ et une application $f : U \to V$ différentiable en a. On note $d_a f : E \to F$ sa différentielle, i.e. l'unique application linéaire telle que pour tout $u \in E$ voisin de 0 :

$$f(a+u) = f(a) + d_a f(u) + o(u).$$

Note : on peut trouver dans la litterature les diverses notations :

$$d_a f = D_a f = Df(a) = f'(a)$$

Définition 2.2. On dit que f est une **immersion** en $a \in U$ si sa différentielle $d_a f : E \to F$ est injective. On dit que c'est une immersion sur U si c'est une immersion en chaque point de U.
On dit que f est une **submersion** en $a \in U$ si sa différentielle $d_a f$ est surjective. On dit que c'est une submersion sur U si c'est une submersion en chaque point de U

Clairement $\dim E \leq \dim F$ si f est une immersion, $\dim E \geq \dim F$ si f est une submersion.

EXEMPLE 2.3. Soit $p, q \leq n$ des entiers. Les exemples fondamentaux sont

$$\text{l'inclusion} \quad \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \ldots, x_p) \mapsto (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$$

pour l'immersion et

$$\text{la projection} \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q, \quad (x_1, \ldots, x_q, x_{q+1}, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_q)$$

pour la submersion. Autres exemples :

- un arc paramétré (I, f) régulier dans $\mathbb{R}^n$ est une immersion de I dans $\mathbb{R}^n$, en chaque point. En effet, la différentielle $d_t f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est injective ssi $f'(t) \neq 0$, vu que $d_t f.u = f'(t)u$ (u est un scalaire).

- Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une submersion en x si et seulement si $d_x f \neq 0$. En effet l'image $d_x f(\mathbb{R}^n)$ est soit $\{0\}$ soit $\mathbb{R}$ tout entier, vu que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Si $d_x f$ n'est pas l'application nulle, son image est donc $\mathbb{R}$. En notant $\partial_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ la dérivée partielle de f par rapport à la variable x_i, cela revient à vérifier que le vecteur gradient $\nabla_x f = (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x))$ n'est pas nul.

Nous allons voir que, à difféomorphisme local près, les exemples fondamentaux ci-dessus (inclusion et projection) sont les seuls. On appellera *difféomorphisme local de* $\mathbb{R}^n$ au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un C^k-difféomorphisme ϕ entre un ouvert contenant x_0 et un ouvert contenant $\phi(x_0)$. Pour simplifier les énoncés, on travaille au voisinage de 0, le cas général étant laissé au lecteur.

Proposition 2.4 (Redressement des immersions). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k, qui est une immersion en $0 \in \Omega$. Alors il existe un C^k-difféomorphisme local H de $\mathbb{R}^n$ tel que au voisinage de 0 :

$$h(x_1, \ldots, x_d) = H(x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0),$$

c'est-à-dire $h = H \circ i_1$ où $i_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ est l'inclusion $x \mapsto (x, 0)$. De manière équivalente, $H^{-1} \circ h = i_1$.

Autrement dit, H^{-1} redresse h en l'inclusion.

`Preuve :` Soit h comme dans l'énoncé. La matrice jacobienne de h en 0 est

$$J_0 h = (\partial_j h_i(0))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq d}},$$

où $h = (h_1, \ldots, h_n)$ et $\partial_j h_i(0) := \frac{\partial h_i}{\partial x^j}(0)$ dénote la dérivée partielle de h_i par rapport à la variable x_j. Puisque $d_0 h$ est injective par hypothèse, par le théorème du rang ($\dim \ker d_0 h + \dim \mathrm{Im} d_0 h = \dim \mathbb{R}^d$) la matrice $J_0 h$ est de rang d. Quitte à permutter les coordonnées à l'arrivée (ce qui revient à composer h avec un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$), on peut supposer que les d premières lignes de la matrice sont indépendantes (composer revient à échanger $h_i \leftrightarrow h_j$, donc les lignes de $J_0 h$). La matrice $A = (\partial_j h_i(0))_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq d}}$ est alors inversible. On "étend" h localement dans $\mathbb{R}^n$ en une application $H : \Omega \times \mathbb{R}^{n-d} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k vérifiant $H(0) = 0$ en posant

$$(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_{n-d}) \mapsto (h_1(x), \ldots, h_d(x), y_1 + h_{d+1}(x), \ldots, y_{n-d} + h_d(x)),$$

où $x = (x_1, \ldots, x_d)$. Clairement $H(x, 0) = h(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

La matrice jacobienne de H en $0 \in \mathbb{R}^n$ est de la forme

$$J_0 H = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & \mathrm{I}_{n-d} \end{pmatrix}.$$

et est donc inversible. Par le théorème d'inversion locale, H est un C^k-difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ au voisinage de 0. $\square$

EXEMPLE 2.5. Un arc paramétré régulier (I, f) de $\mathbb{R}^n$ (pas nécessairement injectif) est une immersion.

Proposition 2.6 (Redressement des submersions). Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $g : U \to \mathbb{R}^q$ une application de classe C^k, qui est une submersion en $a \in U$, telle que $g(a) = 0$. Alors il existe un difféomorphisme local G de $\mathbb{R}^n$ au voisinage de a :

$$g \circ G^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_q).$$

De manière équivalente, $g \circ G^{-1} = \mathrm{pr}_1$ ou $g = \mathrm{pr}_1 \circ G$, avec $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q} \to \mathbb{R}^q$, $(x, y) \mapsto x$, la projection sur le premier facteur.

Autrement dit G^{-1} redresse g en une projection.

`Preuve:` Soit $g = (g_1, \cdots, g_q)$ comme dans l'énoncé. La matrice jacobienne $J_0 g = (\partial_j g_i(0))_{1 \leq i \leq q,\ 1 \leq j \leq n}$ est de rang q par hypothèse. Quitte à changer les coordonnées *au départ*, (en précomposant avec un isomorphisme, ce qui permet d'échanger les colonnes de $J_0 g$), on peut supposer que

$$B = (\partial_j g_i(0))_{1 \leq i \leq q,\ 1 \leq j \leq q}$$

est inversible. On définit $G : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k par

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (g_1(x), \ldots, g_q(x), x_{q+1}, \ldots, x_n).$$

Clairement $g = \mathrm{pr}_1 \circ G$. La matrice jacobienne de G en 0 est de la forme

$$J_0 G = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & \mathrm{I}_{n-q} \end{pmatrix}.$$

Par le théorème d'inversion locale, G est un C^k-difféomorphisme local au voisnage de a. $\square$

Remarque 2.7. On a écrit $g \circ G^{-1} = \mathrm{pr}_1$, la projection sur le premier facteur de $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q}$. Quitte à échanger les coordonnées au départ (en précomposant ϕ par un isomorphisme), on peut aussi écrire $g \circ G^{-1}$ comme la projection sur les q dernières coordonnées, i.e. la projection sur le deuxième facteur de $\mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$:

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{n-q+1}, \ldots, x_n)$$

Remarque 2.8. Les arguments ci-dessus montrent que si f de classe C^1 est une immersion (resp. submersion) en un point x, elle l'est sur un voisinage de x (le déterminant des matrices A et B est non nul en 0, donc sur un voisinage de 0 par continuité de df et du déterminant). La composée de deux immersions est une immersion, la composée de deux submersions est une submersion. Un difféomorphisme est une immersion et une submersion. Une immersion qui est aussi une submersion est un difféomorphisme local.

2.3 Caractérisations d'une sous-variété

On arrive à l'essentiel :

Théorème 2.9. Soit $n \geq d$ et $k \in N^* \cup \{\infty\}$. Soit M une partie de $\mathbb{R}^n$. Sont équivalents :

(1) **(Définition locale par redressement)** M est une sous variété de $\mathbb{R}^n$, de dimension d, de classe C^k.

(2) **(Définition locale implicite, "Noyau")** Pour tout $a \in M$, il existe un voisinage U de a dans $\mathbb{R}^n$ et $g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ une application de classe C^k, qui est une submersion en a, telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$.

(3) **(Définition locale par paramétrage, "image")** Pour tout $a \in M$, il existe un voisinage U de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et $h : \Omega \to U$ une application de classe C^k, qui est une immersion en 0, telle que $h(0) = a$ et qui est un homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$ (muni de la topologie induite).

(4) **(Définition locale comme graphe)** Pour tout $a \in M$, il existe un voisinage U de a dans $\mathbb{R}^n$, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^{n-d}$ une application de classe C^k telle que, après permutation éventuelle des coordonnées et identification $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$,

$$U \cap M = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \mid x \in \Omega\} = \mathrm{Graphe}(f)$$

`Preuve:` Montrons que (1) $\Rightarrow$ (2) et (3).
Soit U un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ un C^k-difféomorphisme tel que $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$. Si $f = (f_1, \ldots, f_n)$, définissons $g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ par $g = (f_{d+1}, \ldots, f_n)$, c'est-à-dire $g = \mathrm{pr}_2 \circ f$ où $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \to \mathbb{R}^{n-d}$ est la projection sur le deuxième facteur. Alors g est une submersion et $U \cap M = g^{-1}(0)$.
Pour (3) définissons $h : \Omega = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \to U$ comme la restriction de f^{-1} à (l'ouvert de $\mathbb{R}^d$) Ω. Alors h est une immersion de Ω dans $\mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme de Ω sur $M \cap U$.
(2) $\Rightarrow$ (1) Soit $g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ la submersion définie au voisinage de a. Par la proposition de redressement et la remarque 2.7, il existe G un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ au voisinage de a tel que

$$g \circ G^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_{d+1}, \ldots, x_n).$$

au voisinage de 0. Alors $G = f$ convient. En effet, notons U' le voisinage de a où G est défini, $V = G(U')$ son image. Alors $\mathrm{pr}_2 \circ G(M \cap U') = g(M \cap U') = \{0\}$ donc $G(M \cap U') = V \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(\{0\} = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$, comme voulu dans la définition 2.1.
(3) $\Rightarrow$ (1) Par hypothèse il existe deux ouverts Ω de $\mathbb{R}^d$, U de $\mathbb{R}^n$ et $h : \Omega \to U$ une immersion en 0 tel que $h(0) = a$ et telle que $h : \Omega \to U \cap M$ soit un homéomorphisme, en particulier $h(\Omega) = M \cap U)$. Par redressement des immersions (proposition 2.4), il existe H un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$H^{-1} \circ h(x_1, \ldots, x_d) = (x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}.$$

Quitte à prendre U plus petit on peut supposer H^{-1} défini sur U et on remplace Ω par $h^{-1}(U \cap M)$ si besoin, de sorte qu'on a toujours $h(\Omega) = M \cap U$. Par définition de H on a $H^{-1} \circ h(x) = (x, 0) \in$

$\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{n-d}$ et si on note $V = H^{-1}(U)$ on a exactement $H^{-1}(M\cap U) = H^{-1}\circ h(\Omega) = V\cap(\mathbb{R}^d\times\{0\})$.
(4) $\Rightarrow$ (3) Par hypothèse il existe une identification $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $f : \Omega\to\mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k et U un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$U \cap M = \{(x, f(x)) \mid x \in \Omega\}$$

On définit $h : \Omega\to\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k par $h(x) = (x, f(x))$. La matrice Jacobienne de h contient clairement un bloc I_d et est donc de rang d, ce qui prouve que h est une immersion. L'injectivité de h est claire et $h(\Omega) = U \cap M$. Enfin h est un homéomorphisme : si (x, y) et (x', y') sont deux points de $U \cap M$ tels que $||(x, y) - (x', y')|| \leq \delta$, vu que $(x, y) = (x, f(x))$ et $(x', y') = (x', f(x'))$, on a $||h^{-1}(x, y) - h^{-1}(x', y')|| = ||x - x'|| \leq ||(x - x', y - y'|| \leq \delta$, i.e. h^{-1} est continue (considéré définie sur $U \cap M$).

(2) $\Rightarrow$ (4) C'est le théorème des fonctions implicites. On refait la preuve. Soit $g = (g_1, \ldots, g_{n-d}) : U \subset \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n-d}$ la submersion au voisinage de a, telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$. Soit G un difféomorphisme local qui redresse la submersion de sorte que

Précisément $G(x) = (x_1, \ldots, x_d, g_1(x), \ldots, g_{n-d}(x))$, qu'on peut supposer définie sur U quitte à le restreindre. Soit $V = G(U)$. Clairement G^{-1} est de la forme $G^{-1}(x, y) = (x, F(x, y))$ où $F : V\to\mathbb{R}^d$. En particulier en restriction à $V\cap(\mathbb{R}^d\times\{0\})$ on a $G^{-1}(x, 0) = (x, F(x, 0))$. On pose donc $\Omega = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$ et $f : \Omega\to\mathbb{R}^{n-d}$, $f(x) = F(x, 0)$. Alors

$$\begin{aligned} M \cap U &= G^{-1}(\Omega) \\ &= \{(x, f(x) \mid x \in \Omega\}. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.10. Dans (3) il ne suffit pas de demander que l'immersion soit injective : la courbe $c :]-\infty, 1[\to\mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2, t - t^3)$ est une immersion injective mais $M = c(]-\infty, 1[$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$. Si U est un voisinage de $(0, 1)$ dans M, alors $U \setminus \{(0, 1)\}$ a 3 composantes connexes au moins ; or si un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ envoie U sur un segment dans $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, le segment privé de l'image de $(0, 1)$ aura 2 composantes connexes.

Définition 2.11. On appelle **paramétrisation** de M une application $h : \Omega\to\mathbb{R}^n$ qui est une immersion et un homéomorphisme de Ω sur un ouvert de M (i.e. $U \cap M$ pour un ouvert U de $\mathbb{R}^n$). On appelle **paramétrisation locale** une application $h : \Omega\to\mathbb{R}^n$ qui induit une paramétrisation locale au voisinage de tout point de V. (3) affirme qu'on peut recouvrir M par des ouverts qui sont des images de paramétrisations.

2.4 Exemples

Exemple 2.12 (La sphère). La sphère $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, définie comme

$$\{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}) \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

est une sous-variété de dimension n de classe C^∞. En effet $S^n = g^{-1}(0)$ où

$$g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 - 1,$$

est une submersion C^∞, car $J_x g = (2x_1, \ldots, 2x_{n+1})$ est non nul si $x \neq 0$, donc en particulier sur S^n. L'application $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ est une paramétrisation locale du cercle S^1.

Exemple 2.13 (Les tores). Soit

$$\begin{aligned} T^n &= \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 - 1 = 0, \cdots, |z_n|^2 - 1 = 0\} \\ &= \{x = (x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \cdots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 - 1 = 0\} \end{aligned}$$

C'est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{2n} \approx \mathbb{C}^n$ (considérer la submersion adéquate). On peut également le paramétrer localement par l'application

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (e^{it_1}, \ldots, e^{it_n}) \quad \text{de } \mathbb{R}^n \text{ dans } \mathbb{C}^n.$$

Exercice 2.14 (Tore de révolution). Soit $0 < a < b$. Soit $C \subset \mathbb{R}^3$ le cercle centré en $(b, 0, 0)$, de rayon a, dans le plan des $(x, 0, z)$. Soit M l'ensemble des points parcourus par C sous l'effet de toutes les rotations d'axe $(0, 0, 1)$. Construire une paramétrisation locale de M (paramétrer le cercle et faites tourner).

Exemple 2.15. L'arc paramétré $(\mathbb{R}, f)$, $t \mapsto (t^2, t^3)$ n'est pas une immersion en 0, mais cela ne suffit pas pour conclure que $M = f(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de classe C^1. De même dire que $M = g^{-1}(0)$ où $g(x, y) = x^3 - y^2$ n'est pas une submersion en $(0, 0)$ n'est pas concluant. Raisonnons par contradiction en supposant que M est une sous-variété. Alors d'après la caratérisation (4) c'est au voisinage de $(0, 0)$ un graphe, de la forme $\{(x, F(x)) \mid x \in \Omega\}$ ou $\{(F(y), y) \mid y \in \Omega$, avec F de classe C^1 définie sur Ω voisinage de 0. Dans le premier M contiendrait des $(x, F(x))$ avec $x < 0$, ce qui est exclu. Dans le deuxième, on aurait $F^3(y) = y^2$, soit $F(y) = y^{2/3}$, mais cette fonction n'est pas dérivable en 0.

Exemple 2.16. Le cône de révolution, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ n'est pas une sous-variété de R^3. Le fait que l'application $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ne soit pas une submersion en 0 ne suffit pas (il pourrait y avoir une autre submersion qui marche). Un argument de connexité fait l'affaire. Si on pouvait redresser localement C au voisinage de 0 en un disque de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ on trouverait un voisinage épointé de 0 dans C ayant deux composantes connexes, homéomorphe à une boule épointée de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, qui est connexe.

Exemple 2.17. Considérons $C_+ = \{(x, y, z) \in C \mid z \geq 0\}$ la partie supérieure de cône. Ce n'est pas une sous-variété mais l'argument de connexité ne tient plus. On revient à la définition. Supposons que ψ soit un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^3$ en 0, qui envoie un voisinage de 0 dans C_+ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Considérons les vecteurs $u_1 = (0, 1, -1)$, $u_2 = (0 - 1, -1)$ et $u_3 = (-1, 0, -1)$. Les courbes $\gamma_i(t) = t.u_i$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et dans C_+ pour $t \leq 0$, pour $i = 1, 2, 3$. Alors les courbes $t \mapsto \psi \circ \gamma_i(t)$, sont dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ pour $t \leq 0$ voisin de 0. On peut calculer leur dérivée en $t = 0$, comme leur dérivée à gauche :

$$d_0\psi.u_i = d_0\psi.\gamma_i'(0) = \lim_{t \to 0, t < 0} \frac{\psi \circ \gamma_i(t) - 0}{t} \in \mathbb{R}^2 \times \{0\},$$

donc $d_0\psi$ envoie $\{u_1, u_2, u_3\}$ dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Or $\{u_1, u_2, u_3\}$ est linéairement indépendante, cela contredit le fait que $d_0\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ soit un isomorphisme.

2.5 Espace tangent

Définition 2.18. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, $a \in M$ et $v \in \mathbb{R}^n$. On dit que v est un **vecteur tangent à M en a** s'il est le vecteur vitesse en a d'une courbe tracée sur M :

$$\exists c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n \text{ différentiable, } c(0) = a, \; c(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset M, \; c'(0) = v.$$

On note T_aM l'ensemble des vecteurs tangents à M en a, qu'on appelle *espace tangent à M en a*.

Proposition 2.19. Soit M une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$ et $a \in M$. Alors T_aM est un sous-espace de vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension d.

`Preuve:` Revenons à la définition d'une sous-variété. Soit U un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$, V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$ un difféomorphisme tel que $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$, $f(a) = 0$. Montrons que $T_aM = (d_af)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$.
Soit $v \in T_aM$ alors il existe $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ différentiable tel que $c(0) = a$, $c(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset M$ et $c'(0) = v$. On peut supposer ε assez petit pour que $c(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset U$. Alors $f \circ c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^d \times \{0\}$ et

$$(f \circ c)'(0) = d_{c(0)}f.c'(0) = d_af.v \in \mathbb{R}^d \times \{0\}.$$

d'où $d_af(T_aM) \subset \mathbb{R}^d \times \{0\}$, soit $T_aM \subset (d_af)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$. Inversement, soit $w \in \mathbb{R}^d \times \{0\}$. Posons $c_w(t) = f^{-1}(tw)$ pour $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$ assez petit. C' est une courbe dans M telle que $c_w(0) = a$. En dérivant on obtient un vecteur $v = d_0f^{-1}.w = (d_af)^{-1}.w \in T_aM$ puisque vecteur vitesse d'une courbe de M. D'où $(d_af)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}) \subset T_aM$. □

Caractérisons T_aM suivant les différentes formulations de M.

Point de vue équation implicite Soit U un voisinage de a, $g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ une submersion en a telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$. Alors

$$T_aM = \ker d_ag$$

Les sous-espaces vectoriels T_aM et $\ker d_ag$ ayant la même dimension, il suffit de vérifier que $T_aM \subset \ker d_ag$. Or si $v \in T_aM$ est le vecteur vitesse en a d'une courbe $c_v :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$, on a $g \circ c_v(t) = 0$ pour t voisin de 0 d'où

$$d_ag.v = d_ag.c_v'(0) = (g \circ c_v)'(0) = 0$$

et le résultat.
Le cas particulier $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (hypersurface $d = n-1$) est inté ressant : Si on note

$$\nabla_a g = (\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}),$$

le vecteur gradient de g, $d_a g.v = \langle \nabla_a g, v\rangle$ pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, donc

$$\boxed{T_a M = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla_a g, v\rangle = 0\} = \nabla_a g^\perp}$$

L'espace tangent est l'orthogonal du vecteur gradient de la submersion. Si $g = (g_1, \dots, g_{n-d})$, $\ker dg = \cap \ker dg_i$ donc

$$T_a M = \nabla_a {g_1}^\perp \cap \ldots \cap \nabla_a {g_{n-d}}^\perp$$

Point de vue paramétrisation Soit U un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et $h : V \to U$ une paramétrisation de M telle que $h(0) = a$. Alors

$$\boxed{T_a M = d_0 h(\mathbb{R}^d).}$$

Puisque $d_a h$ est injective, $\dim d_0 h(\mathbb{R}^d) = d$ et il suffit de montrer que $T_a M \supset d_0 h(\mathbb{R}^d)$. Or pour chaque vecteur $v \in \mathbb{R}^d$, $t \mapsto c_v(t) = h(tv)$ est une courbe tracée sur M (pour t proche de 0) différentiable d'où $d_0 h.v = c_v'(0) \in T_a M$. Une base, souvent utile, de $T_a M$ est donné e par les dé rivé es partielles

$$\{\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_d}\}$$

En effet $\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} h(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_d) = d_a h.e_i \in T_a M$ et les vecteurs sont indé pendants puisque d_h est injective.

point de vue Graphe Soit U un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$, une identification par un automorphisme linéaire $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$, un ouvert V de $\mathbb{R}^d$ et $f : V \to \mathbb{R}^{n-d}$ une application de classe C^k telle que $U \cap M = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \mid x \in V\}$. Supposons que $a = (x_0, f(x_0))$, alors

$$\boxed{T_a M = \{(w, d_{x_0} f.w) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \mid w \in \mathbb{R}^d\} = \text{graphe de } d_{x_0} f.}$$

En effet pour tout vecteur $w \in \mathbb{R}^d$, la courbe $t \mapsto (x_0 + tw, f(x_0 + tw)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ est contenue dans M (t petit) différentiable dans $\mathbb{R}^n$ de vecteur vitesse en a égal à $v = (w, d_{x_0} f.w)$. Ceci montre que $T_a M$ contient le graphe de $d_{x_0} f$. Comme le graphe d'une application liné aire dé finie sur $\mathbb{R}^d$ est un sous-espace vectoriel de dimension d, on a é galité .

La notion d'espace tangent permet de faire du calcul différentiel entre sous variétés : si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ et N une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, on peut donner un sens à la différentiabilité de $F : M \to N$ en un point $a \in M$. La différentielle est alors une application linéaire $d_aF : T_aM \to T_{F(a)}N$. Nous n'allons pas pénétrer dans ce vaste continent (hors programme) mais simplement donner une nouvelle saveur au fait suivant bien connu : une fonction différentiable a une différentielle nulle en un extremum. Le point intéressant est que la fonction sera définie sur une sous-variété M, la différentielle sera nulle en restriction à l'espace tangent.

Théorème 2.20 (extrémas liés). Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d, F une fonction différentiable à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un voisinage de M. Si $a \in M$ est tel que $F(a)$ est un extremum local de $F_{|M}$, alors $d_aF_{|T_aM} = 0$. De plus, si $g = (g_1, \ldots, g_{n-d})$ est une submersion telle que $M = g^{-1}(0)$, alors il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-d}) \in \mathbb{R}^{n-d}$ tels que

$$d_aF = \lambda_1 d_a g_1 + \cdots + \lambda_{n-d} d_a g_{n-d}.$$

Les réels λ_i sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

`Preuve:` Soit $v \in T_aM$ et $t \mapsto c_v(t)$ une courbe tracée sur M telle que $c(0) = a$ et $c'(0) = v$. La fonction d'une variable $t \mapsto F \circ c_v(t)$ admet un extremum local en $t = 0$, donc y est de dérivée nulle. Or $(F \circ c_v(t))'(0) = d_{c_v(0)}F.c_v'(0) = d_aF.v$, d'où $d_aF.v = 0$ pour tout $v \in T_aM$. Montrons la dernière assertion du théorème. Puisque g est une submersion, les formes linéaires $d_ag_1, \ldots, d_ag_{n-d}$ sont linéairement indépendantes. Supposons que $\{d_ag_1, \ldots, d_ag_{n-d}, d_aF\}$ soit linéairement indépendante. Alors l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n-d+1}$ définie par

$$v \mapsto (d_ag_1v, \ldots, d_ag_{n-d}v, d_aFv)$$

est de rang $n-d+1$, donc de noyau de dimension $d-1$. Or le noyau contient T_aM : puisque $g = 0$ sur M, $T_aM = \ker d_ag$ et on a vu que $d_aF(T_aM) = 0$. Il s'ensuit que $\{d_ag_1, \ldots, d_ag_{n-d}, d_aF\}$ est liée, et comme les $n - d$ premiers éléments sont indépendants, on a le résultat. $\square$

Chapitre 3 : étude métrique locale des surfaces de $\mathbb{R}^3$

On s'intéresse à la géométrie locale des surfaces $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$: longueur de courbes tracées sur Σ, aires de domaines $\subset \Sigma$, courbure(s) de Σ. Comme on travaille localement, on supposera qu'il existe une paramétrisation

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \Sigma \subset \mathbb{R}^3$$

(immersion + homéomorphisme sur son image)

1 Première forme fondamentale

1.1 Rappels sur les produits scalaires

Si E est un espace vectoriel (réel), un produit scalaire sur E est $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique défini positif ($\langle x, x\rangle > 0, \forall x \neq 0$). Si E de dimension finie, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base, la matrice symétrique $M = (\langle e_i, e_j\rangle)$ détermine le produit scalaire par la formule

$$\langle \sum x_i e_i, \sum y_j e_j\rangle = \sum x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = (x_1, \ldots, x_n)\left(\langle e_i, e_j\rangle\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tXMY$$

Si $L : E \to F$ est linéaire injective et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur F, on peut le tirer en arrière en un produit scalaire sur E noté $L^*\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par :

$$L^*\langle x, y\rangle = \langle Lx, Ly\rangle.$$

On va appliquer ceci en chaque $a \in U$ pour tirer en arrière avec d_af le produit scalaire standard $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de $\mathbb{R}^3$, ou ce qui revient au même, sa restriction à $T_{f(a)}\Sigma$.

1.2 Première forme fondamentale, expression locale

Définition 3.1. On appelle **première forme fondamentale** en $p \in \Sigma$, et on note I_p, la restriction du produit scalaire standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ à $T_p\Sigma$:

$$\forall X, Y \in T_p\Sigma, \quad I_p(X,Y) = \langle X, Y \rangle.$$

Si $a \in U$ et $f(a) = p$, puisque $d_a f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est injective (et $d_a f : \mathbb{R}^2 \to T_p\Sigma$ est un isomorphisme), on peut tirer en arrière $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (ou I_p). On obtient un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, dépendant du point a :

$$g_a = (d_a f)^* \langle \cdot, \cdot \rangle = (d_a f)^* I_p$$

défini donc par

$$g_a(V, W) = \langle d_a f.V, d_a f.W \rangle = I_p(V, W)$$

Si $\{e_1, e_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, (u, v) les coordonnées dans cette base, alors $d_a f.e_1 = \frac{\partial f}{\partial u}$ et $d_a f.e_2 = \frac{\partial f}{\partial v}$. La matrice de g_a dans $\{e_1, e_2\}$, qu'on note $(g_{ij})_a$ est donc

$$(g_{ij})_a = \begin{pmatrix} g_a(e_1, e_1) & g_a(e_1, e_2) \\ g_a(e_2, e_1) & g_a(e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \rangle & \langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \rangle \\ \langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \rangle & \langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \rangle \end{pmatrix} (a) =: \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

où E, F, et G sont des fonctions de (u, v). C'est aussi matrice de I_p dans la base $\{\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\}$ de $T_p\Sigma$. On a aussi l'expression plus synthétique

$$(g_{ij})_a = {}^t J_a f \cdot J_a f$$

où $J_a f = (\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v})$ est la matrice jacobienne de f

((si $f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, Jf est la matrice 3×2, $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$ donc ${}^t J_a f \cdot J_a f$ est bien 2×2. Exercice : vérifier la formule.))

Définition 3.2. L'application $U \to M_2(\mathbb{R}), a \mapsto (g_{ij})(a)$ est appelée **expression de la première forme fondamentale** dans les coordonnées (U, f).

Si on a une autre paramétrisation $(\tilde{U}, \tilde{f})$, le lien entre les deux expressions de la première forme fondamentale est donnée par :

Lemme 3.3. Soit $(\tilde{U}, \tilde{f})$ une autre paramétrisation de Σ, avec $\tilde{f} = f \circ \phi$, alors

$$(\tilde{g}_{ij}) = {}^t J\phi \cdot (g_{ij} \circ \phi) \cdot J\phi$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
(\tilde{g}_{ij})_a &= {}^t J_a \tilde{f} \cdot J_a \tilde{f} \\
&= {}^t (J_{\phi(a)} f \cdot J_a \phi) \cdot (J_{\phi(a)} f \cdot J_a \phi) \\
&= {}^t J_a \phi \cdot {}^t J_{\phi(a)} f \cdot J_{\phi(a)} f \cdot J_a \phi \\
&= {}^t J_a \phi \cdot (g_{ij})_{\phi(a)} \cdot J_a \phi
\end{aligned}$$

□

Exemple 3.4. $\Sigma = S^2$ (ou un bout de S^2). On a une première paramétrisation $U = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$, $f : (u,v) \mapsto (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$, qui donne

$$J_{(u,v)}\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{pmatrix}, \qquad (g_{ij})_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{u^2}{1-u^2-v^2} & \frac{-uv}{1-u^2-v^2} \\ \frac{-uv}{1-u^2-v^2} & 1 + \frac{v^2}{1-u^2-v^2} \end{pmatrix}$$

Une autre paramétrisation (coordonnées sphériques)

$$\tilde{U} =]-\pi/2, \pi/2[\times]-\pi/2, 3\pi/2[, \qquad \tilde{f}(r,\theta) = (\cos(r)\cos(\theta), \cos(r)\sin(\theta), \sin(r)).$$

Alors

$$(\tilde{g})_{(r,\theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2(r) \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.5. Calculer l'expression de la première forme fondamentale lorsque la paramétrisation est donnée par un graphe $(u,v) \mapsto (u, v, h(u,v))$.

1.3 Longueur

La longueur de $\gamma : [a,b] \to \Sigma$ est sa longueur dans $\mathbb{R}^3$:

$$L(\gamma) = \int_a^b \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle^{1/2} \, dt.$$

Il peut-être avantageux de calculer cette longueur dans U : si $\gamma = f \circ \beta$, $\beta : [0,1] \to U$, alors

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= \int_a^b \langle d_{\beta(t)} f.\beta'(t), d_{\beta(t)} f.\beta'(t) \rangle^{1/2} \, dt \\
&= \int_a^b g_{\beta(t)}(\beta'(t), \beta'(t))^{1/2} \, dt \\
&= \int_a^b \sqrt{{}^t\beta'(t) \cdot (g_{ij})_{\beta(t)} \cdot \beta'(t)} \, dt
\end{aligned}$$

De même, l'angle de vecteurs unitaires X, Y de $T_p\Sigma$, peut se calculer comme

$$\arccos I_p(X,Y) = \arccos g_a(V,W)$$

où $d_af.V = X$ et $d_af.W = Y$.

Il peut paraître plus compliqué de travailler dans U avec un produit scalaire variable plutôt qu'avec le produit scalaire ambiant de $\mathbb{R}^3$, qui est fixe. L'avantage est que l'espace tangent de U est fixe, c'est $\mathbb{R}^2$, alors que celui de Σ dépend de p. Voyons par exemple comment montrer que les plus courts chemins sur S^2 sont les arcs de grand cercle, en travaillant en coodonnées.

Lemme 3.6. Les plus courts chemins sur S^2 sont exactement les arcs de grand cercle (intersection de S^2 avec un plan vectoriel).

`Preuve:` On travaille en coordonnées sphériques. Quitte à changer de repère, on se ramène à considérer deux points p, q situés sur un méridien, avec $p = \tilde{f}(r_1, 0)$ et $q := \tilde{f}(r_2, 0)$ (où $\tilde{f}$ est la paramétrisation de 3.4). Soit $\beta(t) = (r(t), \theta(t)) \,:\, [0,1] \to \tilde{U}$ joignant $(r_1, 0)$ à $(r_2, 0)$, $\gamma = \tilde{f} \circ \beta$. Alors

$$\begin{aligned}
L(\gamma) = L_{\tilde{g}}(\beta) &= \int_0^1 \sqrt{(r', \theta') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix}}\, dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{r'^2 + \theta'^2 \cos^2(r)}\, dt \\
&\geq \int_0^1 \sqrt{r'^2}\, dt \\
&\geq \int_0^1 |r'|\, dt = |r_2 - r_1|
\end{aligned}$$

si la courbe ne fait pas d'aller-retour, soit la longueur de l'arc de méridien joignant p à q. De plus l'inégalité est stricte si $\theta' \neq 0$. □

Remarque 3.7. Plus généralement, si l'expression de la première forme fondamentale est du type $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^2(u,v) \end{pmatrix}$, les segments horizontaux dans U sont minimisants pour la "longueur"

$$L_g(\beta) = \int \sqrt{g(\beta', \beta')_{\beta(t)}}\, dt$$

Leur image dans Σ est donc minimisante pour la longueur usuelle, parmi les courbes de Σ. Par contre le segment vertical n'est pas minimisant en général. Par exemple les parallèles (sauf l'équateur) ne sont pas minimisants sur la sphère, donc les segments verticaux de $\tilde{U} = \times] - \pi/2, \pi/2[\times] - \pi/2, 3\pi/2[$ non plus pour $L_{\tilde{g}}$.

Exercice 3.8. Les longueurs mesurées dans (U, f) sont les longueurs usuelles si et seulement si il existe $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque 3.9. On peut également exprimer la première forme fondamentale en coordonnées à l'aide de *formes différentielles*. Si (u, v) sont des coordonnés de $U \subset \mathbb{R}^2$ ($x = ue_1 + ve_2$ est représenté par (u, v)), la différentielle des applications u et v sont des formes linéaires $du : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $dv : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si $V = (a, b)$, $du(V) = a$ et $dv(V) = b$. Si on note du^2 la forme quadratique $(du)^2$ et $(dudv)(V) = du(V)dv(V)$ alors la forme quadratique notée ds^2 définie par $ds^2(V) = g(V, V)$, vérifie

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \tag{3.2}$$

Par exemple, la première forme fondamentale de la sphère en coordonnées sphériques s'écrit $ds^2 = dr^2 + \cos^2(r)d\theta^2$. Si (u', v') sont d'autres coordonnées, par exemple si $(u, v) = \Phi(u', v')$ ou Φ est un difféomorphisme, il suffit de calculer

$$du = \frac{\partial u}{\partial u'}du' + \frac{\partial u}{\partial v'}dv'$$

et

$$dv = \frac{\partial v}{\partial u'}du' + \frac{\partial v}{\partial v'}dv'$$

de remplacer dans (3.2) et développer comme des produits, pour obtenir $ds^2 = E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2$.

1.4 Aire

Soit $D \subset \Sigma$ un domaine compact, $f^{-1}(D) \subset U$. On veut mesurer l'aire de D en faisant le calcul dans U.

Définition 3.10. On appelle *aire de D* l'intégrale

$$A(D) = \int_{f^{-1}(D)} \sqrt{\det(g_{ij})}\, dudv.$$

Vérifions que cela ne dépend pas de la paramétrisation. Si $\tilde{f} = f \circ \phi$,

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{f}^{-1}(D)} \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})}\, dudv &= \int_{\tilde{f}^{-1}(D)} \sqrt{\det({}^tJ\phi \cdot (g_{ij})_\phi \cdot J\phi)}\, dudv \\
&= \int_{\phi^{-1}\circ f^{-1}(D)} |\det J\phi| \sqrt{\det(g_{ij})_\phi}\, dudv \\
&= \int_{f^{-1}(D)} \sqrt{\det(g_{ij})}\, dudv
\end{aligned}$$

d'après la formule de changement de variable.

Pourquoi dit-on cette expression mesure t'on l'aire ? Il faudrait définir l'aire proprement, ce qui serait technique. Donnons juste une explication heuristique. Si V, W sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, l'aire du losange engendré par $\{V,W\}$ est $|\det(V,W)|$. On voudrait définir l'aire dA d'un élément infinitésimal de Σ comme l'aire du losange P engendré par $\{\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\} \subset T_p\Sigma$. Cependant on ne peut prendre le déterminant de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$...Ajoutons leur un troisième vecteur normal unitaire n, par exemple le normalisé de $\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}$. Alors le volume du parallélépipède engendré par $M = \{\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, n\}$ est $|\det(M)| = Aire(P)$. Or

$$|\det(M)| = \sqrt{\det({}^tM \cdot M)} = \sqrt{{}^tJf \cdot Jf} = \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

Exercice 3.11. (1) Montrer que l'aire de S^2 est 4π.

(2) Montrer qu'il existe des paramétrisations (U,f) et $(\tilde{U},\tilde{f})$ de S^2 tel que parallèles et méridiens soient orthogonaux vus dans U et $\tilde{U}$, avec de plus $\det(g_{ij}) = 1$ (projection de Peters) et $(\tilde{g}_{ij}) = \lambda(\cdot)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. (projection de Mercator). *Indication : On pourra partir des coordonnées sphériques.*

2 Courbures

Heuristique de la courbure : on déplace sur Σ un vecteur unitaire normal N et on regarde comment il tourne : on mesure N'. Sur une sphère, le vecteur normal tourne d'autant plus vite que le rayon est petit, confirmant l'intuition qu'une petite sphère est plus courbée qu'une grosse. Sur un plan, le vecteur normal est constant : le plan est de courbure nulle. Comme il y a plusieurs directions dans lesquelles déplacer N, l'objet que l'on récupère est plus compliqué qu'un nombre, c'est un endomorphisme.

2.1 Application de Gauss

On commence par munir Σ d'une normale unitaire "différentiable", qu'on appelle application de Gauss.

Définition 3.12. On appelle $N : \Sigma \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ une application de Gauss si pour tout $p \in \Sigma$, $N(p)$ est perpandiculaire à $T_p\Sigma$, et si $N \circ f : U \to \mathbb{R}^3$ est différentiable, lorsque (U,f) est une paramétrisation de Σ.

Il est clair que la condition de différentiabilité de dépend pas de (U,f). De plus il n'y a que 2 applications de Gauss possibles. En effet, notons

$$\nu(x) = \frac{\partial_u f \wedge \partial_v f}{\|\partial_u f \wedge \partial_v f\|}.$$

C'est en chaque point x un vecteur unitaire normal à $T_{f(x)}\Sigma$. Il est clair qu'en chaque $x \in U$, $N(f(x)) = \pm\nu(x)$. Un argument immédiat de continuité implique que $N \circ f = \nu$ ou $N \circ f = -\nu$, sur U. Alors $N = \nu \circ f^{-1}_{|\Sigma}$ ou $N = -\nu \circ f^{-1}_{|\Sigma}$.

Choisir une application de Gauss revient donc à choisir une paramétrisation (U, f) et à poser $N = \nu \circ f^{-1}$. On dit qu'on *oriente* la surface Σ. Une autre paramétrisation donne la même application de Gauss si la matrice jacobienne du changement de paramétrisation est de déterminant positif. En effet :

Lemme 3.13. Si $(\tilde{U}, \tilde{f})$ est une paramétrisation de Σ et $\tilde{f} = f \circ \varphi$, alors

$$\tilde{\nu}(x) = \varepsilon.\nu(\phi(x))$$

où $\varepsilon = \pm 1$ est le signe du déterminant de $J_x\varphi$.

`Preuve:` Notons $\varphi(u', v') = (u, v)$, $J_x\varphi = \begin{pmatrix} \partial_{u'} u & \partial_{v'} u \\ \partial_{u'} v & \partial_{v'} v \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Puisque $J_{(u',v')}\tilde{f} = J_{(u,v)} f J_{(u',v')}\phi$ on a $(\partial_{u'} \tilde{f}\ (\partial_{v'} \tilde{f}) = (\partial_u\ (\partial_v f) \begin{pmatrix} \partial_{u'} u & \partial_{v'} u \\ \partial_{u'} v & \partial_{v'} v \end{pmatrix}$ d'où au point x,

$$\begin{array}{rcl} \partial_{u'} \tilde{f}(x) & = & (a\partial_u f + c\partial_v f)(\phi(x)) \\ \partial_{v'} \tilde{f}(x) & = & (b\partial_u f + d\partial_v f)(\phi(x)) \end{array}$$

D'où en utilisant la bilinéarité et l'antisymétrie du produit vectoriel,

$$\partial_{u'} \tilde{f} \wedge \partial_{v'} \tilde{f} = (ad - bc)(\partial_u f \wedge \partial_v f) \circ \phi$$

□

Exemple 3.14. Sur S^2, $N = Id$ ou $N = -Id$. Sur le cylindre, paramétré par $f(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$, $\nu(u, v) = (\cos(u), \sin(u), 0)$.

2.2 Endomorphisme de Weingarten, seconde forme fondamentale

On veut maintenant dériver l'application de Gauss en un point $p \in \Sigma$ dans une direction $X \in T_p\Sigma$. Soit c une courbe lisse tracée sur Σ telle que $c(0) = p$ et $c'(0) = X$. On commet l'abus de notation d'écrire $N(t) = N \circ c(t)$. On définit

Définition 3.15. On appelle différentielle de l'application de Gauss, $d_pN : T_p\Sigma \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$d_pN.X = N'(0) \left(= \frac{d}{dt}_{|t=0} N \circ c(t) \right)$$

Vérifions que l'expression de dépend pas de la courbe c. On a $N \circ c(t) = \nu \circ f^{-1} \circ c$, donc

$$N'(0) = d_x\nu.(d_xf)^{-1}.c'(0)$$

ne dépend que de $c'(0) = X$. L'identité

$$d_pN = d_x\nu.(d_xf)^{-1} \tag{3.3}$$

montre que d_pN est linéaire.

On a de plus :

Proposition 3.16. La différentielle de l'application de Gauss d_pN est un endomorphisme $T_p\Sigma \to T_p\Sigma$, symétrique au sens que

$$I_p(d_pN.X, Y) = I_p(X, d_pN.Y)$$

pour tous $X, Y \in T_p\Sigma$.

`Preuve:` En dérivant l'égalité $\langle N(t), N(t)\rangle = 1$, il vient $\langle N'(0), N(0)\rangle = 0$ d'où $N'(0)$ est orthogonal à $N(0)$, donc dans $T_p\Sigma$. Il reste à voir la symétrie. ll suffit de la vérifier dans la base $\{\partial_u f, \partial_v f\}$ de $T_p\Sigma$. On a

$$\begin{array}{rcl} d_pN.\partial_u f &=& d_x\nu.(d_xf)^{-1}\partial_u f = \partial_u\nu \\ d_pN.\partial_v f &=& \partial_v\nu \end{array}$$

donc

$$\begin{array}{rcl} I_p(d_pN.\partial_u f, \partial_v f) &=& \langle \partial_u\nu, \partial_v f\rangle \\ &=& \dfrac{\partial}{\partial u}\langle \nu, \partial_v f\rangle - \langle \nu, \dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\rangle \\ &=& 0 - \langle \nu, \dfrac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\rangle \\ &=& I_p(\partial_u f, d_pN.\partial_v f) \end{array}$$

par les mêmes égalités. □

Définition 3.17. On appelle **endomorphisme de Weingarten** l'endomorphisme symétrique

$$W_p = -d_pN : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$$

et **seconde forme fondamentale** la forme bilinéaire symétrique sur $T_p\Sigma$:

$$II_p(X, Y) = I_p(W_pX, Y).$$

La seconde forme est symétrique, mais pas nécessairement définie et positive.

Exemple 3.18. Sur la sphère, puisque $\nu(x) = \pm x$, $d_x\nu = \pm Id$.
Sur le cylindre

$$J\nu = \begin{pmatrix} -\sin(u) & 0 \\ \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (\partial_u\nu\partial_v\nu)$$

$\partial_u f = \begin{pmatrix} -\sin(u) \\ \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\partial_v f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a donc

$$\begin{aligned} d_pN.\partial_u f &= \partial_u\nu = \partial_u f \\ d_pN.\partial_v f &= \partial_v\nu = 0 \end{aligned}$$

La matrice de $W_p = -d_pN$ dans la base $\{\partial_u f, \partial_v f\}$ est donc $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donnons une interprétation géométrique du nombre $\Pi_p(X, X)$.

Proposition 3.19. Soit c une courbe tracée sur Σ, notons $X = c'$. Alors

$$\langle c'', N\rangle = II_p(X, X).$$

Autrement dit $II_p(X, X)$ est la composante normale de l'accélération de c.

`Preuve:` Puisque c est tracée sur Σ, $\langle c', N \circ c\rangle = 0$ en tout point. En dérivant :

$$\langle c'', N\rangle + \langle c', d_pN.c'\rangle = 0.$$

□

Si on décompose l'accélération c'' en sa composante normale (colinéaire à N) et sa composante tangencielle dans $T\Sigma$, on a

$$\begin{aligned} c'' &= \langle c'', N\rangle + c''_T \\ &= II_p(X, X) + c''_T \end{aligned} \tag{3.4}$$

Il y a là un fait remarquable : la composante normale de l'accéleration de dépend pas de c mais uniquement de $X = c'(0)$, elle est imposée par la surface. On note souvent $K_N = II_p(X, X)$ la *courbure normale* de c en p. Toute courbe de Σ passant par p à la vitesse X a la même courbure normale K_N. Si c est paramétrée par longueur d'arc, sa courbure usuelle est $K = \|c''(s)\|$. La décomposition ci-dessus montre que $K^2 \geq K_N^2$. On peut voir K_N comme une courbure minimale imposée par Σ à toute courbe de vitesse X restant sur Σ, ést-à-dire qu'on a $K \geq |K_N|$..

On peut se demander s'il existe toujours sur Σ, des courbes de "courbure minimale", c'est-à-dire donc l'accélération tangencielle c''_T est identiquement nulle. On verra que oui. Ces courbes s'appelent des *géodésiques* et jouent un rôle très important en géométrie. Ce sont exactement les courbes localement minimisantes pour la longueur.

Exercice 3.20. Vérifier que les grands cercles de la sphère sont des géodésiques.

Le signe $II_p(X,X)$ renseigne également sur la position de c par rapport au plan tangent. Un développement limité et (3.4) donne

$$c(t) = c(0) + tc'(0) + \frac{t^2}{2}c''_T(0) + \frac{t^2}{2}II_p(X,X) + o(t^2)$$

donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que la restriction de c à $]-\varepsilon,\varepsilon[$ est dans le demi-espace délimité par $p + T_p\Sigma$, du coté de $N(p)$ si $II_p(X,X) > 0$ et de $-N(p)$ si $II_p(X,X) < 0$. On ne peut rien dire si $II_p(X,X) = 0$.

On peut définir à partir de $W_p = -d_pN$ plusieurs notions de courbure :

Définition 3.21.
(1) Les valeurs propres de W_p sont appelées les **courbures principales** et sont notées κ_1, κ_2. Les directions propres sont appelées **directions principales**
(2) Le déterminant $K = \det(W) = \kappa_1\kappa_2$ est appelée **courbure de Gauss**.
(3) La moyenne $H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(W) = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ est appelée **courbure moyenne**.

Remarque 3.22.
(1) On peut montrer que les courbures principales sont le minimum et le maximum de la courbure normale $II_p(X,X)$ sous la contrainte $\|X\| = 1$. Les directions propres sont orthogonales.
(2) Le signe de κ_1 et de κ_2 dépend de l'orientation choisie pour N, mais pas leur produit K.

Exemple 3.23. La sphère est de courbures principales $\kappa_1 = \kappa_2$ égales en tout point (à ± 1), donc de courbure de Gauss $+1$.
Le cyclindre est de courbure principales 0 et ± 1, donc de courbure de Gauss nulle.

2.3 Expression en coordonées locales

En utilisant comme base $\{\partial_u f, \partial_v f\}$, on associe à la première forme fondamentale, à la seconde forme et à l'endomorphisme de Weingarten trois matrices, reliées par la formule suivante :

$$\big(II_p\big) = \big(I_p\big)\,\big(W_p\big)$$

En effet notons H la matrice $\big(II_p\big)$, $G = \big(I_p\big)$ et $M = \big(W\big)$. Etant donnés $x, y \in T_p\Sigma$, notons X, Y leurs coordonnées dans la base $\{\partial_u f, \partial_v f\}$. On a alors

$$II_p(x,y) = {}^tXHY = I_p(Wx,y) = {}^t(MX)GY = {}^tX{}^tMGY$$

d'òu par identification $H = {}^tMG$. Comme la matrice H est symétrique, elle est égale à sa transposée, d'où $H = {}^tH = {}^t({}^tMG) = {}^tGM = GM$ puisque G est symétrique.

Observons que M n'est pas de même nature que G et H, c'est la matrice d'un endomorphisme, elle n'est pas nécessairement symétrique Ainsi si
$W.\partial_u f = -d_pN.\partial_u f = -\frac{\partial}{\partial u}(N \circ f) = -\frac{\partial}{\partial u}\nu = a\partial_u f + b\partial_v f$ et
$W.\partial_v f = -d_pN.\partial_v f = -\frac{\partial}{\partial v}(N \circ f) = -\frac{\partial}{\partial v}\nu = c\partial_u f + d\partial_v f$
on a $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et pas de raison que $b = c$.

Les coefficients de $(II_p) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ se calculent, en notant $(u_1, u_2) = (u, v)$, par les formules suivantes :

$$\boxed{II_p(\partial_{u_i} f, \partial_{u_j} f) = \langle -d_pN.\partial_{u_i} f, \partial_{u_j} f\rangle = \langle -\partial_{u_i}\nu, \partial_{u_j} f\rangle = \langle \nu, \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}\rangle. \qquad (3.5)}$$

Le terme de droite ne fait plus intervenir les dérivées de ν. On peut faire disparaître ν complètement en utilisant $\langle x \wedge y, z\rangle = \det(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\|\partial_u f \wedge \partial_v f\|} \det\left(\partial_u f, \partial_v f, \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right) \\ B &= \frac{1}{\|\partial_u f \wedge \partial_v f\|} \det\left(\partial_u f, \partial_v f, \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\right) \\ C &= \frac{1}{\|\partial_u f \wedge \partial_v f\|} \det\left(\partial_u f, \partial_v f, \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) \end{aligned}$$

Finalement, si $(I_p) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, sa matrice inverse est

$$(I_p)^{-1} = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

On en déduit que $(W) = (I_p)^{-1}(II_p) = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} AG - FB & GB - FC \\ -FA + EB & -FB + EC \end{pmatrix}$ et

Proposition 3.24.

$$K = \det(W) = ad - bc = \frac{\det(II_p)}{\det(I_p)} = \frac{AC - B^2}{EG - F^2}$$

et

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(W) = \frac{1}{2}(a + d) = \frac{1}{2(EG - F^2)}(AG - 2BF + CE)$$

Le signe de la courbure de Gauss renseigne sur la position de Σ par rapport au plan (affine) tangent :

Proposition 3.25. (1) Supposons que $\Sigma = \{(u, v, h(u, v)) \mid (u, v) \in \Omega\}$, avec $0 \in \Sigma$ et $\nu(0, 0) = (0, 0, 1)$. Alors

$$II_0 = D^2h(0)$$

autrement dit, la seconde forme fondamentale est la Hessiènne de la fonction hauteur.

(2) Soit $p \in \Sigma$ tel que $K(p) > 0$, alors il existe un voisinage U de p tel que $(\Sigma \cap U) \cap (p + T_p\Sigma) = \{p\}$. Si $K(p) < 0$, pour tout voisinage U de p il existe des points de $U \cap \Sigma$ de part et d'autre de $p + T_p\Sigma$.

`Preuve:` (1) On peut paramétrer Σ par $f(u, v) = (u, v, h(u, v))$. Puisque $\nu(0) = (0, 0, 1)$, dans (3.5) le produit scalaire de ν avec $\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}$ se réduit à $\frac{\partial^2 h}{\partial u_i \partial u_j}$ d'où

$$(II_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \end{pmatrix} = D^2h(0, 0)$$

la matrice hessienne de h en $(0, 0)$.

(2) Ecrivons Σ au voisinage de p comme un graphe. Quitte à changer les axes de coordonnées, on peut supposer $p = 0$ et $\nu(0) = (0, 0, 1)$. On a alors une paramétrisation $f(u,) = (u, v, h(u, v)$ comme en (1). Comme $\partial_u f = (1, 0, \partial_u h)$ et $\partial_v f = (0, 1, \partial_v h)$ on a $\partial_u f \wedge \partial_v f = (-\partial_u h, -\partial_v, 1)$. Puisque $\nu(0) = (0, 0, 1)$ on en déduit que $d_0 h = 0$. Le développement limité donne alors

$$h(u, v) = p + (u, v) D^2h(0, 0) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + o(u^2 + v^2).$$

Si $K(p) > 0$, $D^2h(0, 0)$ est définie positive ou définie négative ; si $K(p) < 0$ elle a deux valeurs propres de signe opposé. D'où la position de Σ par rapport au plan tangent □

3 Géodésiques

Définition 3.26. Un arc paramétré (I, c) tracé sur Σ est une géodésique si $c'' \in T_{c(t)}\Sigma^{\perp}$ sur I.

Cela équivaut à $c'' = \langle c'', N \rangle N$, et aussi à la nullité de la composante tangentielle $c''_T = 0$.

Lemme 3.27. Une géodésique est paramétrée à vitesse constante.

Preuve :

$$\frac{d}{dt}\langle c', c'\rangle = 2\langle c'', c'\rangle = 0.$$

□

Il est clair que si $c : [-a, a] \to \Sigma$ est une géodésique telle que $c'(0) = X$, alors $t \mapsto c(kt)$ est une géodésique sur $]-\frac{a}{k}, \frac{a}{k}[$ de vecteur vitesse kX en $t = 0$. On va montrer que les géodésiques existent dans toutes les directions.

Théorème 3.28. Etant donné $p \in \Sigma$ et $X \in T_p\Sigma$, il existe une unique géodésique maximale (I, c) telle que $c(0) = p$ et $c'(0) = X$.

Preuve : Soit $x : I \to U$ un arc paramétré. Cherchons une condition différentielle pour que $c = f \circ x$ soit une géodésique. On a

$$(f \circ x)'(t) = d_{x(t)}f.x'(t)$$

puis

$$\begin{aligned}(f \circ x)''(t) &= D^2 f(x', x') + d_{x(t)}f.x''(t)\\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} x_i'(t)x_j'(t) + \sum_k \partial_k f.x_k''(t)\end{aligned}$$

où on note $x = (x_1, x_2)$ et $\partial_k f = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$. Ecrivons $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ dans la base $\{\partial_1 f, \partial_2 f, \nu\}$ (en utilisant (3.5)) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \sum_{k=1,2} \Gamma_{ij}^k(x)\partial_k f + II_p(\partial_i f, \partial_j f)\nu \tag{3.6}$$

Les coefficients Γ_{ij}^k sont appelés *symboles de Christoffel* (ce sont des fonctions). La composante tangentielle de c'' en $p = f(x(t))$ est donc

$$c_T'' = \sum_k \left(\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(x)\, x_i' x_j' + x_k''\right) \partial_k f.$$

On conclut que c est une géodésique si pour $k = 1$ et $k = 2$,

$$\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(x)\, x_i' x_j' + x_k'' = 0 \tag{3.7}$$

C'est une équation différentielle de la forme

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, \frac{dx}{dt})$$

où $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est lisse et on cherche $x : I \to \mathbb{R}^2$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz donne existence et unicité de solutions maximales étant fixés $x(0) = f^{-1}(p)$ et $x'(0) = (d_x f)^{-1}.X$. □

On peut en fait obtenir beaucoup plus. D'abord la dépendance continue des données initiales montre que tout $(x_0, x'_0) \in U \times \mathbb{R}^2$ admet un voisinage $V \times W$ et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $(x_1, x'_1) \in V \times W$, il existe une unique solution de (3.7), $x_{x_1,x'_1}(t)$ définie sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, de données initiales (x_1, x'_1). De plus l'application $\Phi : (t, x_1, x'_1) \mapsto x_{x_1,x'_1}(t)$ de $]-\varepsilon, \varepsilon[\times V \times W$ dans U est lisse. Considérons $x'_0 = 0$ et $W \supset B(0, \delta)$. Si $\|x'_1\| = \delta$, la géodésique de vecteur $\lambda x'_1$ est définie sur $]\lambda\delta, \lambda\delta[$. On en déduit que Φ est définie sur $]-2, 2[\times V \times B(0, \frac{2}{\varepsilon}\delta)$. On définit en chaque $x_1 \in V$ une application $\exp_{x_1} : B(0, \frac{2}{\varepsilon}\delta) \to U$ par $\exp_{x_1}(v) = \Phi(1, x_1, v) = x_{x_1,v}(1)$ et une application $Exp : V \times B(0, \frac{2}{\varepsilon}\delta) \to V \times U$ par $Exp(x_1, v) = (x_1, \exp_{x_1}(v))$.

Lemme 3.29. L'application Exp est un difféomorphisme local au voisinage de $(x_0, 0)$.

`Preuve:` On calcule la différentielle de l'application. La dérivée par rapport à la première variable est clairement l'identité. Pour la seconde variable, remarquons que $\exp_{x_0}(sv) = x_{x_0,sv}(1) = x_{x_0,v}(s)$. Autrement dit $s \mapsto \exp_{x_0}(sv)$ est la géodésique de vecteur initial v. La dérivée de Exp en $(x_0, 0)$ par rapport à la seconde variable dans une direction v est alors

$$\frac{d}{dr}_{|r=0} Exp(x_0, rv) = \frac{d}{dr}_{|r=0} \exp_{x_0}(rv) = v$$

On en déduit que la matrice jacobienne de Exp est de la forme $\begin{pmatrix} Id & 0 \\ * & Id \end{pmatrix}$ et on conclut avec le théorème d'inversion locale. □

Etant donné $p \in \Sigma$ et $X \in T_p\Sigma$ voisin de 0, on définit $\exp_p(X) = c_X(1)$ où c est la géodésique telle que $c(0) = p, c'(0) = X$. On déduit :

Corollaire 3.30. Pour tout $p \in \Sigma$, il existe un voisinage $\Omega \subset \Sigma$ de p et $\varepsilon > 0$ tel que

(1) Pour tout $q, q' \in \Sigma$, il existe un unique $X \in T_q\Sigma$ tel que $\|X\| < \varepsilon$ et $\exp_q(X) = q'$.

(2) Pour tout $q \in \Omega$, l'application $\exp_q : B(0, \varepsilon) \subset T_q\Sigma \to \Sigma$ est un difféomorphisme sur son image (au sens que $f^{-1} \circ \exp_q$ est un difféomorphisme).

Corollaire 3.31. Les géodésiques sont exactement les courbes localement minimisantes pour la longueur. En particulier une courbe lisse par morceaux globalement minimisante est géodésique et donc lisse.

`Preuve:` Montrons d'abord que les géodésiques minimisent la longueur localement et ceci de manière unique. Soit q, q' deux points que tel que le corollaire 3.30 s'applique. Soit $\{v_1, v_2\}$ une base orthonormée de $T_q\Sigma$. Considérons la paramétrisation locale

$$]0,\varepsilon[\times\mathbb{R}\to \exp_q(B(0,\varepsilon))\setminus\{q\}\subset\Sigma$$

définie par

$$f(r,\theta)=\exp_q(r(\cos(\theta)v_1+\sin(\theta)v_2))$$

(qu'on appelle *coordonnées géodésiques polaires*). Les segments horizontaux $]0,\varepsilon[\times\{\theta_0\}$ sont envoyés exactement sur les géodésiques issues de q. Pour justifier que $r\mapsto\exp_q(rv)$ est l'unique courbe de longueur minimale entre q et $\exp_q(\varepsilon v)$, il suffit de montrer que la première forme fondamentale s'écrit $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & h(r,\theta)\end{pmatrix}$ (cf. remarque 3.7). Notons $v(\theta)=\cos(\theta)v_1+\sin(\theta)v_2$, alors $f(r,\theta)=c_v(r)$ est une géodésique et puisqu'une géodésique est paramétrée à vitesse constante,

$$\langle\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial r}\rangle=\langle c_v'(r),c_v'(r)\rangle=\langle c_v'(0),c_v'(0)=\|v\|^2=1.$$

Pour estimer $\langle\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial\theta}\rangle$, commençons par estimer sa dérivée :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\langle\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial\theta}\rangle &= \langle\frac{\partial^2 f}{\partial r^2},\frac{\partial f}{\partial\theta}\rangle+\langle\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\rangle\\ &= \langle c_v''(r),\frac{\partial f}{\partial\theta}\rangle+\langle\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial r}\rangle\\ &= 0+\frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\langle\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial r}\rangle\end{aligned}$$

puisque c_v'' est perpandiculaire à $T_{c_v(r)}\Sigma\ni\frac{\partial f}{\partial\theta}$. Maintenant on a vu $\langle\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial r}\rangle=\langle c_v'(r),c_v'(r)\rangle=\|v\|=1$ pour tout θ donc la dérivée restante est nulle. Il s'ensuit que $\langle\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial\theta}\rangle$ est constant par rapport à r. Lorsque $r\to 0$, $\frac{\partial f}{\partial r}=c_v'(r)$ tend vers v. D'autre part, si on pose $w=-\sin(\theta)v_1+\cos(\theta)v_2=v'(\theta)$, alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial\theta} &= \frac{d}{d\theta}(exp_q(rv))=d_{rv}exp_q(rv'(\theta))\\ &= d_{rv}exp_q(rw)\\ &\to 0\end{aligned}$$

quand $r\to 0$, d'où $\langle\frac{\partial f}{\partial r},\frac{\partial f}{\partial\theta}\rangle=0$. Ceci montre que $(g_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & g_{22}\end{pmatrix}$.

La conclusion du corollaire est maintenant facile. Si γ est une courbe minimisante sur Σ, deux points quelconques de γ assez proches sont joints par une unique géodésique courte, qui nécessairement coincide avec γ. □

Remarque 3.32. L'argument ci-dessus s'appelle le lemme de Gauss. Si on munit Σ de la distance définie par l'infimum des longueurs des courbes (c'est une distance), l'argument montre en particulier que $\exp_q(B(0,\varepsilon)=B(q,\varepsilon)\subset\Sigma$. Les sphères $S(0,\varepsilon)\subset T_p\Sigma$ sont envoyées sur les sphères $S(q,\varepsilon)$ et les rayons géodésiques issus de g sont orthogonaux aux sphères $S(q,\varepsilon)$.
Il ne résoud pas le problème de trouver une géodésique entre 2 points quelconques de Σ. Il faut ajouter des hypothèses. Sur $\mathbb{R}^2\times\{0\}\setminus\{0\}$, $(1,0)$ et $(-1,0)$ ne sont pas joints par une géodésique. Si Σ est compacte (et connexe), on peut montrer que 2 points quelconques sont joints par une géodésique minimisante.

4 Le "Theorema Egregium"

Il s'agit du "théorème remarquable" de Gauss :

Théorème 3.33 (Theorema Egregium)**.** La courbure de Gauss est invariante par isométrie locale

Il s'agit ici d'une isométrie $\Sigma \to \Sigma'$ (pas une isométrie de $\mathbb{R}^3$) qui ne préserve à priori que les longueurs des surfaces et donc la distance définie par l'infimum des longueurs. D'une certaine manière, le théorème dit que la courbure de Gauss est déterminée par les longueurs. De fait nous allons montrer que la courbure de Gauss peut-être calculée à partir de la première forme fondamentale et de ses dérivées à l'ordre ≤ 2, sans recours à la seconde forme fondamentale. On le fait dans le cas particulier des coordonnées géodésiques polaires, où la formule est particulièrement simple

Lemme 3.34. Soit $f(r,\theta) : U \to \Sigma$ des coordonnées géodésiques polaires autour d'un point $p \in \Sigma$, $ds^2 = dr^2 + J^2(r,\theta)d\theta^2$ l'expression de la première forme fondamentale dans ces coordonnées. Alors

$$K = -\frac{J''}{J}$$

où $J'' = \frac{\partial^2 J}{\partial r^2}$.

(une formule générale existe pour des coordonnées quelconques, en fonction de E, F, G et de leurs dérivées à l'ordre ≤ 2).

Démontrons le lemme.

`Preuve:` Commençons par écrire les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}$ (où $(u_1, u_2) = (r, \theta)$) dans la base $\{\partial_r f, \partial_\theta f, \nu\}$. Pour plus de lisibilité, on note $\partial^2_{ij} f = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}$ et on s'autorise à écrire $r = 1$ et $\theta = 2$. Rappelons que $\left(II_p\right) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ et $\left(W_p\right) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned}
\partial^2_{rr} f &= \Gamma^1_{11}\partial_r f + \Gamma^2_{11}\partial_\theta f + A\nu && (3.8)\\
\partial^2_{r\theta} f &= \Gamma^1_{12}\partial_r f + \Gamma^2_{12}\partial_\theta f + B\nu && (3.9)\\
\partial^2_{\theta\theta} f &= \Gamma^1_{22}\partial_r f + \Gamma^2_{22}\partial_\theta f + C\nu && (3.10)\\
-\partial_r \nu &= a\partial_r f + b\partial_\theta f && (3.11)\\
-\partial_\theta \nu &= c\partial_r f + d\partial_\theta f && (3.12)
\end{aligned}$$

La base $(\partial_r f, \partial_\theta f, \overrightarrow{u})$ est orthogonale et $r \mapsto f(r,\theta)$ est une géodésique. Cela permet de simplifier (3.8),(3.9). Montrons que (3.8) se réduit à

$$\partial^2_{rr} f = A\nu \quad (3.13)$$

En dérivant $1 = \langle \partial_r f, \partial_r f\rangle$ par rapport à r on a $\langle \partial^2_{rr} f, \partial_r f\rangle = 0$. En dérivant en θ on a $\langle \partial^2_{\theta r} f, \partial_r f\rangle = 0$. En dérivant alors $0 = \langle \partial_r f, \partial_\theta f\rangle$, on a $0 = \langle \partial^2_{rr} f, \partial_\theta f\rangle + \langle \partial_r f, \partial_{r\theta} f\rangle = \langle \partial^2_{rr} f, \partial_\theta f\rangle$. On aurait aussi pu dire que $\partial^2_{rr} f = c''$, où $c(r) = f(r,\theta)$ est une géodésique.

Montrons que (3.9) se réduit elle à

$$\partial^2_{r\theta} f = \frac{J'}{J}\partial_\theta f + B\nu \tag{3.14}$$

La nullité de Γ^1_{12} vient de $\langle \partial^2_{\theta r} f, \partial_r f\rangle = 0$. Le coefficient de $\partial_\theta f$ vient de

$$2JJ' = \frac{\partial}{\partial r}\langle \partial_\theta f, \partial_\theta f\rangle = 2\langle \partial^2_{r\theta} f, \partial_\theta f\rangle = 2\Gamma^2_{12}\langle \partial_\theta f, \partial_\theta f\rangle = 2\Gamma^2_{12} J^2$$

On utilise maintenant l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\partial^2_{rr} f\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\partial^2_{r\theta} f\right) = 0$$

dont laquelle on injecte (3.13) et (3.14) :

$$0 = (\partial_\theta A)\nu + A\partial_\theta \nu - \left[(\frac{J''}{J} - \frac{J'^2}{J^2})\partial_\theta f + \frac{J'}{J}\partial^2_{r\theta} f + (\partial_r B)\nu + B\partial_r \nu \right]$$

Injectons à nouveau (3.14), mais aussi (3.11) et (3.12) :

$$0 = (\partial_\theta A)\nu - A(c\partial_r f + d\partial_\theta f) - \left[(\frac{J''}{J} - \frac{J'^2}{J^2})\partial_\theta f + \frac{J'}{J}\left(\frac{J'}{J}\partial_\theta f + B\nu\right) + (\partial_r B)\nu - B(a\partial_r f + b\partial_\theta f) \right]$$

Regroupons :

$$0 = (-Ac + Ba)\,\partial_r f + \left(-Ad - \frac{J''}{J} + Bb\right)\partial_\theta f + \left(\partial_\theta A - \frac{J'}{J}B - \partial_r B\right)\nu$$

En particulier la nullité du deuxième coefficient donne, en utilisant $\left(II_p\right) = \left(I_p\right)\left(W_p\right)$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ J^2 b & J^2 d \end{pmatrix},$$

que

$$-\frac{J''}{J} = Ad - Bb = ad - cb = \det(W) = K$$

$\square$

La preuve du théorème est maintenant immédiate. Soit $\varphi : \Sigma \to \Sigma'$ une isométrie. On peut supposer que ϕ est différentiable et que $\varphi^* I_{\Sigma'} = I_\Sigma$. Alors l'expression de la première forme fondamentale de Σ' via $\varphi \circ f$ (autour de $\phi(p)$) est exactement celle de Σ via f autour de p. Il s'ensuit que $K(p) = \lim_{r\to 0} \frac{J''(r,\theta)}{J(r,\theta})) = K(\varphi(p))$.

La relation entre courbure de Gauss et longueur est encore plus claire dans le résultat suivant :

Corollaire 3.35. Soit $p \in \Sigma$, $C(p, \varepsilon)$ le cercle de Σ de centre p et de rayon $\varepsilon > 0$, alors

$$L(C(p,\varepsilon)) = 2\pi\varepsilon \left(1 - K(p)\frac{\varepsilon^2}{6} + o(\varepsilon^2)\right).$$

On voit que la courbure mesure le défaut d'euclidianité des petits cercles.

`Preuve:` Soit $\{v_1, v_2\}$ une base orthonormée de $T_p\Sigma$ et $v(\theta) = \cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2$. Posons $w(\theta) = -\sin(\theta)v_1 + \cos(\theta)v_2 = v'(\theta)$. Soit $f(r, \theta) = \exp_p(rv)$. On voit que

$$\partial_\theta f = d_{rv}exp_p(\frac{d}{d\theta}rv) = d_{rv}exp_p(rw) = rw + o(r)$$

puisque $d_0exp_p = Id$. Il s'ensuit que $J(r,\theta) = r + o(r)$ et $J'(r,\theta) = 1 + o(1)$. On prolonge en 0 en $J(0) = 0$ et $J'(0) = 1$. Puisque $J'' = -KJ$, on $J''' = -K'J - KJ'$ et on prolonge en 0 en $J'''(0) = -K(p)$. Le développement limité donne alors

$$J(r) = r - K(p)\frac{r^3}{6} + o(r^3)$$

En intégrant θ de 0 à 2π,

$$L(C(p,\varepsilon)) = \int_0^{2\pi} \|\partial_\theta f(\varepsilon,\theta)\| d\theta = \int_0^{2\pi} J(\varepsilon,\theta)d\theta = 2\pi\left(\varepsilon - K(p)\frac{\varepsilon^3}{6} + o(\varepsilon^3)\right).$$

□

Géométrie intrinsèque vs géométrie extrinsèque La courbure de Gauss est une quantité issue de la géométrie "interne à la surface", on dit que c'est une quantité *intrinsèque*. Elle ne dépend pas de comment la surface est pliée dans l'espace, du moment que le plongement soit localement isométrique. Ainsi un cylindre étant localement isométrique à un plan, ils ont même courbure de Gauss, identiquement nulle. A contrario les courbures principales dépendent du plongement, ont dit que ce sont des quantités *extrinsèques*. le cylindre est localement isométrique à un plan mais admet une courbure principale non nulle.

Chapitre 4 : Formes différentielles

1 Préliminaires algébriques

1.1 Tenseurs

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et $k \in \mathbb{N}^*$.

Définition 4.1. On appelle k-tenseur une application $L : E^k \to \mathbb{R}$ k-linéaire, c'est-à-dire linéaire en chaque variable :

$$L(v_1, \ldots, av_i + bw_i, \ldots, v_k) = aL(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + bL(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_k)$$

pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, v_j et w_i dans E. L'entier k est l'ordre du tenseur.

Par exemple un produit scalaire est un 2-tenseur, det : $(R^n)^n \to \mathbb{R}$ est un n-tenseur. Par convention un 0-tenseur est une constante. Un 1-tenseur est une forme linéaire. On note $\mathscr{L}^k(E)$, ou simplement $\mathscr{L}^k$, l'espace des k-tenseurs. C'est un espace vectoriel. On a $\mathscr{L}^0 = \mathbb{R}$, $\mathscr{L}^1 = E^*$.

Définition 4.2. (produit tensoriel) Soit $L \in \mathscr{L}^k(E)$ et $T \in \mathscr{L}^\ell(E)$. On définit un $k+\ell$-tenseur $L \otimes T \in \mathscr{L}^{k+\ell}(E)$, par

$$L \otimes T(v_1, \ldots, v_{k+\ell}) = L(v_1, \cdots, v_k)T(v_{k+1}, \ldots, v_{k+\ell}).$$

Proposition 4.3. Soit L, T et U des tenseurs sur E. On a les propriétés suivantes :
(1) (associativité). $L \otimes (T \otimes U) = (L \otimes T) \otimes U$
(2) (homogéneité). $(cL) \otimes T = c(L \otimes T) = L \otimes (cT)$

(3) (distributivité). Si L et T sont de même ordre,

$$\begin{aligned}(L+T)\otimes U &= L\otimes U + T\otimes U,\\ U\otimes(L+T) &= U\otimes L + U\otimes T\end{aligned}$$

(4) Si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E et $(e_1^*,\ldots,e_n^*)$ sa base duale (définie par $e_i^*(e_j)=\delta_i^j$) alors les

$$e_{i_1}^*\otimes e_{i_2}^*\otimes\ldots\otimes e_{i_k}^*,$$

lorsque $(i_1,\ldots,i_k)$ parcourt l'ensemble des k-uplets d'entiers de $\{1,\ldots,n\}$, forment une base de $\mathscr{L}^k(E)$, qui est donc d edimension n^k.

`Preuve:` Exercice. Pour (4), observer que $e_{i_1}^*\otimes\ldots\otimes e_{i_k}^*(v_1,\ldots,v_k)=e_{i_1}^*(v_1)\ldots e_{i_k}^*(v_k)$,

donc pour un k-uplet $(j_1,\ldots,j_k)$ d'entiers de $\{1,\ldots,n\}$ on a

$$e_{i_1}^*\otimes\ldots\otimes e_{i_k}^*(e_{j_1},\ldots,e_{j_k})=\begin{cases}1 & \text{si} \quad (i_1,\ldots,i_k)=(j_1,\ldots,j_k)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Ceci implique que la famille $\{e_{i_1}^*\otimes\ldots\otimes e_{i_k}^*\mid 1\le i_1,\ldots,i_k\le n\}$ est libre. En effet, supposons que $\sum_{1\le i_1,\ldots,i_k\le n}a_{i_1,\ldots,i_k}e_{i_1}^*\otimes\ldots\otimes e_{i_k}^*=0$ pour des coefficients réels $a_{i_1,\ldots,i_k}$. En évaluant ce tenseur sur $(e_{j_1},\ldots,e_{j_k})$ il ne reste que $a_{j_1,\ldots,j_k}=0$. La famille est génératrice car on a pour $L\in\mathscr{L}^k$

$$L(v_1,\ldots,v_k)=\sum_{1\le i_1,\ldots,i_k\le n}L(e_{i_1},\ldots,e_{i_k})e_{i_1}^*\otimes\ldots\otimes e_{i_k}^*(v_1,\ldots,v_k).$$

(remarquer que $v=\sum_{i=1}^n ne_i^*(v)e_i$) □

Par exemple $L\in\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^2)$ défini par $L(x,y)=x_1y_1+2x_1y_2+3x_2y_2$ s'écrit $L=e_{i_1}^*\otimes e_{i_2}^*+2e_{i_1}^*\otimes e_{i_2}^*+3e_{i_2}^*\otimes e_{i_2}^*$. L'opération $(L,T)\mapsto L\otimes T$ n'est pas symétrique.

1.2 Tenseurs alternés

Alterné = antisymétrique sur chaque paire d'indices : $T\in\mathscr{L}^k(E)$ est *alterné* si

$$T(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots,v_k)=-T(v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_i,\ldots,v_k)$$

pour tous $1\le i\ne j\le k$ et tout $v_\ell\in E$. Par exemple det est un n-tenseur alterné sur $E=\mathbb{R}^n$. L'ensemble des k-tenseurs alternés est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^k(E)$, qu'on note $\mathscr{A}^k(E)$. Par convention, $\mathscr{A}^0=\mathbb{R}$ et $\mathscr{A}^1=\mathscr{L}^1=E^*$. On verra que $\dim(\mathscr{A}^n(E))=1$ si E a dimension n. Le déterminant est donc essentiellement le seul n-tenseur alterné.

On peut généraliser la formule au dessus à toute permutation de $\{1,\ldots,k\}$. On rappelle que :

Définition 4.4. Soit $k \geq 2$. Une permutation de $\{1, \ldots, k\}$ est une bijection de $\{1, \ldots, k\}$ dans lui-même, on note S_k leur ensemble. Si $\sigma, \tau \in S_k$, alors $\sigma \circ \tau$ et τ^{-1} aussi. S_k est une groupe, appelé groupe symétrique, de cardinal $k!$ On appelle $\sigma \in S_k$ une transposition si elle échange deux entiers $i \neq j$ et fixe les autres. Elle est élémentaire si elle échange i et $i+1$.

Lemme 4.5. Toute permutation est une composée de transpositions élémentaires

Se montre par récurrence descendante sur le nombre de points fixes dans $\{1, \ldots, k\}$. Il est facile (exercice) de décomposer une transposition qui échange i et j en $2(j-i)-1$ transpositions élémentaires, et un cycle de longueur i en $i-1$ transpositions élémentaires. Si $S_k \ni \sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_m$ où τ_i est élémentaire, on appelle *signature* de σ le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^m$ (on montre qu'il ne dépend pas de la décomposition). En particulier $\varepsilon(\sigma) = -1$ pour une transposition. On peut aussi calculer $\varepsilon(\sigma)$ comme $(-1)^\ell$ si $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_\ell$ où τ_i sont des transpositions, et encore $(-1)^d$ où d est le nombre d'inversions dans σ, c'est-à-dire le nombre de couples (i,j) où $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. On a $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ et $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

Définition 4.6. Soit T un k-tenseur et $\sigma \in S_k$, on définit le k-tenseur ${}^\sigma T$ par

$$ {}^\sigma T(v_1, \ldots, v_k) = T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) $$

Heuristiquement, ${}^\sigma T = T \circ \sigma$ (attention, cette formule n'a pas de sens). Formellement S_k agit sur $\mathscr{L}^k$. L'opération $T \mapsto {}^\sigma T$ est linéaire, et en fait un isomorphisme de $\mathscr{L}^k$. Observons que ${}^{(\sigma\alpha)}T = {}^\sigma({}^\alpha T)$. En effet

$$ \begin{aligned} {}^{(\sigma\alpha)}T(v_1, \ldots, v_k) &= T(v_{\sigma\circ\alpha(1)}, \ldots, v_{\sigma\circ\alpha(k)}) \\ &= T(w_{\alpha(1)}, \ldots, w_{\alpha(k)}) \quad \text{en posant } w_j = v_{\sigma(j)} \\ &= {}^\alpha T(w_1, \ldots, w_k) \\ &= {}^\alpha T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \\ &= {}^\sigma({}^\alpha T)(v_1, \ldots, v_k) \end{aligned} $$

On peut donc oublier les parenthèses et écrire ${}^{\sigma\alpha}T$. Avec ce formalisme, T est alterné ssi ${}^\tau T = -T$ pour toute transposition.

Remarque 4.7. Si $f_1, \ldots, f_k$ sont des formes linéaires, on a

$$ {}^\sigma(f_1 \otimes \ldots \otimes f_k) = f_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes f_{\sigma^{-1}(k)} $$

En effet, en posant $\sigma(i) = j_i$, soit $i = \sigma^{-1}(j_i)$, on a

$$\begin{aligned}
{}^{\sigma}(f_1 \otimes \ldots \otimes f_k)(v_1, \ldots, v_k) &= (f_1 \otimes \ldots \otimes f_k)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \\
&= f_1(v_{\sigma(1)}) \ldots f_k(v_{\sigma(k)}) \\
&= f_{\sigma^{-1}(j_1)}(v_{j_1}) \ldots f_{\sigma^{-1}(j_k)}(v_{j_k}) \\
&= f_{\sigma^{-1}(1)}(v_1) \ldots f_{\sigma^{-1}(k)}(v_k) \\
&= (f_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes f_{\sigma^{-1}(k)})(v_1, \ldots, v_k)
\end{aligned}$$

(en réordonnant par ordre croissant les j_i à la ligne 4).

Proposition 4.8. Soit T un k-tenseur sur E. Sont équivalents :

(1) T est alterné,

(2) ${}^{\sigma}T = \varepsilon(\sigma)T$ pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, k\}$,

(3) Pour tout $(v_1, \ldots, v_k)$ linéairement dépendants, on a

$$T(v_1, \ldots, v_k) = 0.$$

`Preuve:` (2) $\Rightarrow$ (1) est évident. Montrons (1) $\Rightarrow$ (2). Si $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_m$ on a ${}^{\tau_1 \ldots \tau_m}T = {}^{\tau_1}({}^{\tau_2}(\ldots({}^{\tau_m}T)\ldots)) = (-1)^m T = \varepsilon(\sigma)T$. Pour (2)$\Rightarrow$ (3) Montrons d'abord que $T(v_1, \ldots, v, \ldots, v, \ldots, v_k) = 0$ si $v \in E$ en position i et j. Soit τ la transposition qui échange i et j alors

$$-T(v_1, \ldots, v, \ldots, v, \ldots, v_k) = {}^{\tau}T(v_1, \ldots, v, \ldots, v, \ldots, v_k) = T(v_1, \ldots, v, \ldots, v, \ldots, v_k) = 0.$$

Supposons $v_i = \Sigma_{j \neq i} \lambda_j v_j$, alors

$$T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) = \Sigma_{j \neq i} \lambda_j T(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_k) = 0$$

puisque v_j apparaît 2 fois. Pour (3) $\Rightarrow$ (1), on a

$$\begin{aligned}
0 &= T(v_1, \ldots, x+y, \ldots, x+y, \ldots, v_k) \\
&= T(v_1, \ldots, x, \ldots, x, \ldots, v_k) + T(v_1, \ldots, x, \ldots, y, \ldots, v_k) + T(v_1, \ldots, y, \ldots, x, \ldots, v_k) \\
&+ T(v_1, \ldots, y, \ldots, y, \ldots, v_k) \\
&= T(v_1, \ldots, x, \ldots, y, \ldots, v_k) + T(v_1, \ldots, y, \ldots, x, \ldots, v_k)
\end{aligned}$$

□

on peut associer à tout k-tenseur un k-tenseur alterné, par un procédé analogue à l'associaction matrice $M \mapsto$ matrice antisymétrique $\frac{M - {}^tM}{2}$.

Définition 4.9. Soit T un k-tenseur, on définit un k-tenseur alterné $\mathrm{Alt}(T)$ par

$$\mathrm{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma)\, {}^{\sigma}T$$

L'application $\mathrm{Alt} : \mathscr{L}^k(E) \to \mathscr{A}^k(E)$ est linéaire et $\mathrm{Alt}(T) = T$ si T est alterné (on met le $\frac{1}{k!}$ pour cela).

En effet $\mathrm{Alt}(T)$ est alterné car pour toute transposition τ on a

$$\begin{aligned}
{}^{\tau}(\mathrm{Alt}T) &= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\varepsilon(\sigma)\ {}^{\tau}({}^{\sigma}T) \quad \text{par linéarité de l'action de } \tau \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\varepsilon(\sigma)\ {}^{\tau\sigma}T \\
&= -\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)\ {}^{\tau\sigma}T \\
&= -\frac{1}{k!}\sum_{\alpha\in S_k}\varepsilon(\alpha)\ {}^{\alpha}T = -\mathrm{Alt}(T)
\end{aligned}$$

où on a utilisé que $\sigma \mapsto \tau\sigma$ induit une bijection de S_k dans lui-même. Par ailleurs si T est alterné, $\varepsilon(\sigma)\ {}^{\sigma}T = \varepsilon(\sigma)^2\,T = T$ donc $\mathrm{Alt}(T) = T$.

Remarque 4.10. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}(f_1\otimes\ldots\otimes f_k) &= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma}\epsilon(\sigma)f_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes f_{\sigma^{-1}(k)} \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma}\epsilon(\sigma^{-1})f_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes f_{\sigma^{-1}(k)} \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma}\epsilon(\sigma)f_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes f_{\sigma(k)}
\end{aligned}$$

vu que $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de S_k dans lui-même.

Définition 4.11. (produit extérieur) Etant donné $L \in \mathscr{A}^k(E)$ et $T \in \mathscr{A}^\ell(E)$ on définit un $(k+\ell)$-tenseur alterné $L\wedge T \in \mathscr{A}^{k+\ell}(E)$ par

$$L\wedge T = \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}\mathrm{Alt}(L\otimes T) = \frac{1}{k!\ell!}\sum_{\sigma\in S_{k+\ell}}\varepsilon(\sigma)\ {}^{\sigma}(L\otimes T)$$

Remarque 4.12. On a par définition

$$L\wedge T(v_1,\ldots,v_{k+\ell}) = \frac{1}{k!\ell!}\sum_{\sigma\in S_{k+\ell}}\varepsilon(\sigma)L(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)})T(v_{\sigma(k+1)},\ldots,v_{\sigma(k+\ell)})$$

Les permutations $\sigma \in S_{k+\ell}$ qui permutent à l'intérieur de $\{1,\ldots,k\}$ et de $\{k+1,\ldots,k+\ell\}$ laissent invariantes l'expression $\varepsilon(\sigma)L(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)})T(v_{\sigma(k+1)},\ldots,v_{\sigma(k+\ell)})$ puisque L et T

sont alternés. Comme il y a $k!\ell!$ telles permutations, le terme $\frac{1}{k!\ell!}$ est introduit pour éviter une redondance. On explique plus loin une autre raison au $\frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}$, de normalisation.

Théorème 4.13. L'opération $\wedge$ a les propriétés suivantes :

(1) (associativité). $L \wedge (T \wedge U) = (L \wedge T) \wedge U$,

(2) (homogénéité). $(cL) \wedge T = c(L \wedge T) = L \wedge (cT)$,

(3) (distributivité). Si L et T sont de même ordre,

$$\begin{aligned} (L+T) \wedge U &= L \wedge U + T \wedge U, \\ U \wedge (L+T) &= U \wedge L + U \wedge T, \end{aligned}$$

(4) (antisymétrie) $L \wedge T = (-1)^{k\ell} T \wedge L$,

(5) Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale, alors les

$$e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^*,$$

lorsque $(i_1, \ldots, i_k)$ parcourt l'ensemble des k-uplets strictement croissants d'entiers de $\{1, \ldots, n\}$, forment une base de $\mathscr{A}^k(E)$, qui est donc de dimension $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(6) Si $f_1, \ldots, f_k$ sont des 1-tenseurs, on a

$$f_1 \wedge \ldots \wedge f_k = \sum_\sigma \epsilon(\sigma) f_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes f_{\sigma(k)}$$

`Preuve:` L'associativité est la propriété la moins facile à vérifier. On a besoin du

Lemme 4.14. (1) Soit L et T des tenseurs. Si $\mathrm{Alt}(L) = 0$ alors $\mathrm{Alt}(L \otimes T) = 0$.

(2)
$$\mathrm{Alt}(L \otimes T \otimes U) = \mathrm{Alt}\left(\mathrm{Alt}(L \otimes T) \otimes U\right) = \mathrm{Alt}\left(L \otimes \mathrm{Alt}(T \otimes U)\right)$$

(3) Si $L \in \mathscr{A}^k(E)$, $T \in \mathscr{A}^\ell(E)$ et $U \in \mathscr{A}^m(E)$, on a

$$(L \wedge T) \wedge U = \frac{(k+\ell+m)!}{k!\ell!m!} \mathrm{Alt}(L \otimes T \otimes U) = L \wedge (T \wedge U).$$

`Preuve:` (1) Fixons $\sigma \in S_{k+\ell}$ et considérons le terme

$$\varepsilon(\sigma) L(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)} \ldots, v_{\sigma(k+\ell)}).$$

Pour tous les $\alpha \in S_{k+\ell}$ tels que $(\alpha(k+1), \ldots, \alpha(k+\ell)) = (\sigma(k+1), \ldots, \sigma(k+\ell))$, le terme correspondant est

$$\varepsilon(\alpha) L(v_{\alpha(1)}, \ldots, v_{\alpha(k)}) T(v_{\sigma(k+1)} \ldots, v_{\sigma(k+\ell)}) \quad (*).$$

Notons $S(\sigma) \subset S_{k+\ell}$ l'ensemble de ces α. Ils sont de la forme

$$(1, \ldots, k+\ell) \mapsto (\sigma(\tau(1)), \ldots, \sigma(\tau(k)), \sigma(k+1), \ldots, \sigma(k+\ell))$$

où τ parcourt les permutations de $\{1,\ldots,k\}$. La somme lorsque $\alpha \in S(\sigma)$ des termes $(*)$ peut donc s'écrire

$$\varepsilon(\sigma)\left(\sum_{\tau\in S_k}\varepsilon(\tau)L(v_{\sigma(\tau(1))},\ldots,v_{\sigma(\tau(k))})\right)T(v_{\sigma(k+1)}\ldots,v_{\sigma(k+\ell)}).$$

La quantité entre parenthèses est $(k!)\mathrm{Alt}(L)(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)})=0$ par hypothèse. Comme on peut partionner $S_{k+\ell}$ en sous-ensembles de la forme $S(\sigma)$ cela termine la preuve de (1).

(2) Comme $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(L\otimes T)-L\otimes T)=0$, (1) donne

$$\mathrm{Alt}\left([\mathrm{Alt}(L\otimes T)-L\otimes T]\otimes U\right)=0=\mathrm{Alt}\left(\mathrm{Alt}(L\otimes T)\otimes U\right)-\mathrm{Alt}(L\otimes T\otimes U)$$

d'où $\mathrm{Alt}(L\otimes T\otimes U)=\mathrm{Alt}\left(\mathrm{Alt}(L\otimes T)\otimes U\right)$. On montre de même (avec $\mathrm{Alt}(L\otimes T)=0$ si $\mathrm{Alt}(T)=0$)) que $\mathrm{Alt}(L\otimes T\otimes U)=\mathrm{Alt}\left(L\otimes Alt(T\otimes U)\right)$.

(3)

$$\begin{aligned}(L\wedge T)\wedge U=\frac{(k+\ell+m)!}{(k+\ell)!m!}\mathrm{Alt}((L\wedge T)\otimes U) &= \frac{(k+\ell+m)!}{(k+\ell)!m!}\frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(L\otimes T)\otimes U)\\ &= \frac{(k+\ell+m)!}{k!\ell!m!}\mathrm{Alt}(L\otimes T\otimes U)\end{aligned}$$

en utilisant (2). L'autre égalité s'obtient de même, prouvant l'associativité. □

Les propriétés (2)(3) sont évidentes. Pour (4) soit π la permutation qui envoie $(1,\ldots,k+\ell)$ sur $(k+1,\ldots,k+\ell,1,\ldots,k)$. On a $\varepsilon(\pi)=(-1)^{k\ell}$ et ${}^{\pi}(L\otimes T)=T\otimes L$. En effet c'est l'application

$$(v_1,\ldots,v_{k+\ell})\mapsto L(v_{k+1},\ldots,v_{k+\ell})T(v_1,\ldots,v_k).$$

Alors

$$\begin{aligned}(k+\ell)!\mathrm{Alt}(T\otimes L) &= \sum_{\sigma\in S_{k+\ell}}\varepsilon(\sigma)\ {}^{\sigma}(T\otimes L)=\sum_{\sigma\in S_{k+\ell}}\varepsilon(\sigma)\ {}^{\sigma\pi}(L\otimes T)\\ &= \varepsilon(\pi)\sum_{\sigma\in S_{k+\ell}}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\pi)\ {}^{\sigma\pi}(L\otimes T)\\ &= (-1)^{k+\ell}\sum_{\alpha\in S_{k+\ell}}\varepsilon(\alpha)\ {}^{\alpha}(L\otimes T)=(-1)^{k+\ell}\mathrm{Alt}(L\otimes T)\end{aligned}$$

Puisque $\sigma\mapsto\sigma\pi$ est une bijection sur S_k. Pour (6) on a

> **Lemme 4.15.** Soit $L_1,\ldots,L_k$ des formes linéaires (i.e. des 1-tenseurs) alors
>
> $$L_1\wedge\ldots\wedge L_k=(k!)\mathrm{Alt}(L_1\otimes\ldots\otimes L_k)=\sum_{\sigma\in S_k}\epsilon(\sigma)L_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes L_{\sigma(k)}$$

`Preuve:` Par récurrence. C'est immédiat pour $k=1$. Supposons la formule vraie pour ℓ formes linéaires. On a par associativité

$$\begin{aligned}(L_1\wedge\ldots L_\ell)\wedge L_{\ell+1} &= \frac{(\ell+1)!}{\ell!1!}\ \mathrm{Alt}((L_1\wedge\ldots\wedge L_\ell)\otimes L_{\ell+1})\\ &= (\ell+1)\ell!\ \mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(L_1\otimes\ldots\otimes L_\ell)\otimes L_{\ell+1})\\ &= (\ell+1)!\ \mathrm{Alt}(L_1\otimes\ldots\otimes L_{\ell+1})\end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence à la ligne 2 et le lemme 4.14(2) en ligne 3. □
En particulier $\mathrm{Alt}(e^*_{i_1}\otimes\ldots\otimes e^*_{i_k}) = \frac{1}{k!}e^*_{i_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{i_k}$, donc les $e^*_{i_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{i_k}$ engendrent $\mathscr{A}^k = \mathrm{Alt}(\mathscr{L}^k)$ lorsque $(i_1,\ldots,i_k)$ parcourt tous les k-uplets d'entiers de $\{1,\ldots,k\}$. Il y en a trop. Si L et T sont des 1-tenseurs, il est évident que $L\wedge T = -T\wedge L$ et $L\wedge L = 0$, donc $e^*_{i_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{i_k}$ est nul si deux indices sont identiques (on peut permuter les e^*_i et e^*_j pour les rendre adjacents, en multipliant par -1 à chaque fois le tenseur) et plus généralement

$$e^*_{i_{\sigma(1)}}\wedge\ldots\wedge e^*_{i_{\sigma(k)}} = \varepsilon(\sigma)e^*_{i_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{i_k}$$

où $\sigma\in S_k$. Les $\{e^*_{i_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{i_k} \mid 1\le i_1<\ldots<i_k\le n\}$ sont donc encore une partie génératrice de $\mathscr{A}^k$. On montre que la famille est libre comme dans la proposition 4.3, en utilisant que pour deux k-uplets strictement croissants $(i_1,\ldots,i_k)$ et $(j_1,\ldots,j_k)$ de $\{1,\ldots,n\}$,

$$e^*_{i_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{i_k}(e_{j_1},\ldots,e_{j_k}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i_1,\ldots,i_k) = (j_1,\ldots,j_k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(appliquer le lemme 4.15 ; le coefficient de normalisation dans $\wedge$ sert ici). Pour (4) il suffit de voir que

$$e^*_{i_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{i_k}\wedge e^*_{j_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{j_k} = (-1)^{k\ell}e^*_{j_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{j_k}e^*_{i_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{i_k},$$

ce qu'on obtient en comptant les transpositions élémentaires échangeant $(i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_\ell)$ et $(j_1,\ldots,j_\ell,i_1,\ldots,i_k)$. □

Les considérations précédentes montrent

Proposition 4.16. Soit $L\in\mathscr{A}^k(E)$ alors

$$L = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} L(e_{i_1}\ldots,e_{i_k})e^*_{i_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{i_k}$$

`Preuve :` En effet comme tenseur il s'écrit $L = \sum_{1\le i_1,\ldots,i_k\le 1} L(e_{i_1},\ldots,i_k)e^*_{i_1}\otimes\ldots\otimes e^*_{i_k}$. Puisque L alterné et que $\mathrm{Alt}(e^*_{i_1}\otimes\ldots\otimes e^*_{i_k}) = \frac{1}{k!}e^*_{i_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{i_k}$ on a

$$\begin{aligned}
L = \mathrm{Alt}(L) &= \frac{1}{k!}\sum_{1\le i_1,\ldots,i_k\le n} L(e_{i_1},\ldots,e_{i_k})e^*_{i_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{i_k} \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\sum_{\sigma\in S_k} L(e_{i_{\sigma(1)}},\ldots,e_{i_{\sigma(k)}})e^*_{i_{\sigma(1)}}\wedge\ldots\wedge e^*_{i_{\sigma(k)}} \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\sum_{\sigma\in S_k} \varepsilon(\sigma)L(e_{i_1},\ldots,e_{i_k})\varepsilon(\sigma)e^*_{i_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{i_k} \\
&= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} L(e_{i_1}\ldots,e_{i_k})e^*_{i_1}\wedge\ldots\wedge e^*_{i_k}
\end{aligned}$$

□

et

Proposition 4.17. Soit $L_1, \ldots, L_k$ des formes linéaires, alors

$$\begin{aligned} L_1 \wedge \ldots \wedge L_k(v_1, \ldots, v_k) &= \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma)\, L_1(v_{\sigma(1)}) \ldots L_k(v_{\sigma(k)}) \\ &= \det(L_i(v_j)_{i,j}) \end{aligned}$$

Enfin

Corollaire 4.18. Si $k > n$ l'espace vectoriel $\mathscr{A}^k(E)$ est réduit à 0. Si $k \in \{1, \ldots, n\}$, La famille $\{e^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$ est une base de $\mathscr{A}^k(E)$ et $\dim(\mathscr{A}^k(E)) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

2 Formes différentielles

Définition 4.19. Une *forme différentielle d'ordre* k (ou k-forme différentielle) lisse sur un ouvert U de E est une application lisse de U dans $\mathscr{A}^k(E)$. L'espace vectoriel des k-formes différentielles est noté $\Omega^k(U)$.

On note que $\Omega^0(U) = \{\alpha : U \to \mathbb{R} \text{ lisse }\}$, c'est juste l'ensemble des fonctions réelles lisses. La différentielle d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ lisse est $df : U \to \mathscr{L}^1(E) = \mathscr{A}^1(E)$, $x \mapsto d_x f$, on a donc $df \in \Omega^1(U)$. Un exemple de 2-forme différentielle est $\alpha_{(x,y)} = x^2 e^*_1 \wedge e^*_2$.

Tout $\alpha \in \Omega^k(U)$ s'écrit, en $x \in U$,

$$\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \ldots i_k}(x)\, e^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{i_k}$$

où $x \mapsto \alpha_{i_1 \ldots i_k}(x)$ est lisse (c'est $\alpha_x(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$). Observons que la fonction $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$, que l'on notera x_i par abus de langage[1], vérifie $dx_i = e^*_i$ (exercice !!) On peut donc écrire

$$\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \ldots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

En particulier, pour la différentielle de $f : U \to \mathbb{R}$ on retrouve la formule bien connue

$$df = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

1. c'est le même abus de langage que de parler de la fonction $x^2 + x$, au lieu de $f : x \mapsto x^2 + x$

La définition du produit extérieur s'étend aux formes différentielles : si $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^\ell(U)$, on définit $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+\ell}(U)$ par $(\alpha \wedge \beta)_x = \alpha_x \wedge \beta_x$. On vérifie que les $(\alpha \wedge \beta)_{i_1 \ldots i_{k+\ell}}$ sont lisses comme combinaisons linéaires de $\alpha_{j_1 \ldots j_k}$ et de $\beta_{m_1,\ldots,m_\ell}$.

3 Différentielle extérieure

La différentielle usuelle vérifie $d(\Omega^0(U)) \subset \Omega^1(U)$. Cependant la différentielle usuelle, notons la plutôt D, d'une k-forme différentielle n'est pas une $(k+1)$-forme différentielle en général. En effet, si α est une k-forme différentielle, c'est une application lisse $\alpha : U \to \mathscr{A}(E^k, \mathbb{R}) \subset \mathscr{L}(E^k, \mathbb{R})$ et sa différentielle est $D\alpha : U \to \mathscr{L}(E, \mathscr{L}^k(E, \mathbb{R}))$ qu'on peut identifier à $\mathscr{L}(E^{k+1}, \mathbb{R})$. On peut donc voir $D\alpha(x) := D_x\alpha$ comme un $(k+1)$-tenseur, qui à $(v, v_1, \ldots, v_k)$ associe

$$D_x\alpha(v)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{d}{dt}\alpha_{x+tv}(v_1, \ldots, v_k).$$

Il est alterné en les k dernières variables $(v_1, \ldots, v_k)$ mais pas en $(v, v_1, \ldots, v_k)$ à priori. Grosso-modo, on obtient un tenseur alterné en composant D avec Alt. Précisément, on définit une différentielle, dite extérieure et notée d, $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ en posant $d = (k+1)\mathrm{Alt} \circ D$. Elle coincide avec la différentielle usuelle si $k = 0$. On note $\Omega(U)$ la somme directe des $\Omega^k(U)$, $\Omega(U) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U)$.

Théorème 4.20. Il existe une application linéaire $d : \Omega(U) \to \Omega(U)$ et une seule avec les propriétés suivantes :

(1) $d(\Omega^k(U)) \subset \Omega^{k+1}(U)$.

(2) La restriction de d à $\Omega^0(U)$ est la différentielle des fonctions.

(3) Si $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^\ell(U)$, alors $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$.

(4) $d \circ d = 0$.

`Preuve:` On montre d'abord l'unicité. Si $d \circ d = 0$ on a $d(dx_i) = 0$. En utilisant (3) et une récurrence on déduit que $d(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = 0$ pour tout $i_1, \ldots, i_k$ dans $\{1, \ldots, n\}$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est lisse on a

$$d(f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = df \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Si $\alpha \in \Omega^k(U)$ s'écrit

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \ldots i_k} \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

on a donc par linéarité de d,

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} d\alpha_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}. \qquad (*)$$

où $d\alpha_{i_1 \ldots i_k}$ est la différentielle usuelle d'après (2). En fait on pourrait définir $d\alpha$ par $(*)$. Cette formule coincide avec la définition donnée plus haut. En effet puisque $dx_i = e_i^*$ est constant on a

$$D(f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = Df \otimes (dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = df \otimes (dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})$$

En composant avec $(k+1)\mathrm{Alt}$ (et notant que $k+1 = \frac{(k+1)!}{k!1!}$) on trouve par définition du produit extérieur (cf définition 4.11)

$$(k+1)\mathrm{Alt} \circ D(f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = df \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

et l'égalité pour $d\alpha$ en découle par linéarité. Pour montrer (3) il suffit de considérer le cas où

$$\alpha = f\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \quad \text{et} \quad \beta = g\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_\ell}$$

On a

$$\begin{aligned}
d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_\ell} \\
&= (f\, dg + g\, df) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_\ell} \\
d\alpha \wedge \beta &= g\, df \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_\ell} \\
\alpha \wedge d\beta &= f\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dg \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_\ell} \\
&= (-1)^k f dg \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_\ell}
\end{aligned}$$

Pour $d \circ d = 0$ on commence par les fonctions. Puisque $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$, on a d'après $(*)$

$$d(df) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) dx_j \wedge dx_i = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_i = 0$$

d'après le lemme de Schwarz. En particulier $d(dx_i) = 0$ et $d(d\alpha_{i_1 \ldots i_k}) = 0$, donc pour α une k-forme

$$d(d\alpha) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} d(d\alpha_{i_1 \ldots i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = 0$$

en utilisant (3). On aurait pu aussi raisonner directement à partir de $d \circ d = (k+2)(k+1)\mathrm{Alt} \circ D^2$, en montrant que $D^2\alpha$ est un $(k+2)$-tenseur symétrique en les 2 premières variables, puis que $\mathrm{Alt}(T) = 0$ pour tout tenseur T admettant une symétrie par rapport à 2 variables. □

Par exemple si U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $\alpha = Adx + Bdy + Cdz$, alors

$$d\alpha = \left(-\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(-\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial C}{\partial x} \right) dx \wedge dz + \left(-\frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial C}{\partial y} \right) dy \wedge dz$$

Si $\beta = P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dy \wedge dz$ alors

$$d\beta = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Définition 4.21. Si $d\alpha = 0$, on dit que α est fermée. Si $\alpha = d\beta$, on dit que α est exacte. On convient qu'une 0-forme est exacte si elle constante.

Il s'ensuit que $d \circ d = 0$ s'exprime par : une forme exacte est fermée. La réciproque est fausse en général : on verra que $\alpha = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$ est fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mais n'est pas exacte (exercice : elle est fermée).

4 Le lemme de Poincaré

Définition 4.22. On dit qu'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est étoilé s'il existe $a \in U$ tel que pour tout $x \in U$ le segment $[a, x]$ est contenu dans U.

Théorème 4.23 (lemme de Poincaré)**.** Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est étoilé, toute forme fermée sur U est exacte.

`Preuve:` Si α est une 0-forme fermée, c'est une fonction dont la différentielle est nulle, elle est donc constante sur U connexe, donc exacte. Considérons le cas d'une 1-forme $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \, dx_i$. On cherche une fonction f telle que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. L'hypothèse que α est fermée se traduit, en considérant le coefficient $\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}\right)$ de $\mathbf{dx_j} \wedge \mathbf{dx_i}$ (où $j < i$) par

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}$$

Pour simplifier supposons U étoilé par rapport à l'origine. Si $\alpha = df$ on a

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \int_0^1 d_{tx} f(x) \, dt = \int_0^1 \alpha_{tx}(x) \, dt = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \alpha_i(tx) x_i \, dt$$

A une constante près on n'a pas le choix pour f donc on pose

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \alpha_i(tx) \, dt$$

Vérifions que $df = \alpha$.

En dérivant sous le signe somme

$$\begin{aligned}
df &= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 \alpha_i(tx)\,dt\right)dx_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}(tx)\,dt\right)dx_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 \alpha_i(tx)\,dt\right)dx_i + \sum_{i,j}\left(\int_0^1 t\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}(tx)x_i\,dt\right)dx_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 \alpha_i(tx)\,dt\right)dx_i + \sum_{i,j}\left(\int_0^1 t\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}(tx)x_i\,dt\right)dx_j \quad (\text{en utilisant}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j} = \frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 \alpha_i(tx) + \sum_{\mathbf{j}} t\frac{\partial\alpha_{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{x_j}}(tx)x_j\,dt\right)dx_i \text{ (en permuttant encore i et j à droite)} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_0^1 \frac{d}{dt}(t\alpha_i(tx))\,dt\,dx_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\,dx_i = \alpha
\end{aligned}$$

Pour une $k+1$-forme on peut procéder semblablement par intégration. Si $\alpha \in \Omega^{k+1}(U)$ on définit $I(\alpha) \in \Omega^k(U)$ par

$$I(\alpha)_x(v_1, \ldots, v_k) = \int_0^1 t^k \alpha_{tx}(x, v_1, \ldots, v_k)\,dt$$

On peut montrer[2] que $d(I(\alpha)) + I(d\alpha) = \alpha$ ce qui donne le résultat voulu lorsque $d\alpha = 0$ ($d(I(\alpha)) = \alpha$). □

5 Effet d'applications lisses

Définition 4.24. Soit U et V des ouverts d'espace vectoriels et $f : U \to V$ lisse. L'image réciproque (ou tiré en arrière) de $\alpha \in \Omega^k(V)$ par f, notée $f^*\alpha$, est la k-forme sur U définie par

$$(f^*\alpha)_x(u_1, \ldots, u_k) = \alpha_{f(x)}(d_x f(u_1), \ldots, d_x f(u_k))$$

On a utilisé le même procédé dans le chapitre 3 pour définir l'expression de la première forme fondamentale en coordonnées : $g_a = f^* I_{f(a)}$. La seule différence est que les tenseurs étaient symétriques plutôt qu'alternés.

Notons $(y_1, \ldots, y_m)$ les coordonnées dans V et $f = (f_1, \ldots, f_m)$. On a $dy_i(d_x f(u)) = d_x f_i(u)$.

2. Voir Spivak, *Calculus on manifolds* p94

Alors

$$\begin{aligned} dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}(d_xf(u_1), \ldots, d_xf(u_k)) &= \frac{1}{k!}\sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\, dy_{i_{\sigma(1)}}(d_xf(u_1)) \ldots dy_{i_{\sigma(k)}}(d_xf(u_k)) \\ &= \frac{1}{k!}\sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\, d_xf_{i_{\sigma(1)}}(u_1) \ldots d_xf_{i_{\sigma(k)}}(u_k) \\ &= d_xf_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_xf_{i_k}(u_1, \ldots, u_k) \end{aligned}$$

d'où si $\alpha = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}\, dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}$,

$$(f^*\alpha)_x = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(f(x))\, d_xf_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_xf_{i_k}$$

Par exemple si $U = V = \mathbb{R}^2$ et $f(x_1, x_2) = (x_1\cos(x_2), x_1\sin(x_2))$, on a

$$f^*(dy_1 \wedge dy_2) = (\cos(x_2)dx_1 - x_1\sin(x_2)dx_2) \wedge (\sin(x_2)dx_1 + x_1\cos(x_2)dx_2) = x_1\, dx_1 \wedge dx_2$$

Si $U = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^*$ et $f(t) = e^t$, alors

$$f^*(\frac{dy}{y}) = \frac{1}{f(t)}df(t) = dt.$$

Lorsque U et V sont des ouverts de même dimension n on a (exercice)

$$f^*(dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n) = \det(Df)\,(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)$$

Proposition 4.25. Soit $f : U \to V$ lisse.

(1) Pour $\alpha, \beta \in \Omega^k(V)$, on a
$$f^*(\alpha + \beta) = f^*\alpha + f^*\beta.$$

(2) Si $\alpha \in \Omega^k(V)$ et $\beta \in \Omega^\ell(V)$, on a
$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta).$$

(3) Si $g : V \to W$ est lisse et $\alpha \in \Omega^k(W)$, on a
$$(g \circ f)^*\alpha = f^*(g^*\alpha).$$

`Preuve:` (1) est évident. Pour (2) considérer $\alpha = a\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ et $\beta = b\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_\ell}$. Montrons (3) :

$$\begin{aligned} ((g \circ f)^*\alpha)_x(u_1, \ldots, u_k) &= \alpha_{g(f(x))}\,(d_x(g \circ f)(u_1), \ldots, d_x(g \circ f)(u_k)) \\ &= \alpha_{g(f(x))}\left(d_{f(x)}g(d_xf(u_1)), \ldots, d_{f(x)}g(d_xf(u_k))\right) \\ &= (g^*\alpha)_{f(x)}\,(d_xf(u_1), \ldots, d_xf(u_k)) \\ &= (f^*(g^*\alpha))_x(u_1, \ldots, u_k) \end{aligned}$$

□

Proposition 4.26. La différentielle extérieure et l'image réciproque commutent, c'est-à-dire que si U et V des ouverts d'espace vectoriels et $f : U \to V$ lisse, alors pour tout $\alpha \in \Omega(V)$ on a

$$f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha).$$

`Preuve:` Si $\alpha \in \Omega^0(V)$ la réciproque est simplement $f^*\alpha = \alpha \circ f$ et la formule

$$d(f^*\alpha) = d(\alpha \circ f) = d\alpha(f) \circ df = f^* d\alpha$$

la dérivée d'une fonction composée.

Par linéarité il suffit de considérer ensuite $\alpha = a\, dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}$. On a vu que

$$f^*\alpha = a \circ f\, df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_k},$$

donc

$$\begin{aligned} d(f^*\alpha) &= d(a \circ f) \wedge df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_k} \\ &= f^*(da) \wedge f^*(dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}) \\ &= f^*(da \wedge dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}) \\ &= f^*(d\alpha) \end{aligned}$$

en utilisant (2) de la proposition 4.25 à la troisième ligne. □

Il s'ensuit que l'image réciproque d'une forme fermée (resp. exacte) est fermée (resp. exacte).

Corollaire 4.27. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \Omega^k(V)$. Si α est fermée sur V elle est exacte.

`Preuve:` Soit $f : \mathbb{R}^n \to V$ un difféomorphisme. Alors $f^*\alpha$ est fermée sur $\mathbb{R}^n$, donc exacte par le lemme de Poincaré. Soit $\beta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ tel que $d\beta = f^*\alpha$. Alors

$$d(f^{-1^*}\beta) = f^{-1^*}(d\beta) = f^{-1^*}(f^*\alpha) = \alpha$$

en utilisant 4.26 et 4.25 (3). □

Si on peut trouver une forme fermée non exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (par exemple $\frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$, voir section suivante) on peut conclure que

Corollaire 4.28. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ n'est pas difféomorphe à $\mathbb{R}^2$.

6 1-formes et intégrales

Définition 4.29. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in \Omega^1(U)$, $\gamma : [a,b] \to U$ continue et $a = t_1 < \ldots < t_k = b$ tels que la restriction de γ à chaque $]t_i, t_{i+1}[$ soit C^1. On définit l'intégrale de α le long de γ comme

$$\int_\gamma \alpha := \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma_i^* \alpha = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\, dt$$

où γ_i est la restriction de γ à $]t_i, t_{i+1}[$.

Le résultat ne change pas si on effectue un changement de paramétrage *croissant* C^1 de γ :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\, dt = \int_{\phi^{-1}(t_i)}^{\phi^{-1}(t_{i+1})} \alpha_{\gamma\circ\phi(t)}(\gamma'(\phi(t))\phi'(t)\, dt$$

par la formule du changement de variable. Le résultat est multiplié par -1 si ϕ est décroissante. Par exemple si on note γ^{-1} le chemin $t \mapsto \gamma(b+a-t)$, défini sur $[a,b]$, on a $\int_{\gamma^{-1}} \alpha = -\int_\gamma \alpha$.

Si α est exacte, c'est-à-dire $\alpha = df$ pour $f : U \to \mathbb{R}$ lisse, on a simplement

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b df = \int_a^b d_{\gamma(t)} f(\gamma'(t))\, dt = \int_a^b (f\circ\gamma)'(t)\, dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Le résultat ne dépend que des extrémités de γ, en particulier si $\gamma(a) = \gamma(b)$ (γ est un lacet)

$$\int_\gamma df = 0.$$

Si α est exacte sur U, son intégrale sur tout lacet de U est donc nulle. Testons $\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ avec le lacet $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. On a

$$\int_\gamma \alpha = \int_0^{2\pi} (\cos t)(\cos t) - (\sin t)(-\sin t)\, dt = 2\pi \neq 0,$$

α n'est donc pas exacte, ce qui prouve le corollaire 4.28.

En fait le test-ci dessus est une équivalence :

Proposition 4.30. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ connexe par arcs et $\alpha \in \Omega^1(U)$. Alors α est exacte si et seulement si $\int_\gamma \alpha = 0$ pour tout lacet $\gamma \subset U$ lisse par morceaux.

`Preuve:` Fixons $x_0 \in U$. Pour tout $x \in U$ il existe un chemin C^1 par morceaux γ dans U qui joint x_0 à x. On pose

$$f(x) = \int_\gamma \alpha.$$

Le fait que l'intégrale α sur tout lacet soit nulle implique que $f(x)$ ne dépend pas de γ (exercice). Vérifions que $df = \alpha$. Il suffit de montrer que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha(e_i)$ pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$. Fixons i et notons c_t le chemin $s \mapsto x + se_i$ pour $s \in [0, t]$ (défini pour $t > 0$ assez petit, U est ouvert). Notons $\gamma \cup c_t$ le chemin C^1 par morceaux obtenu en mettant bout à bout γ puis c_t. On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\int_{\gamma \cup c_t} \alpha - \int_\gamma \alpha \right) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_{c_t} \alpha \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \alpha_{x+se_i}(e_i)\, ds \\
&= \alpha_x(e_i)
\end{aligned}$$

$\square$

Définition 4.31. Deux lacets C^1 par morceaux γ_0, $\gamma_1 : [a, b] \to U$ sont (librement) homotopes dans U s'il existe $H : [a, b] \times [0, 1] \to U$ continue telle que pour tout $(t, s) \in [a, b] \times [0, 1]$:

$$H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad H(t, 1) = \gamma_1(t), \quad H(a, s) = H(b, s),$$

et que les lacets γ_s définis par $\gamma_s(t) := H(t, s)$ sont aussi C^1 par morceaux.

Proposition 4.32. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et α une 1-forme fermée sur U. Si γ_0 et γ_1 sont deux lacets homotopes dans U alors

$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha.$$

`Preuve:` Soit $s \in [0, 1]$. Par compacité on peut recouvrir $\gamma_s([a, b])$ par un nombre fini de boules $B_1, \ldots, B_k$ contenues dans U. Sur chaque B_i, il existe $f_i : B_i \to \mathbb{R}$ lisse tel que $\alpha = df_i$, d'après le lemme de Poincaré. Sur $B_i \cap B_{i+1}$, on a $d(f_{i+1} - f_i) = 0$ donc il existe une constante $c_i \in \mathbb{R}$ telle que $f_{i+1} - f_i = c_i$ sur $B_i \cap B_{i+1}$ (pour $i = 1, \ldots, k$, avec la convention $B_{k+1} = B_1$, $f_{k+1} = f_1$). Choisissons des points $x_1, \ldots, x_k$ le long de γ_s tels que $x_{i+1} \in B_i \cap B_{i+1}$ (avec la convention $x_{k+1} = x_1$), et notons (x_i, x_{i+1}) le sous-arc de γ_s entre x_i et x_{i+1}. Puisque α restreinte à B_i est exacte, l'intégrale de α sur (x_i, x_{i+1}) ne dépend que des valeurs de f_i aux extrémités, i.e.

$\int_{(x_i,x_{i+1})} \alpha = f_i(x_{i+1}) - f_i(x_i)$. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_s} \alpha &= \sum_{i=1}^{k} \int_{(x_i,x_{i+1})} \alpha = \sum_{i=1}^{k} (f_i(x_{i+1}) - f_i(x_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{k} f_i(x_{i+1}) - \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{k-1} f_{i+1}(x_{i+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} (f_i - f_{i+1})(x_{i+1}) + f_k(x_1) - f_1(x_1) \\
&= -\sum_{i=1}^{k} c_i
\end{aligned}$$

qui ne dépend plus des x_i. Pour s' suffisemment proche de s on peut recouvrir $\gamma_{s'}([a,b])$ par les mêmes B_i et utiliser les mêmes f_i et c_i. Le calcul de $\int_{\gamma_{s'}} \alpha$ en utilisant des x_i' appropriés donne donc la même valeur $-\sum_{i=1}^{k} c_i$. L'application $s \mapsto \int_{\gamma_s} \alpha$ est donc localement constante et donc constante car $[0,1]$ est connexe. □

Corollaire 4.33. Si U est simplement connexe (tout lacet de U est homotope à un lacet constant) alors toute 1-forme fermée sur U est exacte.

Corollaire 4.34. $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ n'est pas simplement connexe. Si $p \neq q$, le cercle parcouru p fois n'est pas homotope dans U au cercle parcouru q fois

En effet l'intégrale de $\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ sur le cercle parcouru p fois donne $2\pi p$.

On peut montrer par contre que pour $n \geq 3$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est simplement connexe (et pas difféomorphe à $\mathbb{R}^n$).

Définition 4.35. Deux chemins C^1 par morceaux γ_0, $\gamma_1 : [a,b] \to U$, tels que $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ et $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$, sont homotopes dans U s'il existe $H : [a,b] \times [0,1] \to U$ continue telle que pour tout $(t,s) \in [a,b] \times [0,1]$:

$$H(t,0) = \gamma_0(t), \quad H(t,1) = \gamma_1(t), \quad H(a,s) = \gamma_0(a), H(b,s) = \gamma_0(b)$$

et que les chemins γ_s définis par $\gamma_s(t) := H(t,s)$ sont aussi C^1 par morceaux.

Corollaire 4.36. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et α une 1-forme fermée sur U. Si γ_0 et γ_1 sont deux chemins homotopes (à extrémités fixées) dans U alors

$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha.$$

En effet le lacet $\gamma_0 \cup \gamma_1^{-1}$ est homotope à un lacet constant.