

# Cours K1MA6021 : Systèmes Dynamiques

Laurent Bessières

S6, 2012-2013

## Cours 1 : mercredi 16/01/13

Les équations différentielles apparaissent lorsqu'on modélise des phénomènes naturels et que les quantités à étudier dépendent du temps. La première équation différentielle remonte probablement à Newton, dont le principe fondamental de la dynamique se traduit par l'équation

$$mx''(t) = F(x(t))$$

où  $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^3$  décrit la trajectoire du centre de gravité d'un objet de masse  $m$  soumis à un champ de force  $x \mapsto F(x)$ . Une autre équation célèbre est celle du pendule. Une masse  $m$  est suspendue à l'extrémité d'une corde de longueur  $\ell$  dont l'autre extrémité est fixe. L'angle  $\theta(t)$  que fait, à l'instant  $t$ , le fil avec la verticale vérifie la relation :

$$\theta''(t) + \frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) = 0$$

La biologie conduit aussi à de nombreux exemples. Le plus simple qui remonte probablement à Malthus, est une population au taux de croissance proportionnel au nombre d'individus. Si  $N(t)$  est le nombre d'individus, l'équation est :

$$N' = aN(t)$$

où  $a$  est un paramètre réel, ici positif. Cette équation très simple apparaît aussi dans un contexte très différent : elle peut modéliser le nombre d'atomes radio-actifs dans un matériau, lorsque le taux de désintégration est proportionnel au nombre d'atomes (avec  $a < 0$ ). C'est l'équation à la base des datations au Carbone 14.

Une autre beaucoup utilisée en biologie des populations est l'équation dite logistique :

$$N' = aN - bN^2.$$

Elle prend en compte la limitation des ressources par le terme  $-bN^2$ , qui exprime la compétition entre individus pour les ressources (la mortalité supplémentaire est supposée proportionnelle au nombre de rencontres entre individus, ce qui donne le carré).

La résolution de ces 2 équations est complètement explicite, on y arrivera très rapidement. La situation devient beaucoup complexe lorsqu'on étudie les interactions entre 2 espèces, par exemple une proie et son prédateur. Les systèmes proies-prédateurs ont été introduits par Lotka

et Volterra dans les années 1920, pour tenter de comprendre les fluctuations relatives de poissons et de requins en méditerranée. Ils ont proposé le modèle suivant : si  $x(t)$  désigne le nombre de proies et  $y(t)$  le nombre de prédateur, alors

$$\begin{cases} x' &= ax - bxy \\ y' &= -cy + dxy \end{cases}$$

où  $a, b, c, d$  sont des paramètres positifs. On n'abordera cet exemple qu'à la fin du cours. On consacrera auparavant une large part aux systèmes linéaires, en particulier à  $X' = F(X)$  où  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est affine. On s'attardera sur le cas  $n = 2$  (systèmes linéaires planaires), qui est déjà très riche.

Le plan du cours pour les prochaines semaines est le suivant :

- (1) Equations d'une variable du 1er ordre
- (2) Systèmes différentiels
- (3) Systèmes linéaires planaires
- (4) Systèmes linéaires
- (5) ...

Bibliographie :

- M. Hirsh, S. Smale, R. Devaney : *Differential Equations, Dynamical systems and Introduction to Chaos*.
- M. Braun : *Differential Equations and Their Applications*.
- T. Ramond, Notes du cours M318, <http://www.math.u-psud.fr/~ramond/Site/Enseignement.html>
- L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*.
-

# 1 Equation différentielle d'ordre 1

## 1.1 Définition

**Définition 1.1.** Une équation différentielle du 1er ordre est l'équation

$$y' = f(t, y), \quad (1.1)$$

où  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$  est une application qu'on supposera au moins continue,  $I, U$  sont des intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$ .

Donnons deux exemples que nous traiterons en détail par la suite.

EXEMPLE 1.2.

$$y' = a(t)y + b(t) \quad (1.2)$$

où  $a(t)$  et  $b(t)$  sont deux fonctions continues sur un intervalle  $I$ . Alors l'équation est de la forme  $y' = f(t, y)$  pour la fonction  $f(t, x) = a(t)x + b(t)$  définie sur  $I \times \mathbb{R}$ .

EXEMPLE 1.3.

$$y' = ay - by^2, \quad (1.3)$$

où  $a, b > 0$ . L'équation est de la forme  $y' = f(t, y)$  pour  $f(t, x) = ax - bx^2$ , définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Mentionnons quelques différences importantes et introduisons un peu de terminologie :

- (1.2) est *linéaire* :  $f$  est affine en la seconde variable (i.e. de la forme  $x \mapsto ax + b$ )
- (1.3) n'est pas linéaire à cause du terme  $-by^2$
- (1.3) est *autonome* : la fonction  $f(t, x)$  ne dépend pas de  $t$ , i.e. l'équation est de la forme  $y' = F(y)$ . L'équation (1.2) est autonome lorsque  $a(t)$  et  $b(t)$  sont des fonctions constantes.

**Que signifie résoudre l'équation ?** D'abord on cherche une fonction  $y(t)$  au moins dérivable pour que l'équation fasse sens. Si  $(t, x) \mapsto f(t, x)$  est continue,  $y' = f(t, y(t))$  est continue donc  $y$  est automatiquement  $C^1$ .

Soit  $(t, x) \mapsto f(t, x)$  continue. Résoudre l'équation  $y' = f(t, y)$  c'est trouver toutes les solutions de classe  $C^1$  telles que  $y'(t) = f(t, y(t))$  pour tout  $t$ .

Pour quel  $t$  ?  $f(t, y(t))$  doit être défini que l'équation fasse sens, donc si  $f$  est définie sur  $I \times U$ , où  $I, U$  sont des intervalles (qu'on suppose ouverts pour éviter les problèmes de dérivation au bord) on cherche  $y : I \rightarrow U$ ,  $y \in C^1(I)$ . On verra que  $y$  n'est pas nécessairement défini sur tout  $I$ .

## 1.2 L'équation différentielle la plus simple

On considère l'équation différentielle (1.2), d'abord dans le cas particulier où  $b(t) = 0$ . L'équation est dite *homogène* :

$$y' = a(t)y, \quad (1.4)$$

### 1.2.1 Equation différentielle d'ordre 1 linéaire homogène

Supposons d'abord que  $t \mapsto a(t)$  soit constante sur l'intervalle  $I$ , l'équation est alors

$$y' = ay. \quad (1.5)$$

La vitesse de croissance est proportionnelle à la quantité étudiée. Cela peut modéliser aussi bien une population de bactéries ( $a > 0$ ) qu'une quantité de matériel radio-actif ( $a < 0$ ). On cherche donc  $y \in C^1 I$  telle que

$$\forall t \in I, \quad y'(t) = ay(t) \quad (1.6)$$

On remarque que la fonction  $t \mapsto Ce^{at}$  est solution de (1.6), pour n'importe quelle constante  $C \in \mathbb{R}$ . En effet

$$y'(t) = (Ce^{at})' = Ca e^{at} = a(Ce^{at}) = ay(t).$$

Y en t'il d'autres ? Supposons que  $y$  soit solution de (1.6) et considérons la fonction  $y(t)e^{-at}$ . On a

$$(y(t)e^{-at})' = y'e^{-at} - yae^{-at} = (y' - ay)e^{-at} = 0!$$

donc il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $y(t)e^{-at} = C$  soit encore  $y(t) = Ce^{at}$ .

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de l'équation  $y' = ay$  sur l'intervalle ouvert  $I$  est

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto Ce^{at}, C \in \mathbb{R}\}.$$

Maintenant supposons que  $a(t)$  ne soit pas forcément constante. Dans l'argument ci-dessus, on remplace le terme  $at$  par une primitive  $A(t)$  de  $a(t)$ . La fonction  $t \mapsto e^{A(t)}$  est bien solution de (1.4) :

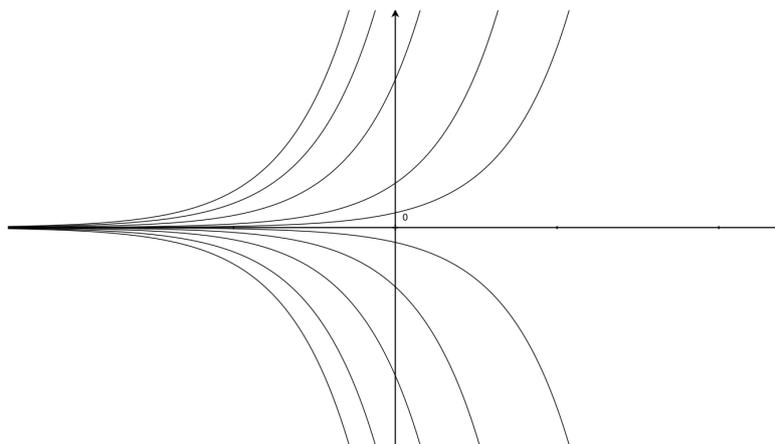
$$(e^{A(t)})' = A'(t)e^{A(t)} = a(t)e^{A(t)}$$

Puisque  $a(t)$  est continue on peut toujours trouver une telle primitive  $A(t)$ . Le même raisonnement qu'au dessus aboutit alors à

**Théorème 1.4.** Soit  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de l'équation  $y' = a(t)y$  est

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto Ce^{A(t)}, C \in \mathbb{R} \right\},$$

où  $A(t)$  est une primitive quelconque de  $a(t)$ .

FIGURE 1.1 – Solutions de l'équation  $y' = ay$ 

- EXERCICE 1.5. (1) Calculer toutes les solutions de l'équation  $y' = (t^2 + 1)y$  sur  $I = \mathbb{R}$ .  
 (2) Calculer toutes les solutions de l'équation  $y' = \frac{y}{t^2+1}$  sur  $I = \mathbb{R}$ .

### 1.2.2 Equation différentielle d'ordre 1 avec second membre

On revient maintenant au cas général

$$y' = a(t)y + b(t) \quad (1.7)$$

où  $a(t)$  et  $b(t)$  sont des fonctions continues sur  $I = ]\alpha, \beta[$ . Elle n'est plus homogène à cause du terme  $b(t)$ . Pour trouver ses solutions on emploie la méthode dite de *variation de la constante*. L'idée est de chercher des solutions sous la forme  $y(t) = C(t)e^{A(t)}$ , où  $A(t)$  est une primitive de  $a(t)$ . On remplace donc la constante  $C$  des solutions  $Ce^{A(t)}$  de l'équation homogène  $y' = a(t)y$  par une fonction  $C(t)$  qu'il s'agit de déterminer. Alors  $y(t) = C(t)e^{A(t)}$  est une solution de (1.7) si

$$\begin{aligned} y'(t) &= C'(t)e^{A(t)} + C(t)a(t)e^{A(t)} \\ &= C(t)a(t)e^{A(t)} + b(t) \\ \Leftrightarrow C'(t)e^{A(t)} &= b(t) \end{aligned}$$

ce qui équivaut à

$$C(t) = \int_{\alpha}^t b(s)e^{-A(s)} ds + C,$$

où  $C \in \mathbb{R}$ . On a donc obtenu des solutions de la forme

$$y(t) = e^{A(t)} \left( \int_{\alpha}^t b(s)e^{-A(s)} ds + C \right).$$

Existe-t'il des solutions de (1.7) qui ne sont pas de la forme  $y(t) = C(t)e^{A(t)}$ ? Supposons que  $y(t)$  soit une solution de (1.7), en dérivant l'expression  $w(t) = e^{-A(t)}y(t)$  et en utilisant (1.7), on

obtient  $w' = e^{-A(t)}b(t)$  puis  $w(t) = C(t)$  comme ci-dessus, et  $y(t) = C(t)e^{A(t)}$ . On a donc trouvé toutes les solutions :

**Théorème 1.6.** L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de l'équation (1.7) est

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto e^{A(t)} \left( C + \int_{\alpha}^t b(s)e^{-A(s)} ds \right), C \in \mathbb{R} \right\},$$

où  $A(t)$  est une primitive de  $a(t)$ .

EXERCICE 1.7. Déterminer les solutions de l'équation  $y' = 2y + e^{2t}$ .

### 1.2.3 Ligne de phase

Revenons un instant sur l'équation autonome  $y' = ay$ . On a vu que les solutions sont les fonctions  $t \mapsto Ce^{at}$ , pour toute constante  $C \in \mathbb{R}$ . On peut avoir une bonne idée du comportement des solutions en dessinant leur graphe (voir figure 1.1, ou simplement leur *ligne de phase*. La ligne de phase est plus schématique et ne requiert pas déterminer les solutions explicites : il suffit de trouver les *points d'équilibre* (i.e. les valeurs de  $y$  correspondant à  $y' = 0$ ) et le signe de  $y'$  en dehors des points d'équilibre.



FIGURE 1.2 –  $a > 0$  : source



FIGURE 1.3 –  $a < 0$  : puits

FIGURE 1.4 – Ligne de phase de  $y' = ay$

Lorsque  $a > 0$ , les solutions s'éloignent de 0 lorsque  $t \rightarrow \infty$ ; lorsque  $a < 0$ , les solutions tendent vers 0 lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Lorsque  $a = 0$  les constantes sont les solutions. On dit qu'un point d'équilibre est une *source* si les solutions proches du point s'en éloignent lorsque  $t \rightarrow \infty$ ; On dit qu'un point d'équilibre est un *puits* si les solutions proches du point convergent vers le point lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

EXERCICE 1.8. Dessiner la ligne de phase de  $y' = ay + 3$ , puis le graphe de ses solutions.

### 1.3 L'équation logistique

On a vu que l'équation de Malthus  $y' = ay$  a des solutions  $y(t) = Ce^{at}$  à croissance exponentielle ( $a > 0$ ) indéfinie. Ceci tient au fait que l'on suppose le taux de croissance constant, quelque soit la quantité étudiée. Ce n'est pas réaliste à long terme lorsqu'on modélise des populations. Pour remédier à cela on introduit un terme de mortalité supplémentaire supposé proportionnel au nombre de rencontres entre individus, soit  $-by^2$ , ce qui donne

$$y' = ay - by^2, \quad (1.8)$$

$a, b > 0$ . Lorsque  $y$  est petit,  $y^2 \ll y$  (dans les bonnes unités) et on a  $y' \approx ay$ . Les ressources sont suffisantes pour la population et sa croissance est exponentielle. Lorsque  $y$  est grand, en fait dès que  $y > a/b$  :

$$y' = ay - by^2 = ay\left(1 - \frac{b}{a}y\right) < 0$$

et la population décroît, par manque de ressources.

#### 1.3.1 Points d'équilibre, ligne de phase

Sans s'embarrasser pour l'instant de la question de l'existence de solutions, faisons l'étude qualitative des solutions de (1.8). Les points d'équilibre sont les solutions de l'équation

$$0 = ay - by^2 = ay\left(1 - \frac{b}{a}y\right) = ay\left(1 - \frac{1}{N}y\right),$$

où on pose  $N = a/b$ . Il y en a deux :  $y = 0$  et  $y = N$ , ce qui donne les deux solutions constantes

$$y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad y(t) = N, \forall t \in \mathbb{R}.$$

On trace aisément la ligne de phase, avec  $y' > 0$  si  $0 < y < N$  et  $y' < 0$  si ( $y < 0$  ou  $y > N$ ).



FIGURE 1.5 – Ligne de phase de  $y' = ay - by^2$

La ligne de phase suggère que toutes les solutions  $> 0$  convergent vers  $N$ , qu'on peut interpréter comme la population limite. Il faut s'en assurer. En effet on peut envisager plusieurs comportements des solutions :

1. On atteint  $N$  en temps fini.
2. On "atteint"  $N$  uniquement asymptotiquement, c'est-à-dire lorsque  $t \rightarrow \infty$ .
3. On n'atteint jamais  $N$ , même asymptotiquement. Une trajectoire partant d'un point proche de 0 pourrait ralentir et ne jamais dépasser, disons,  $N/2$ .

En fait seul 2. peut arriver. Pour s'en assurer, deux méthodes :

- (1) Résolution explicite : on réussit à intégrer l'équation différentielle de manière à avoir une expression explicite de  $y(t)$  (on met les mains dans le cambouis).
- (2) On invoque un théorème et on se fatigue moins (c'est à ça que servent les théorèmes). En l'occurrence il s'agit du théorème de Cauchy-Lipschitz, le résultat le plus important du cours, dont on verra plusieurs versions.

Le théorème nous dira par exemple (si les hypothèses pour l'appliquer sont vérifiées) que si deux points d'équilibre  $p, q$  sur la ligne de phase sont séparés par une flèche allant de  $p$  à  $q$ , et bien toute solution  $y(t)$  telle que  $y(0) \in ]p, q[$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , tend vers  $p$  quand  $t \rightarrow -\infty$  et tend vers  $q$  quand  $t \rightarrow \infty$ . L'avantage de (2) est qu'on se fatigue moins. Par contre elle ne permet pas de répondre à une question du type :

Si  $y(0) = 10\%$  de  $N$ , au bout de combien de temps a t'on  $y(t) = 90\%$  de  $N$  ?

Pour ça on aura besoin de (1). Commençons par (1), on verra (2) ensuite.

## Cours 2 : mercredi 23/01/13

### 1.3.2 Résolution explicite

Commençons par simplifier les constantes. Quitte à changer d'unités on peut toujours se ramener à  $N = 1$ . Précisément si on pose  $z = y/N$ , on a  $z' = \frac{y'}{N} = \frac{ay}{N} (1 - \frac{1}{N}y) = az(1 - z)$  donc (1.8) équivaut à

$$z' = az(1 - z) \quad (1.9)$$

Supposons qu'on ait une solution  $z(t)$  de (1.9) définie sur un intervalle  $J$  telle que

$$\forall t \in J, z(t) \neq 0 \text{ et } z(t) \neq 1.$$

Comme  $z$  est de classe  $C^1$  elle est continue et donc

$$(\forall t \in J, z(t) < 0) \text{ ou } (\forall t \in J, 0 < z(t) < 1), \text{ ou } (\forall t \in J, z(t) > 1).$$

Dans ce cas, sur l'intervalle  $J$

$$\begin{aligned} z' = az(1 - z) &\iff \frac{z'}{z(1 - z)} = a \\ &\iff \frac{z'}{z} + \frac{z'}{1 - z} = a \text{ en décomposant la fraction} \\ &\iff \ln |z| - \ln |1 - z| = at + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ (en intégrant)} \\ &\iff \left| \frac{z}{1 - z} \right| = e^{at+C} \\ &\iff \frac{z}{1 - z} = Ke^{at}, \quad K = \pm e^C \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

On a utilisé ici le fait que  $\frac{z}{1-z}$  ne change pas de signe sur  $J$ . On a  $K > 0$  si  $z \in ]0, 1[$  et  $K < 0$  si  $z < 0$  ou  $z > 1$ . Maintenant,

$$\frac{z}{1 - z} = X \iff z = X - zX \iff z = \frac{X}{1 + X}$$

d'où  $\forall t \in J,$

$$z(t) = \frac{Ke^{at}}{1 + Ke^{at}}. \quad (1.10)$$

Notons  $z_K(t) = \frac{Ke^{at}}{1 + Ke^{at}}$  et discutons de l'ensemble de définition de  $z_K$  selon  $K$  :

- Lorsque  $K > 0$ ,  $z_K$  est défini sur  $\mathbb{R}$ .
- Lorsque  $K < 0$ ,  $z_K(t)$  est défini si  $1 + Ke^{at} \neq 0$ , soit  $t \neq -\frac{1}{a} \ln(-K) := T_K$ .  $z_K$  est donc défini sur l'intervalle  $] -\infty, T_K[$  et sur l'intervalle  $]T_K, +\infty[$ .

La chaîne d'équivalences ci-dessus montre que  $z_K$  est donc solution de (1.9), sur  $\mathbb{R}$  lorsque  $K > 0$ , sur  $] -\infty, T_K[$  et sur  $]T_K, +\infty[$  lorsque  $K < 0$ . L'intervalle  $J$  est contenu dans un de ces 3 intervalles et  $z = z_K$  sur  $J$ . Faisons le graphe de ces solutions. On constate que  $z_K < 0$  sur  $] -\infty, T_K[$ ,  $z_K > 0$  sur  $]T_K, +\infty[$  et sur  $\mathbb{R}$ , et  $z_K(t) \rightarrow 1$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

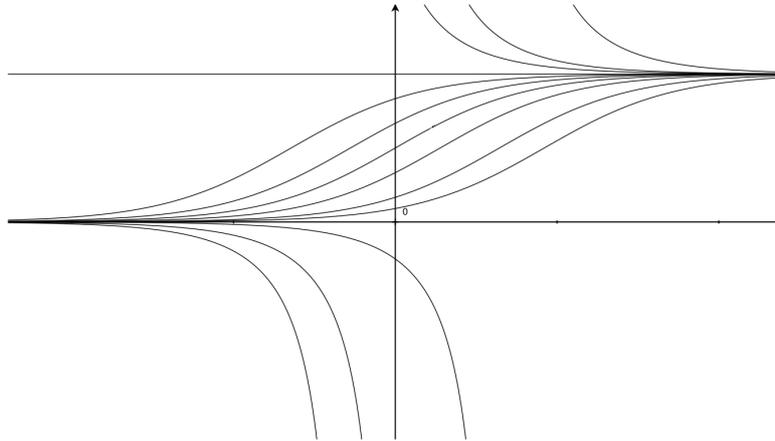


FIGURE 2.1 – Solutions de l'équation logistique

Observons que si  $K' = \lambda K$  pour  $\lambda > 0$ , le graphe de  $z_{K'}$  est celui de  $z_K$  décalé de  $-\frac{\ln \lambda}{a}$  :

$$z_{K'}(t) = \frac{K'e^{at}}{1 + K'e^{at}} = \frac{K\lambda e^{at}}{1 + K\lambda e^{at}} = \frac{Ke^{a(t + \frac{\ln \lambda}{a})}}{1 + Ke^{a(t + \frac{\ln \lambda}{a})}} = z_K\left(t + \frac{\ln \lambda}{a}\right).$$

En dehors des solutions constantes et des  $z_K$ , y a-t'il d'autres solutions de (1.9)? Supposons que  $z$  soit une solution non constante définie sur un intervalle  $J$ , et puisse prendre la valeur 0 ou 1. Puisque  $z$  n'est pas constante il existe  $t_0 \in J$  tel que  $z(t_0) \neq 0, 1$ . Supposons qu'il existe  $t < t_0$  tel que  $z(t) = 0$ , par exemple, les autres cas étant similaires. Soit alors  $t_1 \in [t - t_0[$  le plus proche de  $t_0$  tel que  $z(t_1) \in \{0; 1\}$ . Précisément  $t_1 = \sup\{t' < t_0 \mid z(t') \in \{0; 1\}\}$ . Le point  $t_1$  est bien  $< t_0$  par continuité de  $z$ . On a donc  $z \neq 0, 1$  sur  $]t_1, t_0[$ . De plus par continuité  $z \neq 0, 1$  sur  $[t_0, t_2[$  pour  $t_2$  assez proche de  $t_0$ . Sur  $]t_1, t_2[$ , la discussion préalable s'applique et montre que  $z = z_K$  pour une certaine constante  $K$ . Puisque  $z_K(t_1) \notin \{0; 1\}$ , par continuité  $z(t_1) \notin \{0; 1\}$ . En conclusion, si  $z$  n'est pas constante elle ne prend pas la valeur 0 ou 1, et donc est égale à  $z_K$  pour un certain  $K$ . Nous justifierons également cela grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, dans la section suivante.

Mentionnons que si l'on impose une donnée initiale  $z(t_0) = z_0$ , où  $z_0 \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ , cela détermine  $K$  de manière unique. En effet en écrivant  $z_0 = z(t_0) = \frac{Ke^{at_0}}{1+Ke^{at_0}}$ , il vient  $K = \frac{z_0}{1-z_0}e^{-at_0}$ . L'expression (1.10) devient alors :

$$z(t) = \frac{z_0 e^{a(t-t_0)}}{1 - z_0 + z_0 e^{a(t-t_0)}}, \quad (1.11)$$

et si on retourne aux unités d'origine, la solution de (1.8) est :

$$y(t) = \frac{Ny_0 e^{a(t-t_0)}}{N - y_0 + y_0 e^{a(t-t_0)}}, \quad (1.12)$$

où  $N = \frac{a}{b}$  et  $y(t_0) = y_0$ .

Observons que  $y(t)$  tend bien vers  $N$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

## 1.4 Solution(s) d'une équa-diff d'ordre 1

C'est le moment de refaire un peu de théorie générale. Rappelons qu'on a défini (définition 1.1) une équation différentielle d'ordre 1 comme l'équation

$$y' = f(t, y), \quad (1.13)$$

où  $f$  est définie sur  $I \times U$ , pour  $I, U$  ouverts de  $\mathbb{R}$ .

### 1.4.1 La notion de solution

Il s'agit de préciser la notion de solution.

**Définition 1.9.** On dit que  $(J, y)$  est une solution de (1.13) si

- (1)  $J \subset I$  est un intervalle ouvert.
- (2)  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^1$  et  $y(J) \subset U$ .
- (3)  $\forall t \in J, y'(t) = f(t, y(t))$ .

On dit que la solution  $(J, y)$  est **globale** si  $J = I$ .

Dans l'équation logistique,  $f(t, y) = ay - by^2$  est définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Alors  $(\mathbb{R}, y)$  est globale lorsque  $y(t_0) \in ]0, N[$ .

### 1.4.2 Solution maximale

Supposons qu'on ait une solution  $(J, y)$  de (1.13) avec  $J \neq I$ . Peut-on agrandir  $J$ ? c'est-à-dire trouver  $J' \supset J$  plus grand tel qu'un prolongement de  $y$  à  $J'$  soit encore solution?

EXEMPLE 1.10. Soit  $y' = \sqrt{y} = f(t, y)$  où  $f$  est défini sur  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ . On a comme solutions :

- $(\mathbb{R}, y \equiv 0)$  solution globale.
- $\forall c \in \mathbb{R}$ , posons  $y_c = \frac{1}{4}(t - c)^2$  alors  $]c, +\infty[, y_c)$  est une autre solution.

En effet,  $y'_c = \frac{1}{2}(t - c) = \sqrt{\frac{1}{4}(t - c)^2}$  car  $t - c > 0$ . Ce n'est pas une solution pour  $t < c$ .

Posons maintenant  $\tilde{y}_c = \begin{cases} 0 & , t \leq c \\ y_c & , t > c \end{cases}$  Elle est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et solution de  $y' = \sqrt{y}$ . Alors  $(\mathbb{R}, \tilde{y}_c)$  prolonge  $]c, +\infty[, y_c)$ .

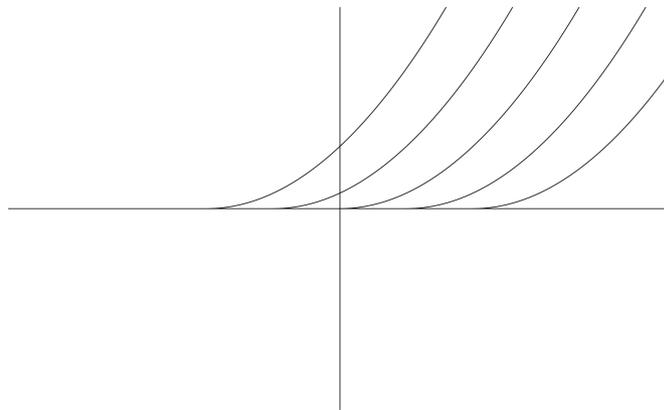


FIGURE 2.2 – Graphes des  $\tilde{y}_c$

**Définition 1.11.** Soit  $(J_1, y_1)$  et  $(J_2, y_2)$  deux solutions de (1.13). On dit que  $(J_2, y_2)$  **prolonge**  $(J_1, y_1)$  lorsque

- (1)  $J_2 \subset J_1$ .
- (2)  $\forall t \in J_1, y_2(t) = y_1(t)$  ( $y_2$  coïncide avec  $y_1$  sur  $J_1$ ).

**Définition 1.12.** On dit que  $(J, y)$  est une **solution maximale** de (1.13) lorsqu'elle n'admet pas d'autre prolongement qu'elle-même.

Une solution globale est maximale. Une solution maximale n'est pas forcément globale. On a vu que lorsque  $K < 0$ ,  $z_K(t) = \frac{Ke^{at}}{1+Ke^{at}}$  était solution de l'équation (1.9) sur  $] -\infty, T_K[$  et sur  $]T_K, +\infty[$  Puisque  $|z_K(t)| \rightarrow +\infty$  lorsque  $t \rightarrow T_K$  on peut pas la solution dans ce cas. Elle donc maximale mais pas globale.

Une solution  $(J, y)$  de (1.13) peut-elle admettre plusieurs prolongements maximaux ? L'exemple (1.10)  $y' = \sqrt{y}$  montre que oui : la solution  $(] - \infty, 0[, 0)$  admet pour prolongement maximal toute solution  $(\mathbb{R}, \tilde{y}_c)$ ,  $\forall c \geq 0$ .

## 1.5 Problème de Cauchy

Nous formulons plus précisément en quoi consiste résoudre une équation différentielle.

**Définition 1.13.** Soit  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $I, U \subset \mathbb{R}$  des intervalles ouverts. Soit  $t_0 \in I$  et  $y_0 \in U$ . Résoudre le problème de Cauchy en  $(t_0, y_0)$ ,

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0, \end{cases} \quad (1.14)$$

c'est trouver toutes les solutions maximales  $(J, y)$  de  $y' = f(t, y)$  telles que  $t_0 \in J$  et  $y(t_0) = y_0$ .

**EXEMPLE 1.14.** Essayons de résoudre le problème de Cauchy en  $(t_0, y_0)$  pour l'équation (1.7)  $y' = a(t)y + b(t)$ . D'après le théorème 1.6 les solutions sont de la forme  $y(t) = e^{A(t)} \left( C + \int_{\alpha}^t b(s)e^{-A(s)} ds \right)$ , où  $A$  est une primitive de  $a$ . Choisissons  $\alpha = t_0$ , alors  $y(t_0) = y_0 = e^{A(t_0)}C$  impose  $C = y_0 e^{-A(t_0)}$ . Puisqu'on a le choix de  $A$ , on peut choisir une primitive vérifiant  $A(t_0) = 0$ , d'où  $C = y_0$  et

$$y(t) = e^{A(t)} \left( y_0 + \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} ds \right)$$

où  $A(t)$  est la primitive de  $a(t)$  nulle en  $t_0$ . Le problème de Cauchy admet donc une solution unique.

**EXEMPLE 1.15.** Essayons de résoudre le problème de Cauchy ( $y' = \sqrt{y}$ ,  $(t_0 = 0, y_0 = 0)$ ) (exemple 1.10). Alors  $(\mathbb{R}, y \equiv 0)$  est solution, mais également tous les solutions globales  $(\mathbb{R}, \tilde{y}_c)$ . Le problème de Cauchy en  $(t_0 = 3, y_0 = 1)$  conduit par contre à  $y_c(3) = \frac{1}{4}(3 - c)^2 = 1 \Leftrightarrow c = 1$ . Donc  $(\mathbb{R}, \tilde{y}_1)$  est l'unique solution en  $(t_0 = 3, y_0 = 1)$ .

**EXEMPLE 1.16.**

$$\begin{cases} y' &= 3|y|^{2/3} = f(t, y) \text{ défini sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ y(0) &= 0, \end{cases}$$

admet les deux solutions globales  $(\mathbb{R}, y \equiv 0)$  et  $(\mathbb{R}, y = t^3)$ .

Il serait agréable de savoir à l'avance (i.e. sans résoudre l'équation) si le problème de Cauchy aura une solution et si elle sera unique. On s'attend à ce que pour une "bonne" équation différentielle, il y ait une solution unique pour toute donnée initiale dans l'ensemble de définition. C'est d'ailleurs indispensable si on veut tirer de l'équation différentielle des prévisions sur le comportement futur.

**Théorème 1.17** (Théorème de Cauchy-Lipschitz, version 1.0). Soit  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $I, U \subset \mathbb{R}$  des intervalles ouverts. Soit  $t_0 \in I$  et  $y_0 \in U$ . Si  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I \times U$ , alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0, \end{cases} \quad (1.15)$$

admet une unique solution maximale  $(J, y)$ .

**Remarque 1.18.** Il existe des énoncés plus forts (avec des hypothèses de régularité plus faibles sur  $f$ ).

Comparons ce que donne le théorème avec les exemples ci-dessus. Dans l'exemple 1.14,  $f(t, x) = a(t)x + b(t)$  est seulement continue mais on a bien solution du problème de Cauchy en  $(t_0, y_0)$  et unicité. De plus la solution est définie sur  $I$  si  $a(t)$  et  $b(t)$  le sont : elle donc globale. On a donc obtenu plus que ce donne le théorème 1.17, cela tient au fait que l'équation de 1.14 est linéaire. Dans ce cas il y a une version de Cauchy-Lipschitz plus forte que l'énoncé 1.17 : il suffit que  $f(t, x)$  soit continue.

Dans l'exemple 1.15, il n'y a pas unicité de la solution au problème de Cauchy en  $(t_0 = 0, y_0 = 0)$ . La fonction  $f(t, x) = \sqrt{x}$  est définie sur  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$  mais n'est de classe  $C^1$  que sur  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$  (elle n'est pas dérivable par rapport à  $x$  en  $(t, 0)$ ). Les hypothèses du théorème 1.17 ne sont donc pas satisfaites en  $(t_0 = 0, y_0 = 0)$ . Par contre  $(t_0 = 3, y_0 = 1)$  tombe dans le domaine de validité du théorème.

Enfin dans l'exemple 1.16, la fonction  $f(t, x) = 3|x|^{2/3}$  est définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  mais n'est de classe  $C^1$  que sur  $\mathbb{R} \times ]-\infty, 0[$  et sur  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ . Le théorème ne s'applique donc pas en  $(t = 0, y = 0)$ .

## Cours 3 : mercredi 30/01/13

**Application à l'équation logistique** Puisque  $f(x, t) = ax - bx^2$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , le théorème 1.17 s'applique en tout  $(t_0, y_0)$  et donne l'existence d'une unique solution maximale  $(J, y)$  telle que  $y(t_0) = y_0$ . On a trouvé des solutions globales constantes

$$y \equiv 0 \quad \text{et} \quad y \equiv N = \frac{a}{b}.$$

et des solutions ne prenant pas les valeurs 0 et  $N$  :

$$y_K := N \frac{K e^{at}}{1 + K e^{at}}$$

Montrons qu'il n'y en a pas d'autres. Soit  $(J, y)$  une solution maximale non constante. S'il existe  $t_0 \in J$  tel que  $y(t_0) = 0$  ou  $y(t_0) = N$ , alors  $y$  est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= ay - by^2 \\ y(t_0) &= 0 \text{ (ou } y(t_0) = N), \end{cases}$$

Par unicité de Cauchy (i.e unicité de la solution au problème de Cauchy),  $(J, y)$  est l'une des solutions constantes, ce que nous avons exclu. Donc  $(J, y)$  ne prend pas les valeurs 0 et  $N$ . Il s'ensuit que  $y = y_K$  pour un certain  $K$ . C'est une solution globale  $(\mathbb{R}, y_K)$  si  $y(t_0) \in ]0, N[$ , une solution maximale  $(] - \infty, T_K[, y_K)$  si  $y(t_0) < 0$  ou  $(]T_K, +\infty[, y_K)$  si  $y(t_0) > N$ .

L'unicité de Cauchy se manifeste très simplement sur le graphe des solutions : *les trajectoires ne se coupent jamais*. Elle dit aussi qu'une trajectoire ne peut converger vers un point d'équilibre en temps fini.

### 1.6 Suppléments : quelques applications aux équations autonomes $y' = f(y)$

On tire quelques conséquences du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations autonomes :

$$y' = f(y) \tag{1.1}$$

où  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est supposée de classe  $C^1$ ,  $U$  intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ .

Essayons d'abord de comprendre ce qui se passe lorsque  $t$  s'approche de la borne droite d'un intervalle  $J$  maximal, i.e. tel que  $(J, y)$  est une solution maximale. Le cas de la borne gauche est similaire.

**Corollaire 1.19** (Explosion en temps fini). Soit  $(J, y)$  une solution maximale de (1.1). Supposons  $J$  de la forme  $]a, b[$  avec  $b < \infty$ , alors pour tout compact  $K \subset U$  il existe  $t_0$  tel que  $y(t) \notin K$  pour tout  $t \in [t_0, b[$ .

Si  $U = \mathbb{R}$  cela implique que  $|y(t)| \rightarrow \infty$  quand  $t \rightarrow b$ .

**Preuve:** Supposons que  $y(t_n) \in K$  pour une sous-suite  $t_n \rightarrow b$ . Donnons nous  $\varepsilon > 0$  et un compact  $K' \subset U$  tel que pour tout  $x \in K$ ,  $d(x, \partial K') \geq \varepsilon$ . Puisque  $f$  est continue et  $K'$  est compact, il existe  $M$  tel que  $|f(x)| \leq M$  pour tout  $x \in K'$ . Soit  $a \in ]a, b[$  assez proche de  $b$  pour que  $b - a < \frac{\varepsilon}{2M}$  et  $y(a) \in K$ . Un tel  $a$  existe par hypothèse (prendre  $a = t_n$  pour  $n$  grand). Commençons par montrer qu'on peut étendre  $y$  en une fonction continue  $y : [a, b] \rightarrow K'$ . Pour cela montrons que  $y([a, b]) \subset K'$  puis que  $y$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ . Soit  $t \in [a, b]$ , alors

$$\begin{aligned} |y(t) - y(a)| &= \left| \int_a^t y'(s) ds \right| \\ &\leq \int_a^t |f(y(s))| ds \\ &\leq (t - a)M \end{aligned} \tag{1.2}$$

tant que  $y([a, t])$  reste dans  $K'$ . C'est vrai pour  $t > a$  assez proche de  $a$  par continuité. Supposons que  $y([a, t])$  soit dans  $K'$  et  $y(t)$  au bord de  $K'$ . Mais alors  $|y(t) - y(a)| < \frac{\varepsilon}{2M}M = \frac{\varepsilon}{2}$  par (1.2). Comme  $y(a) \in K$ , ceci contredit  $y(t) \in \partial K'$ . Il s'ensuit que  $y([a, b] \subset K'$  et (1.2) montre l'uniforme continuité. On peut donc définir  $y(b) = \lim_{t \rightarrow b} y(t)$ . Montrons maintenant que  $y$  est dérivable à gauche en  $b$  et solution de l'équation différentielle (1.1). On a

$$\begin{aligned} y(b) &= y(a) + \lim_{t \rightarrow b} \int_a^t y'(s) ds \\ &= y(a) + \lim_{t \rightarrow b} \int_a^t f(y(s)) ds \\ &= y(a) + \int_a^b f(y(s)) ds \end{aligned}$$

en utilisant l'uniforme continuité de  $F(y(s))$ . Donc  $y(t) = y(a) + \int_a^t f(y(s)) ds$  pour  $t \in [a, b]$ . Il s'ensuit que  $y'(b) = F(y(b))$  (pour la dérivée à gauche). Maintenant d'après le théorème 1.17, le problème de Cauchy en  $(t = b, y = y(b))$  admet une unique solution maximale  $(\tilde{J}, \tilde{y})$ . Puisque  $\tilde{J}$  est un intervalle ouvert contenant  $b$  et que  $\tilde{y}'(b) = F(\tilde{y}(b)) = F(y(b)) = y'(b)$ , on peut donc prolonger la solution  $y$  sur  $]a, b'[$  avec  $b' > b$ , ce qui contredit la maximalité de  $(J, y)$ .  $\square$

**Corollaire 1.20.** Soient  $p, q \in U$  deux points tels que  $f(p) = f(q) = 0$  et  $f > 0$  sur  $]p, q[$ . Soit  $(J, y)$  une solution maximale de (1.1) telle que  $y(t_0) \in ]p, q[$  pour un certain  $t_0 \in J$ . Alors  $J = \mathbb{R}$ ,  $y(t)$  tend vers  $p$  quand  $t \rightarrow -\infty$  et  $y(t)$  tend vers  $q$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

Autrement dit, si sur la ligne de phase deux points d'équilibre sont séparés par une flèche, la trajectoire va d'un point vers l'autre. Le cas où  $f < 0$  sur  $]p, q[$  est similaire, en inversant le rôle de  $p$  et  $q$ .

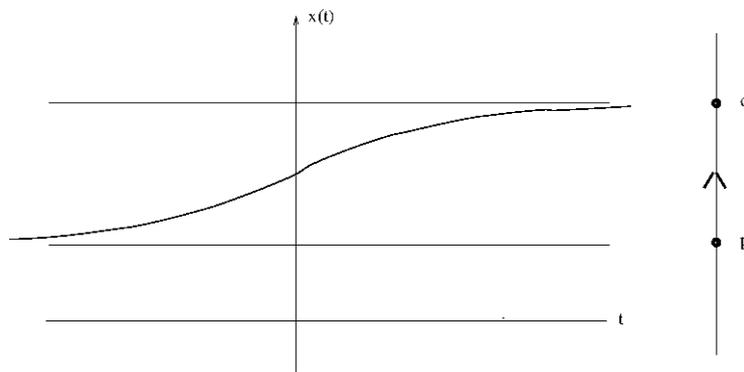


FIGURE 3.1 –

**Preuve:** L'unicité de Cauchy implique que  $y(t) \neq p, q$  pour tout  $t \in J$ . Autrement dit  $p < y < q$  sur  $J$ . Puisque  $y'(t) = f(y(t)) > 0$ ,  $y$  est strictement croissante sur  $J$ . Montrons d'abord que  $J$  est de la forme  $]\alpha, +\infty[$ . Si  $J = ]\alpha, b[$  avec  $b < \infty$ , alors d'après 1.19,  $y(t)$  doit sortir du compact  $K = [p, q]$  pour un certain  $t_0$ . Puisque  $p < y < q$ , c'est impossible. Donc  $b = +\infty$ . La démonstration que  $\alpha = -\infty$  est similaire. Notons alors  $q' = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq q$ , qui existe puisque  $y$  est croissante majorée. Nous voulons montrer que  $q' = q$ , il suffit pour cela d'établir que  $f(q') = 0$ , i.e.  $q'$  est un point d'équilibre. Appliquons le théorème des accroissements finis à  $y$  sur  $[n, n+1]$  : il donne  $t_n \in ]n, n+1[$  tel que  $y(n+1) - y(n) = y'(t_n)$ . Puisque  $f(n)$  et  $f(n+1)$  convergent vers  $f(q')$  quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $y'(t_n)$  tend vers 0. Or  $y'(t_n) = f(y(t_n))$  tend vers  $f(q')$  par continuité de  $f$ , d'où  $f(q') = 0$ . La démonstration que  $y(t)$  tend vers  $p$  en  $-\infty$  est similaire.  $\square$

**Remarque 1.21.** La même démonstration montre que si  $y'(t) = f(y(t)) > 0$  sur un intervalle de la forme  $]\alpha, +\infty[$  et que  $y$  est bornée sur un intervalle  $[a, +\infty[$ , alors  $y(t)$  converge vers un point d'équilibre lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

## 2 Systèmes différentiels et équations différentielles

### 2.1 Systèmes différentiels d'ordre 1, champs de vecteurs

On commence dans ce chapitre l'étude des *systèmes d'équations différentielles*, ou *systèmes différentiels*, d'ordre 1, c'est-à-dire de familles d'équations différentielles :

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(t, y_1, \dots, y_n), \\y_2' &= f_2(t, y_1, \dots, y_n), \\&\vdots \\y_n' &= f_n(t, y_1, \dots, y_n)\end{aligned}$$

où les  $f_i$  sont des fonctions de  $(n + 1)$ -variables à valeurs réelles,  $f_i : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$  où  $I$  intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . En posant  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  et  $F(t, Y) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$ , le système peut se réécrire

$$Y' = F(t, Y).$$

On pourra également noter les vecteurs en ligne pour gagner de la place. L'équation est identique à (1.1) :  $y' = f(t, y)$ , sauf que la fonction réelle  $y$  est remplacée par une fonction vectorielle  $Y$ .

**Définition 2.1.** Un système différentiel d'ordre 1 est l'équation

$$Y' = F(t, Y) \tag{2.1}$$

où  $F$  est une fonction continue sur  $I \times U$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  étant un intervalle ouvert et  $U$  étant un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Un couple  $(J, Y)$ , où  $J \subset I$  est un intervalle ouvert  $Y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$ , est une solution de (2.1) si

- (1) Pour tout  $t \in J$ ,  $Y(t) \in U$ ,
- (2) Pour tout  $t \in J$ ,  $Y'(t) = F(t, Y(t))$ .

EXEMPLE 2.2. Le système de Lotka et Volterra que nous avons vu dans l'introduction

$$\begin{cases} x' &= ax - bxy \\ y' &= -cy + dxy \end{cases}$$

est de la forme  $Y' = F(t, Y)$  où  $F(t, (y_1, y_2)) = (ay_1 - by_1y_2, -cy_1 + dy_1y_2)$ ,  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est de classe  $C^\infty$ .

On peut interpréter un système différentiel comme un *champ de vecteur dont on cherche les courbes intégrales*. Considérons un système différentiel d'ordre 1 *autonome*, c'est-à-dire

$$Y' = F(Y),$$

où  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ne dépend plus de  $t$ . On peut alors se représenter  $Y \mapsto F(Y)$  comme la donnée, en chaque point  $Y \in U$  d'un vecteur de coordonnées  $(f_1(Y), \dots, f_n(Y))$  où  $F = (f_1, \dots, f_n)$ .

EXEMPLE 2.3. Au système  $(x' = y, y' = -x)$ , correspond le champ de vecteur  $F(x, y) = (y, -x)$ . Dessinons en quelques points :

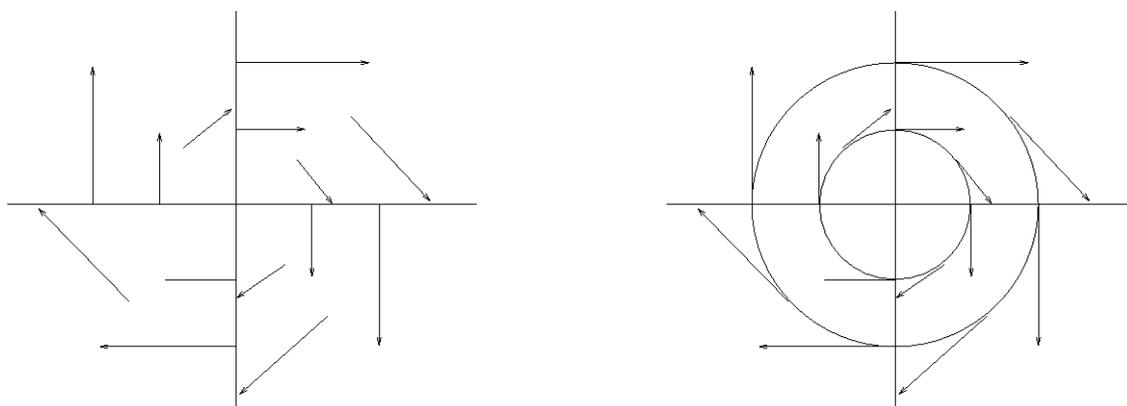


FIGURE 3.2 – Champs de vecteur et ses courbes intégrales

Résoudre  $Y' = F(Y)$  revient à trouver les trajectoires  $t \mapsto Y(t) \in \mathbb{R}^n$  dont le vecteur vitesse  $Y'(t)$  au point  $Y(t)$  coïncide avec le champ de vecteurs en ce point, i.e.  $Y'(t) = F(Y(t))$ . Sur l'exemple (2.3), les trajectoires (les courbes intégrales) sont des cercles  $(x(t) = a \cos(t), y(t) = a \sin(-t))$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Un système différentiel d'ordre 1 général  $Y' = F(t, Y)$  peut s'interpréter de la même manière mais avec un champ de vecteur dépendant du temps...donc pas facile à visualiser.

## 2.2 Equations différentielle d'ordre supérieur

**Définition 2.4.** Une équation différentielle d'ordre  $n$  est l'équation

$$y^{(n)} = F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.2)$$

où  $F$  est continue de  $I \times U$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  étant un intervalle ouvert,  $U$  étant un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Un couple  $(J, y)$ , où  $J \subset I$  est un intervalle ouvert et  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^n$ , est solution de (2.2) si

- (1) Pour tout  $t \in J$ ,  $(y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in U$ ,
- (2) Pour tout  $t \in J$ ,  $y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ .

Une équation différentielle d'ordre  $n$  est équivalente à un système différentiel d'ordre 1 sur  $\mathbb{R}^n$ . Considérons d'abord l'exemple

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t).$$

Supposons que  $(J, y)$  soit une solution,  $y$  étant donc de classe  $C^2$ . Posons  $y_1 = y$  et  $y_2 = y'$  définie sur  $J$  de classe  $C^1$ . Alors sur  $J$ ,

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y'' = -a(t)y' - b(t)y + f(t) = -a(t)y_2 - b(t)y_1 + f(t) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -a(t)y_2(t) - b(t)y_1(t) + f(t) \end{pmatrix}$$

un système différentiel à deux équations,  $Y' = G(t, Y)$  où on a posé  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$  et

$$G(t, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -b(t)y_1 - a(t)y_2 + f(t) \end{pmatrix}.$$

Plus généralement,

**Proposition 2.5.** Soit  $F : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue,  $I \subset \mathbb{R}$  étant un intervalle ouvert et  $U$  étant un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $G : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$G(t, x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ F(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

- (1) Si  $(J, y)$  est solution de l'équation différentielle d'ordre  $n$

$$y^{(n)} = F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.3)$$

alors  $(J, Y)$ , où  $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$  est solution du système différentiel d'ordre 1

$$Y' = G(t, Y) \quad (2.4)$$

(2) Inversement, si  $(J, Y)$  est solution de (2.4), avec  $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$  alors  $(J, y_1)$  est solution de (2.3).

### 2.3 Cauchy-Lipschitz pour les systèmes

Nous avons pour les systèmes différentiels un théorème de Cauchy-Lipschitz, en tout point semblable à celui énoncé pour les équations différentielles :

**Théorème 2.6** (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les systèmes). Soit  $F : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$  continue, où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle ouvert et  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $t_0 \in I$  et  $Y_0 \in U$ . Si  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $I \times U$  alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' &= F(t, Y) \\ Y(t_0) &= Y_0, \end{cases}$$

admet une unique solution maximale  $(J, Y)$ .

La preuve de ce théorème sera donnée plus tard. Ce théorème nous suggère quelle est la bonne notion de problème de Cauchy pour une équation différentielle d'ordre  $n$  :

**Définition 2.7.** Soit  $F : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$  continue, où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle ouvert et  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $t_0 \in I$  et  $(y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$ . Résoudre le problème de Cauchy en  $t_0$

$$\begin{cases} y^{(n)} &= F(t, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) &= y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \quad (2.5)$$

c'est trouver toutes les solutions maximales  $(J, y)$  de (2.5) telle que  $t_0 \in J$  et  $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$ .

D'après 2.5 et 2.6, si  $F$  est de classe  $C^1$ , (2.5) a une unique solution maximale. En effet, on sait bien par exemple qu'une solution de l'équation de Newton  $mx''(t) = f(x(t))$  est déterminée de manière unique si on fixe une position initiale  $x(0)$  et une vitesse initiale  $x'(0)$ .

## 2.4 Systèmes différentiels linéaires

Parmi les systèmes différentiels, les systèmes différentiels *linéaires à coefficients constants* jouent un rôle très important. D'abord parce qu'on sait les résoudre complètement. Ensuite parce qu'on pourra souvent les utiliser comme approximation locale d'un système différentiel quelconque, par un procédé qu'on appelle la *linéarisation*.

### 2.4.1 Définition et Cauchy-Lipschitz

On a déjà vu une équation différentielle *linéaire*, l'équation (1.2) :  $y' = a(t)y + b(t)$ . On généralise ceci à un système différentiel sur  $\mathbb{R}^n$ , en remplaçant  $a(t)$  par une matrice  $n \times n$   $b(t)$  par une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Rappelons qu'on note  $M_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées  $n \times n$  à coefficients réels. C'est un espace vectoriel de dimension  $n^2$ .

**Définition 2.8.** Soit  $F : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue, où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle ouvert et  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que le système différentiel

$$Y' = F(t, Y)$$

est **linéaire** lorsqu'il existe deux fonctions  $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  et  $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , continues, telles que

$$F(t, X) = A(t)X + B(t).$$

EXEMPLE 2.9.

$$\begin{cases} x' &= x + 3ty + t^2 \\ y' &= t^2x - y + t^3, \end{cases}$$

se met sous la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 3t \\ t^2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Mentionnons tout de suite un résultat indiquant la spécificité des systèmes linéaires, une version plus forte du théorème de Cauchy-Lipschitz :

**Théorème 2.10** (Cauchy-Lipschitz, version système différentiel linéaire). Soit  $F : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue, où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle ouvert et  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $t_0 \in I$  et  $Y_0 \in U$ . Si  $Y' = F(t, Y)$  est un système différentiel linéaire, i.e. si  $F(t, X) = A(t)X + B(t)$ , avec  $t \mapsto A(t)$  et  $t \mapsto B(t)$  continues, alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' &= A(t)Y + B(t) \\ Y(t_0) &= Y_0, \end{cases} \quad (2.6)$$

admet une unique solution **globale**  $(J, Y)$ .

Insistons sur les 2 particularités : on n'a pas besoin de supposer la fonction  $F$  de classe  $C^1$  sur  $I \times U$ , la continuité suffit ; les solutions *maximales* sont automatiquement globales. En particulier il ne peut pas se produire le phénomène d'explosion en temps fini que nous avons observé pour l'équation logistique en section 1.3.2. Nous avons déjà montré ce théorème dans le cas  $n = 1$  : pour l'équation (1.2). Dans le chapitre suivant nous donnerons une preuve du théorème 2.10 dans le cas  $n = 2$ , pour des systèmes homogènes autonomes. Nous montrerons le théorème dans toute sa généralité plus tard.

On visite maintenant quelques propriétés fondamentales des systèmes différentiels linéaires.

### 2.4.2 Principe de superposition

**Définition 2.11.** Le système différentiel

$$Y' = A(t)Y \quad (2.7)$$

est appelé **système différentiel homogène** associé à (2.6).

On ne garde que la partie proprement linéaire de l'équation  $X \mapsto A(t)Y + B(t)$ . Son intérêt est le résultat suivant, simple mais très important :

**Proposition 2.12.** Si  $Y_1$  et  $Y_2$  sont deux solutions du système  $Y' = A(t)Y$ , alors pour tous  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$  est encore une solution. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de  $C^1(I, \mathbb{R})$ .

*Preuve:* C'est immédiat, car pour tout  $t \in I$  :

$$\begin{aligned} (\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2)'(t) &= \alpha_1 Y_1'(t) + \alpha_2 Y_2'(t) \\ &= \alpha_1 A(t)Y_1(t) + \alpha_2 A(t)Y_2(t) \\ &= A(t)[(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2)(t)] \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.13.** Si  $Y_1$  et  $Y_2$  sont deux solutions d'un système linéaire  $Y' = A(t)Y + B(t)$ , alors  $X = Y_1 - Y_2$  est solution du système linéaire homogène associé, i.e.  $X'(t) = A(t)X(t)$ .

*Preuve:* Pour  $t \in I$ ,

$$X'(t) = Y_1'(t) - Y_2'(t) = A(t)Y_1(t) + B(t) - (A(t)Y_2(t) + B(t)) = A(t)[Y_1(t) - Y_2(t)] = A(t)X(t).$$

□

On en déduit

**Proposition 2.14** (Principe de superposition). Soit  $Y_0$  une solution de l'équation (2.6). Toute solution de (2.6) est de la forme  $Y = Y_0 + X$ , où  $X$  est une solution du système homogène associé (2.7).

Pour trouver **TOUTES** les solutions de (2.6), il suffit donc de

- (1) trouver **TOUTES** les solutions  $X$  de l'équation homogène associée (2.7),
- (2) trouver **UNE** solution  $Y_0$  de l'équation (2.6).

Les solutions de (2.6) sont alors les  $Y_0 + X$ .

## Cours 4 : mercredi 6/02/13

### 2.4.3 Dimension de l'espace des solutions

On suppose toujours  $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  continue. D'après (2.12), l'ensemble  $\mathcal{S}_H$  des solutions de l'équation inéaire homogène  $Y' = A(t)Y$  est un sous-espace vectoriel de  $C^1(I, \mathbb{R})$ . Dans le cas  $n = 1$  (cf théorème 1.4), cet espace vectoriel est de dimension 1, engendré par  $t \mapsto e^{A(t)}$  (attention ici  $A(t)$  est une primitive de  $a(t)$  !). Le théorème de Cauchy-Lipschitz 2.6 nous permet d'étendre cette propriété à la dimension  $n$  :

**Proposition 2.15.** Soit  $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  continue. L'espace vectoriel  $\mathcal{S}_H$  des solutions du système linéaire homogène  $Y' = A(t)Y$  est de dimension  $n$ .

**Preuve:** Soit  $t_0 \in I$ . D'après le théorème 2.6, pour chaque  $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ , le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' &= A(t)Y \\ Y(t_0) &= Y_0, \end{cases}$$

admet une unique solution globale, qu'on note  $(I, Y_{X_0})$ . Définissons  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{S}_H$  par  $X_0 \mapsto Y_{X_0}$ . L'application est bijective car

- injective : si  $Y_{X_1} = Y_{X_2}$ , alors  $X_1 = Y_{X_1}(t_0) = Y_{X_2}(t_0) = X_2$ ,

- surjective : si  $Y \in \mathcal{S}_H$ ,  $Y = \phi(Y(t_0)) = Y_{Y(t_0)}$  par unicité de la solution au problème de Cauchy.

De plus,  $\phi$  est linéaire : soit  $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ ; soit  $Y_X, Y_{X_1}$  et  $Y_{X_2}$  les images par  $\phi$  de  $X, X_1$  et  $X_2$ , respectivement. Par définition,  $Y_X(t_0) = X$ . Or l'application  $t \mapsto \alpha_1 Y_{X_1}(t) + \alpha_2 Y_{X_2}(t)$  est solution de  $Y' = A(t)Y$  par 2.12, et vérifie la même donnée initiale :

$$\alpha_1 Y_{X_1}(t_0) + \alpha_2 Y_{X_2}(t_0) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = X.$$

Par unicité de la solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' &= A(t)Y \\ Y(t_0) &= X, \end{cases}$$

il s'ensuit que  $Y_X(t) = \alpha_1 Y_{X_1}(t) + \alpha_2 Y_{X_2}(t)$  pour tout  $t \in I$ . On a donc bien  $\phi(X) = Y_X = \alpha_1 Y_{X_1} + \alpha_2 Y_{X_2} = \alpha_1 \phi(X_1) + \alpha_2 \phi(X_2)$ . Il s'ensuit que  $\phi$  est un isomorphisme d'espace vectoriel,

et que

$$\dim \mathcal{S}_H = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

□

### 3 Systèmes planaires

#### 3.1 Définition

Il s'agit des systèmes linéaires  $X' = A(t)X + B(t)$  où  $X(t) \in \mathbb{R}^2$ . On ne considèrera que le cas homogène et autonome, c'est-à-dire  $X' = AX$  où  $A \in M_2(\mathbb{R})$ , ce qui donne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

où  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Puisque la fonction  $(t, X) \mapsto AX$  est définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  et est continue (et même  $C^\infty$ ). Le théorème de Cauchy-Lipschitz 2.10 s'écrit donc :

**Théorème 3.1.** Soit  $A \in M_2(\mathbb{R})$ , alors pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $X_0 \in \mathbb{R}^2$ , le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' &= AX \\ X(t_0) &= X_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

admet une unique solution globale  $(\mathbb{R}, X)$ .

On va en détailler la preuve dans ce chapitre.

#### 3.2 Rappels d'algèbre linéaire

On rappelle quelques notions de base sur les matrices et, chemin faisant, on donne quelques applications immédiates aux systèmes différentiels linéaires. On rappelle qu'une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est *inversible* s'il existe une matrice  $B \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $AB = BA = I_n$ . S

**Proposition 3.2.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Sont équivalents :

- (1)  $A$  est inversible.
- (2) Les colonnes de  $A$  sont linéairement indépendantes.
- (3) Les lignes de  $A$  sont linéairement indépendantes.
- (4)  $\det(A) \neq 0$ .
- (5) L'équation  $AX = 0$  admet  $X = 0$  comme unique solution.
- (6) Pour tout  $Y \in \mathbb{R}^n$ , l'équation  $AX = Y$  admet une unique solution.

Rappelons que des vecteurs  $V_1, \dots, V_k$  sont *linéairement indépendants* si l'égalité  $\alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_k V_k = 0$  implique  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ . Une conséquence de cette proposition est que si  $A$  est inversible, le système linéaire  $X' = AX$  admet un seul point d'équilibre :  $X = 0$ .

**Définition 3.3.** On dit que deux matrices  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  sont **semblables** s'il existe une matrice inversible  $P \in M_n(\mathbb{R})$  telle que

$$P^{-1}AP = B.$$

L'intérêt pour les systèmes différentiels est le suivant. Supposons que  $P^{-1}AP = B$ .

**Proposition 3.4.** Soit  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$ ; posons  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ . Alors

$$X' = AX \Leftrightarrow Y' = BY.$$

Preuve: ( $\Rightarrow$ ) Découle de

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APP^{-1}X = BY,$$

Réciproque identique. □

L'application de ceci à la résolution de  $X' = AX$  consiste à trouver une matrice semblable  $B$  pour laquelle il est plus simple de résoudre  $Y' = BY$ . Nous verrons que c'est particulièrement simple si  $B$  est diagonale, c'est-à-dire

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**Définition 3.5.** Un vecteur non nul  $V_0$  est appelé **vecteur propre** de  $A$  si  $AV = \lambda V$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Le réel  $\lambda$  est appelé **valeur propre** de  $A$ .

Supposons que  $A$  admette un vecteur propre  $V_0$  de valeur propre  $\lambda$ . Considérons la fonction  $X(t) = e^{\lambda t}V_0$ , alors

$$\begin{aligned} X'(t) &= \lambda e^{\lambda t}V_0 \\ &= e^{\lambda t}A.V_0 \\ &= Ae^{\lambda t}V_0 = A.X(t) \end{aligned}$$

C'est une solution de  $X' = AX$ , définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , qui satisfait  $X(0) = e^0V_0 = V_0$ .

**Proposition 3.6.** Supposons que  $V_0$  soit vecteur propre de  $A$  de valeur propre  $\lambda$ . Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$ , alors  $(\mathbb{R}, X(t) = e^{\lambda(t-t_0)}V_0)$  est une solution globale du problème de Cauchy  $X' = AX, X(t_0) = X_0$

EXEMPLE 3.7.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , alors  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  est vecteur propre de valeur propre 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc  $X(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  est solution de  $X' = AX$ .

**Définition 3.8.** On dit qu'une matrice  $A$  est *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale, tel que

$$P^{-1}AP = D.$$

Le lien entre diagonalisation et vecteurs propres est le suivant :

**Théorème 3.9.**  $A$  est diagonalisable si et seulement si elle admet  $n$  vecteurs propres  $\{V_1, \dots, V_n\}$  linéairement indépendants.

**Preuve:**

( $\Rightarrow$ ) Supposons qu'il existe  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale telle que  $P^{-1}AP = D$ . Notons

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ligne } j$$

le  $i$ -ème vecteur de la base canonique. Posons  $V_j = P.E_j$ , alors  $V_j$  est la  $j$ -ème colonne de  $P$ . On a  $A = PDP^{-1}$  donc

$$A.V_j = PDP^{-1}.V_j = PD.E_j = P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i P.E_j = \lambda_j V_j.$$

Les  $V_j$  sont donc des vecteurs propres. Ils sont linéairement indépendants d'après la proposition 3.2 puisque  $P$  est inversible.

( $\Leftarrow$ ) Supposons donnés  $n$  indépendants  $\{V_1, \dots, V_n\}$ , de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  respectivement. Formons  $P = (V_1 \ \dots \ V_n)$  la matrice dont les colonnes sont les  $V_i$ . Par la proposition 3.2,  $P$  est inversible. Un calcul similaire à celui au dessus donne

$$P^{-1}AP.E_j = \lambda_j E_j \quad (3.3)$$

soit

$$P^{-1}AP I_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

d'où  $P^{-1}AP = D$  une matrice diagonale.  $\square$

**Lemme 3.10.** Soit  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  des valeurs propres 2 à 2 distinctes, et  $\{V_1, \dots, V_k\}$  des vecteurs propres associés. Alors la famille  $\{V_1, \dots, V_k\}$  est linéairement indépendante.

**Preuve:** Par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 1$  il n'y a rien à montrer. Pour  $k \geq 2$ , supposons que  $\{V_2, \dots, V_k\}$  soient indépendants mais  $V_1 = \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_k V_k$ . On a

$$AV_1 = \lambda_1 V_1 = \lambda_1 \alpha_2 V_2 + \dots + \lambda_1 \alpha_k V_k.$$

On a aussi

$$AV_1 = \lambda_2 \alpha_2 V_2 + \dots + \lambda_k \alpha_k V_k$$

d'où

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \alpha_2 V_2 + \dots + (\lambda_1 - \lambda_k) \alpha_k V_k$$

et puisque  $\lambda_1 - \lambda_i \neq 0$  pour  $i \geq 2$  on a  $\alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ .  $\square$

**Corollaire 3.11.** Si  $A$  admet  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , alors  $A$  est diagonalisable.

**Preuve:** Notons  $\{V_1, \dots, V_n\}$  les vecteurs propres associés. D'après le théorème 3.9 il suffit de montrer qu'ils sont indépendants. Or c'est prouvé par le lemme 3.10.  $\square$

Venons en à la recherche des vecteurs propres. On cherche  $V$  non nul tel que  $AV = \lambda V$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{R}$ , soit  $AV - \lambda V = 0$ , soit encore

$$(A - \lambda I_n)V = 0.$$

D'après la proposition 3.2 cela revient à dire que  $A - \lambda I_n$  n'est pas inversible et que  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ .

**Définition 3.12.** On appelle  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$  le **polynôme caractéristique**. C'est un polynôme de degré 2 en la variable  $\lambda$ .

La discussion ci-dessus nous dit que les racines de  $P_A(\lambda)$ , lorsqu'elles existent, sont des valeurs propres de  $A$ . Inversement toute valeur propre est racine de  $P_A(\lambda)$ .

**Proposition 3.13.**  $\lambda \in \mathbb{R}$  est valeur propre de  $A \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$ .

**Recherche de valeurs propres et vecteurs propres :** On commence donc par chercher les racines de  $P_A(\lambda)$ . Ensuite on cherche pour chaque valeur propre  $\lambda$  à résoudre  $(A - \lambda I_n)V = 0$ , d'inconnue  $V$ . On est sûr de trouver au moins une solution, et même une droite de solution car si  $AV = \lambda V$ ,  $A(\alpha V) = \alpha AV = \alpha \lambda V = \lambda(\alpha V)$ .

EXEMPLE 3.14. Reprenons la matrice  $A$  de l'exemple 3.7, alors  $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$  et  $P_A(\lambda) = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 4 = (\lambda-2)(\lambda+2)$ . Il y a 2 valeurs propres :  $+2$  et  $-2$ . Pour  $\lambda = 2$  on résoud  $\begin{pmatrix} 1-2 & 3 \\ 1 & -1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ce qui se réduit à une équation :  $-x + 3y = 0$ . On pose par exemple  $V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Pour  $\lambda = -2$  on résoud  $\begin{pmatrix} 1+2 & 3 \\ 1 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ce qui se réduit à l'équation :  $x - y = 0$  et on pose  $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On voit que  $V_1$  et  $V_2$  sont indépendants, comme prévu par le lemme 3.10. La matrice  $P = (V_1 \ V_2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  est inversible et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alors  $X(t) = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est solution globale de l'équation  $X' = AX$ .

**Remarque 3.15.** En général le polynôme caractéristique  $P_A(\lambda)$  n'a pas nécessairement deux racines réelles  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Il peut avoir une racine réelle double (par exemple si  $P_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ ) ou pas de racines réelles mais deux racines complexes conjuguées  $\alpha + \pm i\beta$  (par exemple si  $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ ). Néanmoins dans tous ces cas nous pourrons résoudre  $X' = AX$  à l'aide des vecteurs propres et valeurs propres de  $A$ , éventuellement complexes !

## Cours 5 : lundi 11/02/13

### 3.3 Résolution de $X' = AX$ et portraits de phase

Dans toute cette section, on suppose que  $A \in M_2(\mathbb{R})$ . Nous allons démontrer le théorème 3.1, à savoir que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} A' &= AX, \\ A(0) &= X_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

admet une unique solution globale. Pour cela on va montrer que  $A$  est semblable à l'une des 3 matrices  $B$  suivantes :

$$(i) \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (ii) \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (iii) \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si  $P^{-1}AP = B$ , le problème de Cauchy (3.4) équivaut, via  $Y_0 = P^{-1}X_0$  et  $Y(t) = P^{-1}X(t)$  (cf proposition 3.4), au problème

$$\begin{cases} Y' &= BY, \\ Y(0) &= Y_0. \end{cases} \quad (3.5)$$

qu'on résoudra plus facilement.

Le cas (i) correspond à une matrice  $A$  diagonalisable. Si  $A$  n'est pas diagonalisable, alors le polynôme caractéristique  $P_A(\lambda)$  a

- (1) deux racines complexes conjuguées  $\alpha \pm i\beta$ , ou
- (2) une racine réelle double  $\lambda$ , mais pas de base de vecteurs propres.

Ces deux cas correspondront à (ii), (iii) respectivement.

#### 3.3.1 $A$ est diagonalisable

Il existe  $P$  une matrice inversible telle que

$$P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(on n'exclut pas  $\lambda_1 = \lambda_2$ ). En notant  $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $Y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ , le système (3.5) est découpé en

$$\begin{cases} x' &= \lambda_1 x, x(0) = x_0 \\ y' &= \lambda_2 y, y(0) = y_0 \end{cases}$$

Chaque équation admet pour unique solution maximale

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) &= y_0 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

soit

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} Y_0, \quad (3.6)$$

d'où la solution globale unique de (3.4)

$$X(t) = PY(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} Y_0 = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1} X_0.$$

Enregistrons ceci :

**Théorème 3.16.** Soit  $A \in M_2(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ . Alors le problème de Cauchy (3.4) admet l'unique solution globale

$$X(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1} X_0$$

On a aussi la formulation équivalente suivante,

$$X(t) = \alpha_1 \cdot e^{\lambda_1 t} V_1 + \alpha_2 \cdot e^{\lambda_2 t} V_2$$

où  $V_1, V_2$  sont les vecteurs propres de  $A$  associés à  $\lambda_1, \lambda_2$  respectivement.

**Portraits de phase** Nous allons maintenant dessiner le *portrait de phase* du système  $X' = AX$ , c'est-à-dire des trajectoires dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , appelé *plan de phase*, représentatives de solutions  $t \mapsto X(t) = (x(t), y(t))$  du système. Pour cela, il suffit de dessiner le portrait de phase de  $Y' = BY$  et de lui appliquer la transformation  $P$ . Nous allons distinguer 3 cas, en supposant d'abord  $\lambda_1 < \lambda_2$  :

- (1)  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ,
- (2)  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ,
- (3)  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ .

Nous considérerons ensuite le cas  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2 = 0$ .

(4)  $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$  ou  $\lambda_1 < 0 = \lambda_2$ .

Commençons par (1). D'après (3.6) les solutions de  $Y' = BY$  sont

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

- Si  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , on trouve la solution stationnaire  $Y(t) = (0, 0)$ .
- Si  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0, \mathbb{R} \parallel \cdot \parallel_{\infty} t \mapsto (0, \alpha_2 e^{\lambda_2 t})$  décrit l'un des demi-axes de  $Oy \setminus \{(0, 0)\}$  (selon le signe de  $\alpha_2$ ). Puisque  $\lambda_2 > 0$ ,  $\|Y(t)\| \rightarrow \infty$  quand  $t \rightarrow \infty$  et  $\|Y(t)\| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow -\infty$ .
- Si  $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0, \mathbb{R} \parallel \cdot \parallel_{\infty} t \mapsto (\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, 0)$  décrit l'un des demi-axes de  $Ox \setminus \{(0, 0)\}$ . Puisque  $\lambda_1 < 0$ ,  $\|Y(t)\| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  et  $\|Y(t)\| \rightarrow \infty$  quand  $t \rightarrow -\infty$ .
- Si  $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0, \mathbb{R} \parallel \cdot \parallel_{\infty} t \mapsto Y(t)$  est dans un des 4 quadrants du plan (selon les signes de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ ). Lorsque  $t \rightarrow \infty$ ,

$$X(t) = e^{\alpha_2 t} \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \approx \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

la courbe est asymptote à l'axe  $Oy$ . Lorsque  $t \rightarrow \infty$ ,

$$Y(t) = e^{\alpha_1 t} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \end{pmatrix} \approx \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

la courbe est asymptote à l'axe  $Ox$ . On peut se faire une idée de la trajectoire en remarquant que, pour  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,

$$y^{\lambda_1} = x^{\lambda_2}, \text{ soit } y = x^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = x^{\gamma} \text{ pour } \gamma < 0.$$

Les autres cas, correspondant à  $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ , s'obtiennent en dilatant cette courbe (pour  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ ) et en faisant des symétries par rapport aux axes.

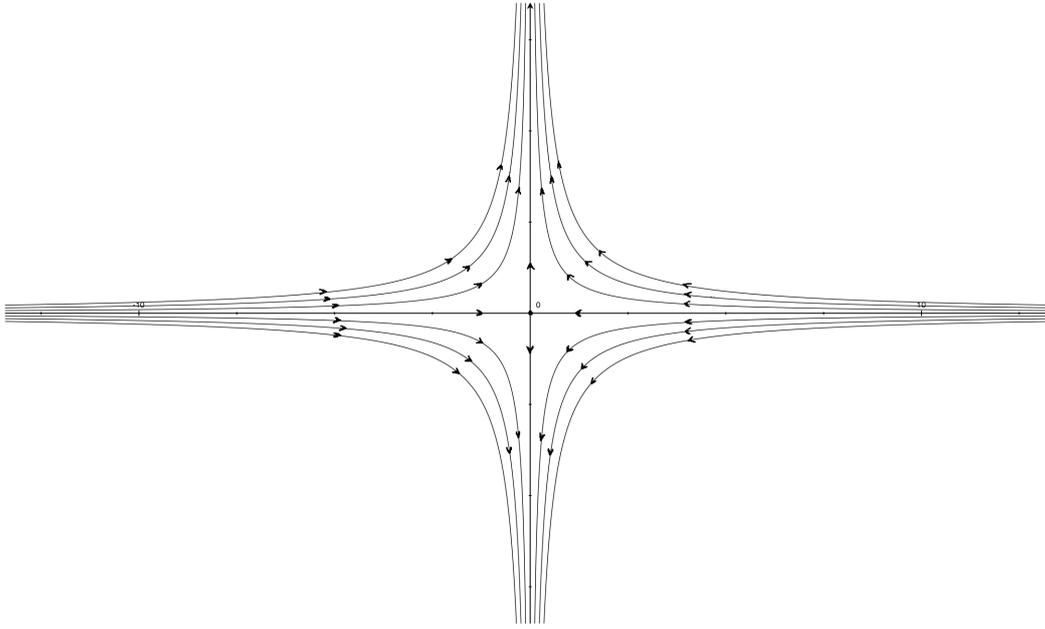
Le point d'équilibre est dit de type *selle*.

Revenons maintenant à  $X' = AX$ , de solution  $X(t) = PY(t)$ . Le portrait de phase de  $X' = AX$  s'obtient donc en appliquant la transformation linéaire  $P$  au portrait de phase de  $Y' = BY$  (voir figure 5.2).

Observons que les demi-axes trajectoires ont désormais pour vecteur directeur  $V_1 = PE_1$  et  $V_2 = PE_2$ .

(2) On suppose maintenant  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ . Le point d'équilibre est toujours  $(0, 0)$  et les demi-axes sont des trajectoires. Désormais toute solution  $(\mathbb{R}, Y)$  de  $Y' = BY$  vérifie  $Y(t) \rightarrow (0, 0)$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Pour déterminer de quelle manière les trajectoires s'approchent de  $(0, 0)$ , lorsque  $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ , on peut étudier le ratio  $y/x$ , lorsque  $t \rightarrow \infty$  :

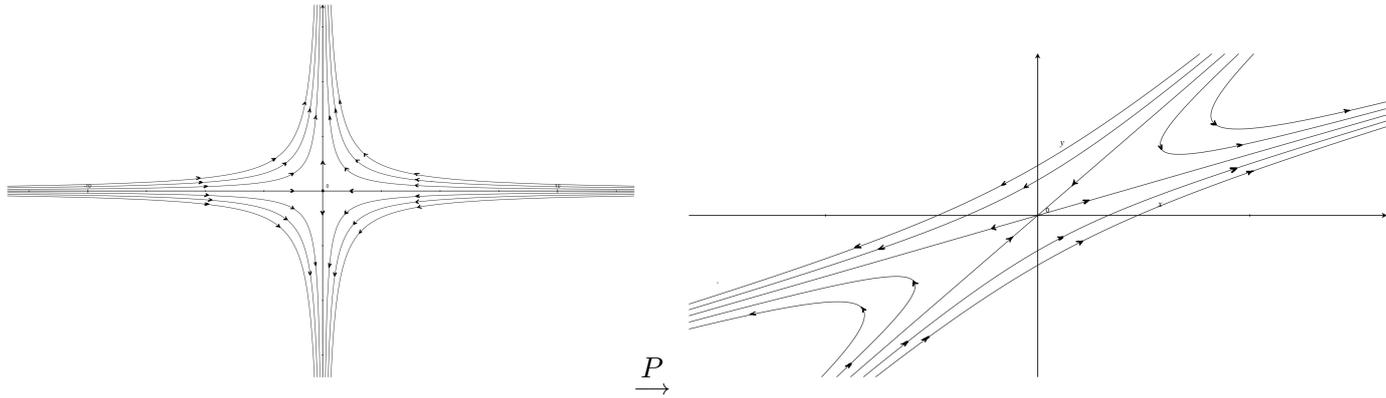
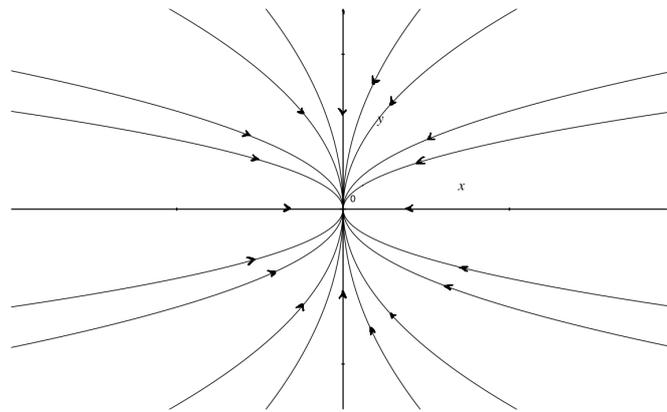
$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\alpha_2 e^{\lambda_2 t}}{\alpha_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \rightarrow \pm \infty,$$

FIGURE 5.1 – point d'équilibre de type *selle*

selon le signe de  $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ . Les trajectoires s'approchent donc de  $(0,0)$  tangentiellement à l'axe  $Oy$ . Inversement lorsque  $t \rightarrow -\infty$ ,  $\|Y(t)\| \rightarrow \infty$ , et  $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow 0$  indiquant que les trajectoires tendent à être horizontales.

Le point d'équilibre  $(0,0)$  est dit de type *puits*. On dit aussi que c'est un *noeud stable*. En général, un point d'équilibre  $X_*$  est dit *stable* si pour tout voisinage  $U$  de  $X_*$ , il existe un voisinage  $V \subset U$  de  $X_*$  tel que si  $X(t_0) \in V$ , alors  $X(t)$  reste dans  $U$  pour tout  $t \geq t_0$ . Sinon le point d'équilibre est dit *instable*.

Le portrait de phase de la matrice générale  $A$  s'obtient comme précédemment en appliquant la transformation  $P$  (voir figure 5.4). Les axes invariants ont pour direction  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

FIGURE 5.2 – P transforme  $Y' = BY$  en  $X' = AX$ FIGURE 5.3 – point d'équilibre de type *puits* ou *noeud stable*

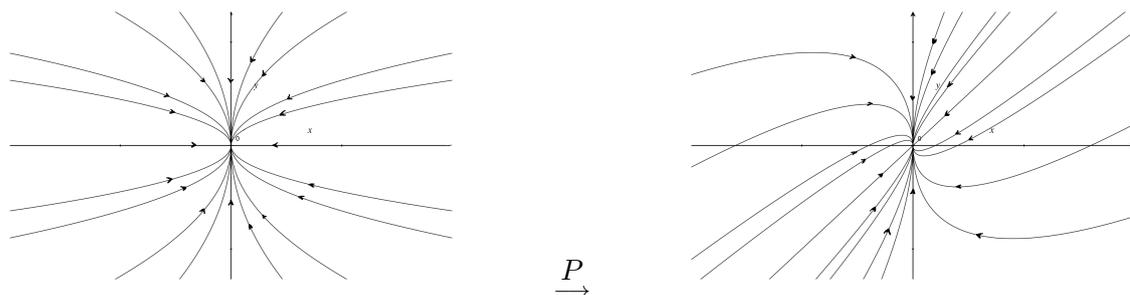
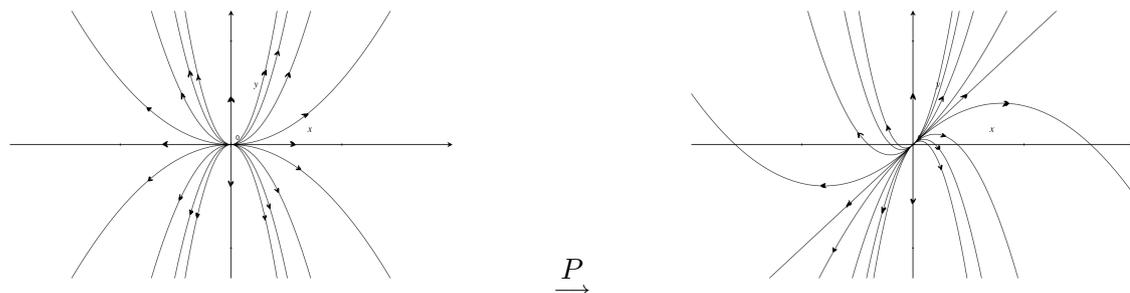
(3) On suppose  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ . Le portrait de phase est similaire à celui du cas (2), avec les flèches inversées. Les trajectoires s'approchent donc de  $(0, 0)$  tangentiellement à l'axe  $Ox$  (lorsque  $t \rightarrow -\infty$ ).

(4) Supposons  $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$ . Une solution  $Y(t)$  du système diagonal  $Y' = BY$  se réduit à  $Y(t) = (\alpha_1, \alpha_2 e^{\lambda_2 t})$ . On a une droite de points d'équilibre, constituée de l'axe des  $x$ , i.e. des points  $(\alpha_1, 0)$  (voir figure). Les autres trajectoires sont des demi-droites, convergeant vers l'axe des  $x$  lorsque  $t \rightarrow -\infty$ . Le portrait de phase de  $X' = AX$  s'obtient comme précédemment en appliquant la transformation  $P$ .

EXERCICE 3.17. Dessiner le cas général  $X' = AX$  et traiter le cas  $\lambda_1 < 0 = \lambda_2$ .

### 3.3.2 Valeurs propres complexes

On suppose ici que le polynôme caractéristique  $P_A(\lambda)$  a pour racines  $\alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$  ( $\beta \neq 0$ ).

FIGURE 5.4 –  $X' = AX$  : point d'équilibre de type *puits* ou noeud stableFIGURE 5.5 – point d'équilibre de type *source* ou *noeud instable*

EXEMPLE 3.18.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$  donne l'équation caractéristique  $\lambda^2 + 4 = 0$ , qui a pour racines  $\pm 2i$ .

On peut considérer  $\lambda = \alpha + i\beta$  comme une *valeur propre complexe* de  $A$  : il existe  $W \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  tel que  $AW = \lambda W$ . En effet, la proposition 3.2 est vraie pour des matrices  $A \in M_n(\mathbb{C})$  et dit  $(A - \lambda I_n)W = 0$  a des solutions non nulles. Notons que  $A\bar{W} = \overline{AW} = \overline{\lambda W} = \bar{\lambda}\bar{W}$ .

Sur l'exemple 3.18, avec  $\lambda = 2i$  la résolution de  $(A - 2iI_n)W = 0$  donne

$$\begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui conduit à  $y = 2ix$  soit  $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$ .

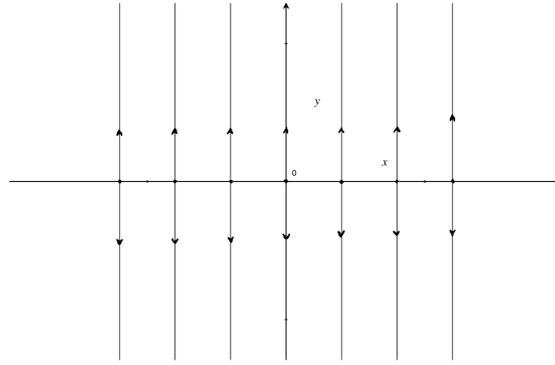
**Proposition 3.19.** Soit  $A \in M_2(\mathbb{R})$  admettant un vecteur propre  $W$  associé à la valeur propre  $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ,  $\beta \neq 0$ . Soit  $W_R, W_I \in \mathbb{R}^2$  tel que  $W = W_R + iW_I$ . Alors

- (1) Les vecteurs  $W_R$  et  $W_I$  sont linéairement indépendants (dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ )
- (2) Soit  $P = (W_R \quad W_I) \in M_2(\mathbb{R})$ , alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

- (3)  $Z(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}W$  est une solution complexe de  $X' = AX$ ,
- (4) Si on décompose  $Z(t) = Z_R(t) + iZ_I(t)$ , on obtient deux fonctions réelles  $Z_R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $Z_I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , qui sont solutions de  $X' = AX$ . On a

$$Z_R(t) = e^{\alpha t} (\cos(bt)W_R - \sin(bt)W_I), \quad Z_I(t) = e^{\alpha t} (\sin(bt)W_R + \cos(bt)W_I)$$

FIGURE 5.6 –  $Y' = BY$ ,  $\lambda_1 = 0$ 

**Preuve:** (1) Supposons que  $W_R = cW_I$  pour  $c \in \mathbb{R}$ . On a alors

$$A(W_R + iW_I) = (\alpha + i\beta)(W_R + iW_I) = (\alpha + i\beta)(c + i)W_I.$$

On a aussi

$$A(W_R + iW_I) = A(c + i)W_I = (c + i)AW_I$$

d'où l'égalité (en divisant par  $(c + i)$ ),  $(\alpha + i\beta)W_I = AW_I \in \mathbb{R}^2$ . Or  $W_I \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha + i\beta \notin \mathbb{R}$  par hypothèse, d'où la contradiction.

(2) On a  $PE_1 = W_R$  et  $PE_2 = W_I$ , puis

$$A(W_R + iW_I) = AW = (\alpha + i\beta)(W_R + iW_I) = \alpha W_R - \beta W_I + i(\alpha W_I + \beta W_R).$$

En identifiant partie réelle et imaginaire,

$$\begin{cases} AW_R &= \alpha W_R - \beta W_I, \\ AW_I &= \alpha W_I + \beta W_R. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} P^{-1}APE_1 &= \alpha E_1 - \beta E_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}, \\ P^{-1}APE_2 &= \alpha E_2 + \beta E_1 = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

soit

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

(3) On dérive.

(4) On a  $Z'(t) = Z'_R(t) + iZ'_I(t)$ , et puisque  $Z$  est une solution de  $X' = AX$  :

$$\begin{aligned} Z'(t) &= AZ(t) \\ &= A(Z_R(t) + iZ_I(t)) \\ &= AZ_R(t) + iAZ_I(t) \end{aligned}$$

d'où en identifiant partie réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} Z'_R(t) &= AZ_R(t), \\ Z'_I(t) &= AZ_I(t). \end{cases}$$

Les expressions de  $Z_R$  et  $Z_I$  s'obtiennent en développant

$$Z(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}W = e^{\alpha t}(\cos(bt) + i \sin(bt))(W_R + iW_I)$$

et en regroupant partie réelle et imaginaire.

□

On va en déduire la solution de (3.5), pour  $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ . Puisque  $B$  admet aussi  $\alpha + i\beta$  comme valeur propre,

$$\begin{pmatrix} \alpha - \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

conduit à  $-i\beta x + y = 0$  soit le vecteur propre  $E = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = E_1 + iE_2$ . Alors

$$\begin{aligned} Z(t) = e^{\lambda t}E &= e^{(\alpha+i\beta)t}(E_1 + iE_2) \\ &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t)E_1 - \sin(\beta t)E_2 + i(\sin(\beta t)E_1 + \cos(\beta t)E_2)) \\ &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{pmatrix} + ie^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{pmatrix} \\ &= Z_R(t) + iZ_I(t) \end{aligned}$$

Par linéarité (proposition 2.12), pour tout  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ,  $Y(t) = \alpha_1 Z_R(t) + \alpha_2 Z_I(t)$  est également solution, d'où l'expression générale :

$$Y(t) = \alpha_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

On en déduit la solution globale de (3.5)

$$Y(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Il reste à démontrer l'unicité de cette solution (si l'on ne veut pas utiliser l'argument de dimension de la proposition 2.15, qui repose sur le théorème de Cauchy-Lipschitz 2.10).

**Preuve:** Supposons que  $X(t)$  soit une autre solution du problème de Cauchy. Ecrivons  $X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$  dans la base  $\{E_1, E_2\}$ . Puisque  $X(0) = \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  on a  $u(0) = x_0$  et  $v(0) = y_0$ . Formons la fonction à valeurs complexes

$$f(t) = (u(t) + iv(t))e^{(-\alpha+i\beta)t},$$

définie sur  $\mathbb{R}$ . Montrons que  $f'(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$f(t) = [(u' + iv') + (u + iv)(-\alpha + i\beta)](t)e^{(-\alpha + i\beta)t} \quad (3.9)$$

Pour calculer  $u'$  et  $v'$ , écrivons que  $X' = BX$  :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\alpha + v\beta \\ -u\beta + v\alpha \end{pmatrix}$$

et en reportant dans (3.9) on a bien  $f'(t) = 0$ . Il s'ensuit que  $f(t) = f(0)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , d'où

$$(u(t) + iv(t))e^{(-\alpha + i\beta)t} = u(0) + iv(0) = x_0 + iy_0$$

d'où

$$u(t) + iv(t) = e^{\alpha t} e^{-i\beta t} (x_0 + iy_0) = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) - \sin(\beta t))(x_0 + iy_0)$$

puis par identification des parties réelles et imaginaires :

$$X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} x_0 \cos(\beta t) + y_0 \sin(\beta t) \\ -x_0 \sin(\beta t) + y_0 \cos(\beta t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = Y(t)$$

d'après (3.8). □

On peut alors à l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy pour la matrice  $A$  de départ :

**Théorème 3.20.** Soit  $A \in M_2(\mathbb{R})$  admettant une valeur propre complexe  $\alpha + i\beta$  ( $\beta \neq 0$ ),  $W = W_R + iW_I$  un vecteur propre complexe associé. Alors le problème de Cauchy (3.4) admet l'unique solution globale

$$X(t) = P e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} P^{-1} X_0$$

où  $P$  est formée des vecteurs  $W_R$  et  $W_I$ .

EXEMPLE 3.21. Sur l'exemple 3.18, la solution complexe est

$$Z(t) = e^{2it} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t + i \sin 2t \\ 2i \cos 2t - 2 \sin 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -2 \sin(2t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ 2 \cos(2t) \end{pmatrix}$$

conduit à la solution générale réelle

$$\begin{aligned} X(t) &= \alpha_1 \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -2 \sin(2t) \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ 2 \cos(2t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos(2t) + \alpha_2 \sin(2t) \\ -2\alpha_1 \sin(2t) + 2\alpha_2 \cos(2t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} X(0) \end{aligned}$$

## Cours 6 : mercredi 13/02/13

**Portraits de phase** Traçons d'abord celui de  $Y' = BY$ . Notons  $R_{\beta t}$  la matrice  $\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}$ . C'est la matrice d'une rotation d'angle  $\beta$  dans le sens horaire. D'après (3.8),  $Y(t) = e^{\alpha t} R_{\beta t} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ .

Il y a essentiellement 3 cas à considérer :  $\alpha = 0$ ,  $\alpha < 0$  et  $\alpha > 0$ .

$\alpha = 0$  Les trajectoires de  $X(t)$  sont des *cercles* centrés en  $(0, 0)$ , parcourues dans le sens horaire si  $\beta > 0$ . On dit que le point d'équilibre est un *centre*.

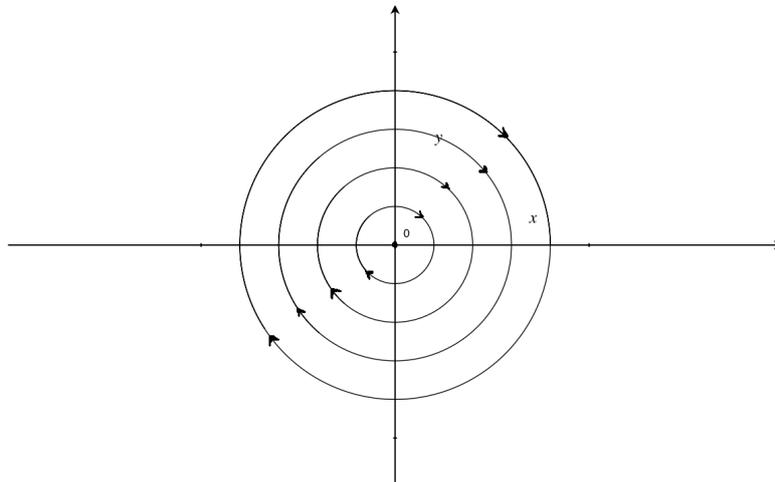
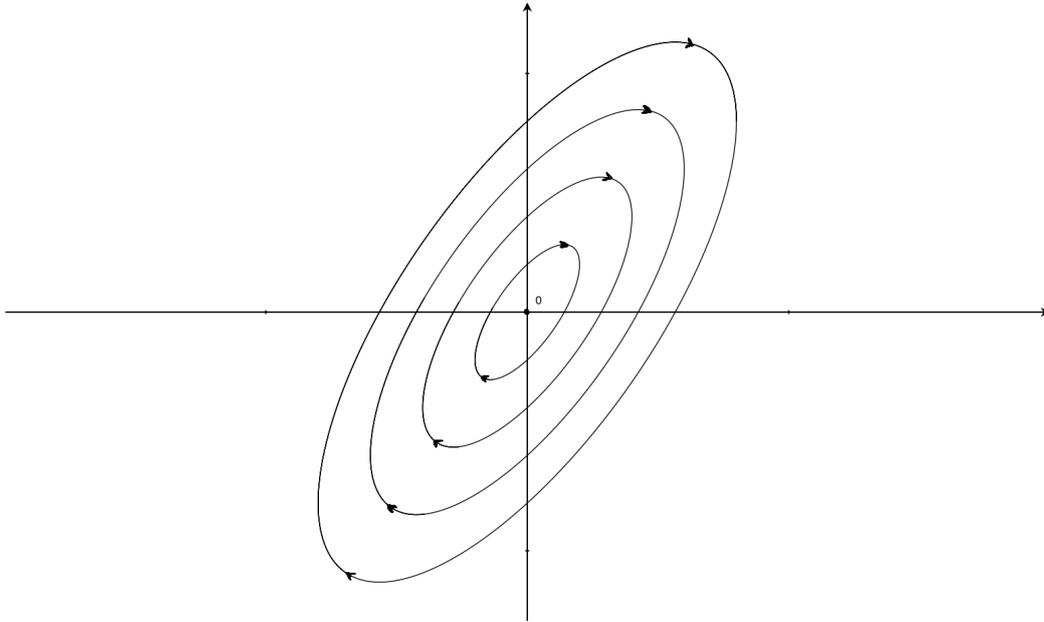


FIGURE 6.1 –  $Y' = BY$  : Centre

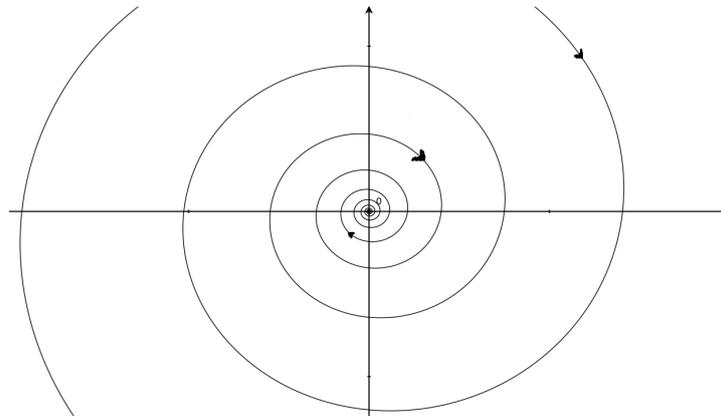
Si on applique la transformation linéaire  $P$  pour revenir au système  $X' = AX$ , les cercles sont déformés en ellipses :

On dit que  $(0, 0)$  est un *centre*.

$\alpha < 0$  : Les trajectoires de  $X(t)$  décrivent des spirales, centrées en  $(0, 0)$ . On a  $\|X(t)\| \rightarrow \infty$  quand

FIGURE 6.2 –  $X' = AX$  : Centre

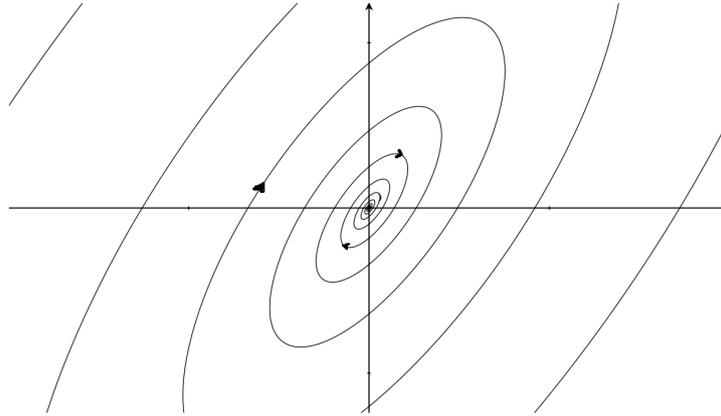
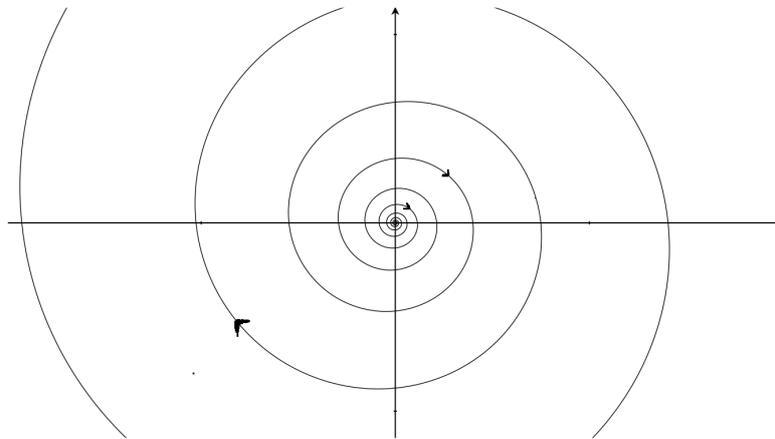
$t \rightarrow -\infty$  et  $X(t) \rightarrow (0, 0)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Elle sont parcourues dans le sens horaire si  $\beta > 0$ . Le point d'équilibre est dit de type *spirale puits* ou *foyer stable*.

FIGURE 6.3 –  $Y' = BY$  : Spirale-puits ou foyer stable

Après application d'une transformation linéaire  $P$  :

$\alpha > 0$  : Les trajectoires de  $X(t)$  décrivent des spirales, dites *spirales sources*, centrés en  $(0, 0)$  car s'éloignant de  $(0, 0)$ . On a  $\|X(t)\| \rightarrow \infty$  quand  $t \rightarrow +\infty$  et  $X(t) \rightarrow (0, 0)$  quand  $t \rightarrow -\infty$  Elle sont parcourues dans le sens horaire si  $\beta > 0$ .

Comme dans la section 3.3.1, les portrait de phase de  $X' = AX$  s'obtiennent an appliquant

FIGURE 6.4 –  $X' = AX$  : Spirale-puits ou foyer stableFIGURE 6.5 –  $Y' = BY$  : Spirale-source ou foyer instable

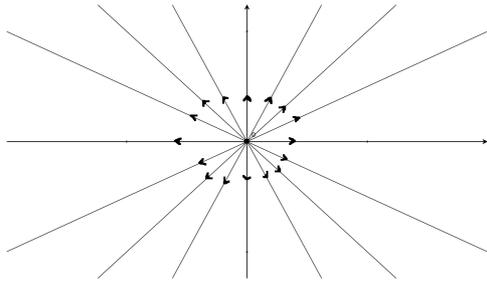
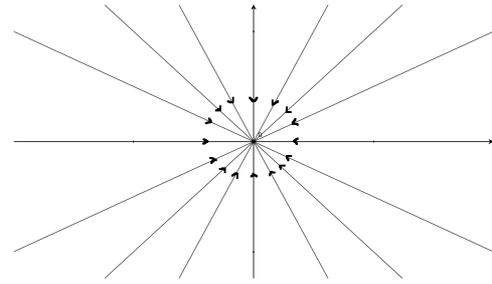
la transformation  $P = (V_R \ V_I)$ , où  $V_R + iV_I$  est un vecteur propre complexe de  $A$ , à ceux de  $X' = BX$ .

### 3.3.3 Valeur propre réelle répétée

On suppose que  $A$  n'a qu'une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{R}$ , racine double du polynôme caractéristique  $P_A(\lambda)$ .

Le cas le plus simple est lorsque  $A$  admet deux vecteurs propres indépendants  $V_1, V_2$  pour cette valeur propre, c'est-à-dire  $AV_1 = \lambda V_1$  et  $AV_2 = \lambda V_2$ . Il est facile alors de voir que, par linéarité,  $AV = \lambda V$  pour tout vecteur  $V$ , i.e.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

FIGURE 6.6 –  $\lambda > 0$ FIGURE 6.7 –  $\lambda < 0$ 

Les solutions sont alors de la forme  $X(t) = \alpha e^{\lambda t} V$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

La situation est plus intéressante si  $A$  admet un vecteur propre  $V$  pour  $\lambda$ , mais pas d'autre vecteur propre indépendant de  $V$ . Essayons comme précédemment de nous ramener à une matrice "canonique". Prenons  $W$  un vecteur non colinéaire à  $V$ , de sorte que  $\{V, W\}$  soit une base. Notons que  $W$  n'est pas un vecteur propre de  $A$ . On a

$$\begin{aligned} AV &= \lambda V, \\ AW &= aV + bW, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \end{aligned}$$

**Lemme 3.22.** On a  $b = \lambda$ .

*Preuve:* Considérons un vecteur  $W + cV$ . On a

$$\begin{aligned} A(W + cV) &= aV + bW + c\lambda V \\ &= (a + c\lambda)V + bW \\ &= b(W + cV) \end{aligned}$$

si  $bc = a + c\lambda$ , soit  $c(b - \lambda) = a$ . Si  $b \neq \lambda$ , on peut poser  $c = a/(b - \lambda)$  et  $W + cV$  devient un vecteur propre de  $A$ , non colinéaire à  $V$ , contrairement à l'hypothèse initiale. Il s'ensuit que  $b = \lambda$ .  $\square$

Posons alors  $U = \frac{W}{a}$ , de sorte que  $\{V, U\}$  soit une base de  $\mathbb{R}^2$  et qu'on ait :

$$\begin{cases} AV = \lambda V \\ AU = U + \lambda V \end{cases}$$

En posant  $P = (V \ U)$ , on a alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} =: B$$

Comme précédemment on résout le problème de Cauchy (3.5). Le système est simplement

$$x' = \lambda x + y, \quad (3.9)$$

$$y' = \lambda y. \quad (3.10)$$

qu'on résoud comme suit. La solution générale de (3.10) est  $y(t) = c_2 e^{\lambda t}$ , pour  $c_2 \in \mathbb{R}$ . En reportant cette expression dans (3.9), il vient

$$x' = \lambda x + c_2 e^{\lambda t}.$$

C'est une équation linéaire du 1er ordre avec second membre, que nous avons résolu en 1.2.2. On trouve

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Si  $Y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ , il vient  $c_1 = x_0, c_2 = y_0$ , d'où l'unicité de la solution au problème de Cauchy (3.5). La solution s'écrit

$$Y(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

**Portraits de phase** Il y a deux cas à considérer,  $\lambda < 0$  ou  $\lambda > 0$ .

$\lambda > 0$  : Lorsque  $t \rightarrow -\infty$ ,  $X(t) \rightarrow (0, 0)$ . De plus, quand  $t \rightarrow -\infty$ ,

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{c_2}{c_1 + t c_2} \rightarrow 0,$$

donc toutes les trajectoires s'approchent de  $(0, 0)$  tangentiellement au vecteur  $(1, 0)$ . Pour tout  $c_2 > 0$ ,  $y(t) > 0$  pour tout  $t$  alors que  $x(t) > 0$  pour tout  $t$  grand et  $x(t) < 0$  pour tout  $t \ll 0$  (quelque soit  $c_1$ ). Pour tout  $c_2 < 0$ ,  $y(t) < 0$  pour tout  $t$  alors que  $x(t) < 0$  pour tout  $t$  grand et  $x(t) > 0$  pour tout  $t \ll 0$  (quelque soit  $c_1$ ). D'où le dessin :

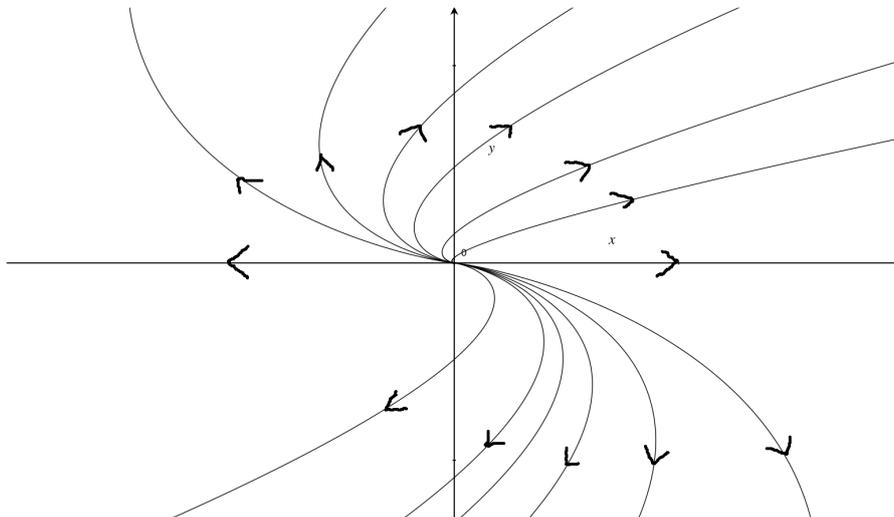


FIGURE 6.8 – Noeud stable dénuclé

$\lambda < 0$  : fait en cours.

**Théorème 3.23.** Soit  $A \in M_2(\mathbb{R})$  admettant une valeur propre double  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Supposons que  $A \neq \lambda I_2$ , soit  $V$  un vecteur propre de  $A$  et  $U$  un vecteur non colinéaire à  $V$ . Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$  et

$X_0 \in \mathbb{R}^2$ , alors le problème de Cauchy (3.4) admet une unique solution globale  $(\mathbb{R}, X)$ , donnée par

$$X(t) = Pe^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}X_0$$

où  $P = (V \ U)$ .

**Preuve:** On a  $X(t) = PY(t)$ . Il suffit d'appliquer  $P$  à l'égalité (3.11), et d'écrire  $Y_0 = P^{-1}X_0$ .  $\square$

### 3.4 Bilan : classification des systèmes planaires

Pour une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

l'équation caractéristique a la forme

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

Notons  $D = ad - bc = \det A$  et  $T = a + d = \text{tr} A$  (la trace de  $A$ ). Rappelons que la trace vérifie  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ , et donc  $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(APP^{-1}) = \text{tr}(A)$ . En particulier, si  $A$  est diagonalisable de valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$ ,  $\text{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$ .

Si  $D \neq 0$ , le système  $X' = AX$  admet un unique point d'équilibre  $X = 0$ . On peut déterminer son type uniquement avec les nombres  $D$  et  $T$ . Notons que  $T^2 - 4D$  est le discriminant.

**Théorème 3.24** (Classification des systèmes planaires). Soit  $D = \det A$  et  $T = \text{tr} A$ , considérons le système

$$X' = AX.$$

- (1) Si  $D < 0$ , alors  $X = 0$  est un point selle du système
- (2) Si  $D > 0$  et  $T^2 - 4D \geq 0$  alors  $X = 0$  est un noeud. Il est stable si  $T < 0$  (puits), instable si  $T > 0$  (source).
- (3) Si  $D > 0$  et  $T^2 - 4D < 0$ , si  $T \neq 0$ , alors  $X = 0$  est un foyer. Il est stable si  $T < 0$  (spirale puits), instable si  $T > 0$  (spirale source).
- (4) Si  $D > 0$  et  $T = 0$ ,  $X = 0$  est un centre.

**Preuve:**

(1) Si  $D < 0$ ,  $T^2 - 4D > 0$  donc  $A$  deux racines réelles  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Puisque  $D = \lambda_1\lambda_2$  elles sont de

signe opposé.

(2) Si  $D > 0$  et  $T^2 - 4D \geq 0$ ,  $0 \leq T^2 - 4D < T^2$  donc les racines

$$\frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$$

sont du signe de  $T$ , donc du même signe. On a noeud stable si  $T < 0$ , instable si  $T > 0$ .

(3) Si  $D > 0$ ,  $T^2 - 4D < 0$  donc  $A$  a deux valeurs propres complexes conjuguées  $\alpha \pm i\beta$ . Puisque  $T \neq 0$ , le point d'équilibre est un foyer (spirale). Puisque la partie réelle des valeurs propres est  $\alpha = \frac{T}{2}$ , c'est un foyer stable si  $T < 0$ , instable si  $T > 0$ .

(4) Si  $D > 0$  et  $T = 0$  (alors  $T^2 - 4D < 0$ ), les racines complexes sont imaginaires pures. Le point d'équilibre est un centre.  $\square$

On peut visualiser tout ceci dans le schéma suivant :

DESSIN

On appelle *hyperbolique* un point d'équilibre de  $X' = AX$  où  $\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$  pour toute valeur propre  $\lambda$ , c'est-à-dire tout sauf les centres et les points d'équilibre dégénérés. Ils joueront un rôle important dans les questions de stabilité des systèmes non linéaires.

## Cours 7 : mercredi 20/02/13

### 4 Solution fondamentale des systèmes linéaires

Le but de ce chapitre est de résoudre les systèmes linéaires

$$X' = AX + B(t) \quad (4.1)$$

où  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $t \mapsto B(t) \in \mathbb{R}^n$  est continu.

Idée : définir une *exponentielle de matrice*  $e^A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $e^0 = I_n$  et  $t \mapsto e^{tA}$  soit dérivable et vérifie  $(e^{tA})' = Ae^{tA}$ . Alors  $X(t) = e^{tA}X_0$  vérifie  $X'(t) = Ae^{tA}X_0 = AX(t)$ . C'est une solution du problème de Cauchy ((4.1),  $X(0) = X_0$ ).

#### 4.1 Exponentielle de matrices.

Pour  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}.$$

On veut donc poser

$$e^A = I_n + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

où  $A^k = A.A.\dots.A$  le produit de  $k$  matrices  $A$ , avec  $A^0 = I_n$ . Problème : assurer la convergence de la série. Solution : on montre sa convergence absolue grâce à une norme bien choisie.

**Définition 4.1** (Norme d'opérateur). On définit une norme sur  $M_n(\mathbb{R})$  en posant, pour  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,

$$\|A\| = \max_{\|X\| \leq 1} \|AX\|$$

où  $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  si  $X = (x_1, \dots, x_n)$ .

Le maximum est bien défini car  $X \mapsto \|AX\|$  est continue sur le compact  $\bar{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^n$  donc est bornée et atteint ses bornes.

EXERCICE 4.2. Vérifier que c'est une norme, c'est à dire que pour tous  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

- $\|A\| \geq 0$  et  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ,
- $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ ,
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ .

Cette norme, dite d'opérateur, a des les propriétés spéciales suivantes :

**Lemme 4.3** (Propriétés de la norme d'opérateur). Pour tous  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

- (1)  $\|AX\| \leq \|A\| \cdot \|X\|$ ,
- (2)  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ ,
- (3)  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

**Preuve :**

(1) Si  $X = 0$  c'est vrai. Si  $X \neq 0$ ,

$$\frac{\|AX\|}{\|X\|} = \left\| A \cdot \frac{X}{\|X\|} \right\| \leq \|A\|$$

par définition de la norme de  $A$ .

(2) Soit  $X \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|X\| \leq 1$ . On a, en utilisant 2 fois (1) :

$$\|A \cdot B \cdot X\| \leq \|A\| \cdot \|BX\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|X\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

d'où  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$  en prenant le max.

(3) Par récurrence. □

**Définition 4.4.** On dit qu'une série  $(A_i = \sum_{k=0}^i B_k)$  de  $M_n(\mathbb{R})$  converge vers  $A$  si  $\|A_i - A\| \rightarrow 0$  quand  $i \rightarrow \infty$ . On dit que  $(A_i)$  converge absolument si  $\sum_{k=0}^{\infty} \|B_k\| < \infty$ .

L'espace  $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$  étant complet (car de dimension finie), la convergence absolue implique la convergence. On montre la convergence absolue de  $A_i = \sum_{k=0}^i \frac{A^k}{k!}$  et un peu plus :

**Théorème 4.5.** Soit  $t_0 > 0$ ,  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Alors la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

converge absolument et uniformément pour  $t \in [-t_0, t_0]$ .

Preuve: On a

$$\left\| \frac{(tA)^k}{k!} \right\| \leq \frac{|t|^k \|A\|^k}{k!} \leq \frac{(t_0 \|A\|)^k}{k!} = \frac{a^k}{k!}$$

où  $a = t_0 \|A\|$ . Alors pour tout  $n$

$$u_i = \sum_{k=0}^i \left\| \frac{(tA)^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a < \infty$$

donc la série de terme  $\frac{(tA)^k}{k!}$  converge absolument. Il s'ensuit que la suite  $A_i = \sum_{k=0}^i \frac{(tA)^k}{k!}$  converge vers une limite qu'on note  $e^{tA}$ . On vérifie l'uniformité de la convergence :

$$\|e^{tA} - A_i\| \leq \left\| \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \rightarrow 0$$

quand  $i \rightarrow \infty$  indépendamment de  $t$ . □

**Proposition 4.6.** Soit  $A, B, P \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $P$  inversible.

- (1) Si  $A = PBP^{-1}$ ,  $e^A = Pe^BP^{-1}$
- (2) Si  $AB = BA$  (on dit que  $A$  et  $B$  commutent),  $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ .
- (3)  $e^A$  est inversible d'inverse  $e^{-A}$ .

Preuve:

(1) On a  $(PBP^{-1})^k = PB^kP^{-1}$ , donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PBP^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} P \frac{B^k}{k!} P^{-1} = P \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \right) P^{-1}$$

(2) Si  $AB = BA$ , la formule du binôme donne

$$(A+B)^k = k! \sum_{i+j=k} \frac{A^i B^j}{i! j!}$$

donc

$$\sum_{k=0}^n \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \sum_{i+j=k} \frac{A^i B^j}{i! j!} \tag{4.2}$$

quand  $n \rightarrow \infty$ . D'autre part

$$\left( \sum_{i=0}^n \frac{A^i}{i!} \right) \left( \sum_{j=0}^n \frac{B^j}{j!} \right) = \sum_{k=0}^n \sum_{i+j=k} \frac{A^i B^j}{i! j!} + \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{i+j=k} \frac{A^i B^j}{i! j!}$$

On peut montrer que le terme de droite converge absolument vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ , d'où

$$e^{A+B} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \sum_{i+j=k} \frac{A^i B^j}{i! j!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=0}^n \frac{A^i}{i!} \right) \left( \sum_{j=0}^n \frac{B^j}{j!} \right) = e^A \cdot e^B.$$

$$(3) e^A \cdot e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I_n. \quad \square$$

EXERCICE 4.7. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Vérifier que  $AB \neq BA$  et que  $e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$ .

**Lemme 4.8.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , alors

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} e^{At} \frac{e^{Ah} - I_n}{h} = e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{Ah} - I_n}{h} \\ &= e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{i \rightarrow \infty} A + \frac{A^2}{2} h + \dots + \frac{A^i}{i!} h^{i-1} \\ &= e^{At} \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} A + \frac{A^2}{2} h + \dots + \frac{A^i}{i!} h^{i-1} \\ &= e^{At} A = A e^{At} \end{aligned}$$

où on a utilisé l'uniformité de la convergence pour intervertir les limites, et la commutation de  $A$  avec  $e^{At}$ .  $\square$

## 4.2 Solution fondamentale des systèmes linéaires

**Théorème 4.9** (Solution fondamentale des systèmes linéaires). Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ . Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' &= AX \\ X(0) &= X_0. \end{cases} \quad (4.3)$$

admet l'unique solution globale  $X(t) = e^{tA} X_0$ .

**Preuve:** Que  $X(t) = e^{tA}X_0$  soit une solution découle du lemme 4.8. Pour l'unicité, supposons que  $X(t)$  soit une solution de (4.3) et considérons la fonction  $Y(t) = e^{-At}X(t)$ . Alors

$$Y'(t) = -Ae^{-At}X(t) + e^{-At}AX(t) = 0$$

en utilisant le fait que  $A$  et  $e^{At}$  commutent. Il s'ensuit que  $e^{-At}X(t) = X_0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , d'où en multipliant à gauche par  $e^{At}$ ,  $X(t) = e^{At}X_0$ .  $\square$

Vérifions si dans le cas de la dimension 2 on retrouve les résultats de la section 3. On a besoin calculer efficacement des exponentielles de matrices.

**Proposition 4.10.** (1) Si  $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$ ,

$$e^A = P \begin{pmatrix} e_1^\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2^\lambda & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e_n^\lambda \end{pmatrix} P^{-1}.$$

(2) Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ,

$$e^A = e^a \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}.$$

(3) Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ,

$$e^A = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Preuve:**

(1) est évident 4.6(1).

(2) Si  $\lambda = a + ib$ , on montre par récurrence que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\lambda^k) & \operatorname{Im}(\lambda^k) \\ -\operatorname{Im}(\lambda^k) & \operatorname{Re}(\lambda^k) \end{pmatrix}$$

Puis

$$\begin{aligned}
 e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{Re}(\lambda^k)}{k!} & \frac{\operatorname{Im}(\lambda^k)}{k!} \\ -\frac{\operatorname{Im}(\lambda^k)}{k!} & \frac{\operatorname{Re}(\lambda^k)}{k!} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right) & \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right) \\ -\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right) & \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(e^\lambda) & \operatorname{Im}(e^\lambda) \\ -\operatorname{Im}(e^\lambda) & \operatorname{Re}(e^\lambda) \end{pmatrix} \\
 &= e^a \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

(3) On a  $A = aI_2 + B$  avec  $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , donc  $e^A = e^{aI_2} e^B$ . Or  $e^B = I_2 + B + 0 + \dots = I_2 + B$  car  $B^2 = 0$  (calcul) et donc les termes suivants aussi.  $\square$

EXERCICE 4.11. Calculer l'exponentielle des matrices suivantes.

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

En conséquence, si  $B$  a une des formes suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

on a

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \quad e^{Bt} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix}, \quad e^{Bt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et les solutions

$$X(t) = e^{At} X_0 = P e^{Bt} P^{-1} X_0$$

comme dans les théorèmes 3.16, 3.20 et 3.23.

### 4.3 Systèmes non homogènes

On considère maintenant l'équation

$$X' = AX + B(t) \tag{4.4}$$

**Définition 4.12.** On appelle **solution fondamentale** de

$$X' = AX \quad (4.5)$$

une fonction  $t \mapsto \Phi(t) \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $\Phi'(t) = A\Phi$ .

On vient de voir que  $\Phi(t) = e^{tA}$  est une solution de fondamentale de (4.5). Alors :

**Théorème 4.13.** Si  $\phi$  est une solution fondamentale de (4.5), alors la solution de (4.4) de donnée initiale  $X(0) = X_0$  est

$$X(t) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}X_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi(u)^{-1}B(u) du.$$

**Preuve:** On dérive cette fonction :

$$\begin{aligned} X' &= A\Phi(t)\Phi(0)^{-1}X_0 + \int_0^t \Phi'(t)\Phi(u)^{-1}B(u) du + \Phi(t)\Phi(t)^{-1}B(t) \\ &= A \left[ \Phi(t)\Phi(0)^{-1} + \int_0^t \Phi(t)\Phi(u)^{-1}B(u) du \right] + B(t) \\ &= AX(t) \end{aligned}$$

□

**Remarque 4.14.** On arrive aussi à ce résultat par la méthode de la variation de la constante. Puisque les solutions de (4.5) sont de la forme  $X(t) = \Phi(t)C$ , on cherche les solutions de (4.4) sous la forme  $X(t) = \Phi(t)C(t)$ . En dérivant :

$$X' = \Phi'(t)C(t) + \Phi(t)C'(t) = A\Phi(t)C(t) + B(t)$$

d'où  $C'(t) = \Phi^{-1}(t)B(t)$  et on intègre.

## 4.4 Description des solutions

L'écriture  $X(t) = e^{At}X_0$  ne nous renseigne par forcément car il peut être difficile de calculer l'exponentielle en pratique. Commençons par quelques exemples.

### 4.4.1 Exemples de base, blocs de Jordan

EXEMPLE 4.15.  $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . On lit directement dans la matrice que les valeurs propres sont

$\lambda_1 = -2 + i$ ,  $\lambda_2 = -2 - i$  et  $\lambda_3 = 3$ . On a pour  $\lambda_1$  un vecteur propre complexe  $W = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = E_1 + iE_2$

et pour  $\lambda_2$ ,  $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . L'exponentielle se calcule dans chaque bloc :

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \cos(t) & e^{-2t} \sin(t) & 0 \\ -e^{-2t} \sin(t) & e^{-2t} \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 4.16.  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

Alors  $X(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(-t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$

Ces deux cas sont faciles à traiter car il y a 3 valeurs propres distinctes. Plus généralement, il sera facile de décrire le comportement de  $X(t)$  lorsque  $A \in M_n(\mathbb{R})$  aura  $n$  valeurs propres distinctes (éventuellement complexes) : on pourra "diagonaliser"  $A$  en  $B = P^{-1}AP$ , avec éventuellement des blocs  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  dans la matrice  $B$ , et distribuer l'exponentielle sur chaque bloc.

## Cours 8 : mercredi 27/02/13

Considérons maintenant des exemples où ce n'est pas possible.

EXEMPLE 4.17.  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  (bloc de Jordan).

Vu que la matrice est triangulaire, on voit directement que  $\lambda_1 = 2$  est la seule valeur propre et que  $E_1$  est vecteur propre. Un calcul immédiat montre qu'il n'y a pas de vecteur propre non colinéaire à  $E_1$ . La stratégie pour calculer  $e^{tB}$  est d'écrire

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S + N.$$

Puisque  $S = 2I_3$ ,  $S$  commute avec  $N$  et on peut utiliser  $e^B = e^{S+N} = e^S e^N$ , et de même  $e^{tB} = e^{tS} e^{tN}$ . Observons que

$$\begin{aligned} N.E_1 &= 0 \\ N.E_2 &= E_1 \\ N.E_3 &= E_2 \end{aligned}$$

Si on réapplique  $N$ ,  $N^2.E_2 = 0$  et  $N^2.E_3 = E_1$ , soit  $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors  $N^3.E_i = 0$  pour tout  $i$

donc  $N^3 = 0$  et  $N^k = 0$  pour tout  $k \geq 3$ . Il s'ensuit que  $e^N = I_3 + N + \frac{N^2}{2}$  et de même

$$e^{tN} = I_3 + tN + \frac{t^2 N^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient donc

$$X(t) = e^{tB} X_0 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X_0.$$

La matrice  $N$  ci-dessus est un exemple de matrice *nilpotente* :

**Définition 4.18.** Une matrice  $N \in M_n(\mathbb{R})$  est dite **nilpotente** s'il existe un entier  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $N^k = 0$ . Elle est dite nilpotente d'ordre  $k$  si  $N^k = 0$  mais  $N^{k-1} \neq 0$ .

Une matrice  $T \in M_n(\mathbb{R})$  triangulaire supérieure stricte (diagonale nulle et tous les termes sous la diagonale nuls) est nilpotente puisque  $T.E_1 = 0$  et pour tout  $i \in \{2, \dots, n\}$ ,  $T.E_i \in \text{vect}\{E_1, \dots, E_{i-1}\}$ . En itérant au plus  $k \leq n$  fois,  $T^k.E_i = 0$  pour tout  $i$  donc  $T^k = 0$ . Pour une matrice  $N$  nilpotente d'ordre  $k$ , la série de l'exponentielle n'a qu'un nombre fini de termes :

$$e^{tN} = I_n + tN + \dots + \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}$$

EXEMPLE 4.19.  $B = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$  (aussi un bloc de Jordan). On procède de même :

$$B = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S + N$$

où  $S$  est diagonale par bloc et  $N$  est nilpotente d'ordre 2. On peut vérifier que  $S$  et  $N$  commutent, donc

$$e^{tB} = e^{tS}e^{tN} = \begin{pmatrix} e^{at} \cos(bt) & e^{at} \sin(bt) & 0 & 0 \\ e^{at} \sin(-bt) & e^{at} \cos(bt) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(bt) & e^{at} \sin(bt) \\ 0 & 0 & e^{at} \sin(-bt) & e^{at} \cos(bt) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### 4.4.2 Cas général, forme normale de Jordan

**Théorème 4.20** (Forme normale de Jordan). Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Alors il existe une matrice  $P$  inversible telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_r \end{pmatrix}$$

où les blocs élémentaires de Jordan  $B = B_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  sont de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

où  $\lambda$  est une des valeurs propres réelles de  $A$ , ou de la forme

$$B = \begin{pmatrix} D & I_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & I_2 & \dots & 0 \\ \dots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & D & I_2 \\ 0 & \dots & & 0 & D \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

où  $D = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , et  $\lambda = a + ib$  est une des valeurs propres complexes de  $A$ . En particulier  $P^{-1}AP = S + N$  où  $S$  est diagonale par bloc (avec éventuellement des blocs  $D$ ),  $N$  est nilpotente, et  $S$  et  $N$  commutent. Les éléments de  $S - \lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  et  $a_j + ib_j$ ,  $j = k + 1, \dots, n$  - sont les valeurs propres de  $A$  apparaissant selon leur multiplicité.

On n'exclut pas dans (4.6) les blocs de taille 1 et dans (4.7) les blocs de taille 2. En les répétant,  $S$  peut contenir des blocs de la forme  $\lambda I_p$  ou  $\begin{pmatrix} D & & \\ & \ddots & \\ & & D \end{pmatrix}$ .

On en déduit

**Corollaire 4.21.** Chaque coordonnée d'une solution  $X(t)$  de  $X' = AX$  est une combinaison linéaire de fonctions de la forme

$$t^k e^{at} \cos(bt) \text{ ou } t^k e^{at} \sin(bt)$$

où  $\lambda = a + ib$  est une valeur propre de  $A$  et  $0 \leq k \leq n - 1$ .

On n'exclut pas ici  $b = 0$ , auquel cas il s'agit d'une valeur propre réelle.

**Remarque 4.22.** On dit que  $A$  est *semi-simple* si dans la forme normale de Jordan, la partie nilpotente  $N$  est nulle, i.e.  $P^{-1}AP = S$ . Dans ce cas, la base de  $\mathbb{R}^n$  associée à  $P$  est, quitte à permuter les vecteurs, de la forme

$$\mathcal{B} = \{U_1, \dots, U_k, W_{R,1}, W_{I,1}, \dots, W_{R,m}, W_{I,m}\} \quad (4.8)$$

où les  $U_i$  sont vecteurs propres associés aux valeurs propres réelles  $\lambda_i$ , pour  $i = 1, \dots, k$ , et les couples  $W_{R,p}, W_{I,p}$  sont tels que  $W_{R,p} + iW_{I,p}$  soit vecteur propre complexe associé à la valeur propre complexe  $a_p + ib_p$ ,  $p = 1, \dots, m$ .

## 5 Stabilité dans les systèmes linéaires

Introduisons la notion de *système dynamique*.

**Définition 5.1.** On dit qu'un point d'équilibre  $X_*$  de  $X' = f(X)$  est **stable** si pour tout voisinage  $U$  de  $X_*$ , il existe un voisinage  $V$  de  $X_*$  tel que, si  $X(0) \in V$  alors  $X(t)$  est défini pour tout  $t \geq 0$  et  $X(t) \in U$ . Sinon on dit que  $X_*$  est **instable**.

**Définition 5.2.** On dit qu'un point d'équilibre  $X_*$  de  $X' = AX$  est **asymptotiquement stable** s'il est stable et s'il existe un voisinage  $V$  de  $X_*$  tel que, si  $X(0) \in V$  alors  $X(t)$  tend vers  $X_*$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

En particulier, asymptotiquement stable  $\Rightarrow$  stable. En dimension 2, les puits et les spirales-puits sont asymptotiquement stables. Les centres sont stables mais pas asymptotiquement stables. Les sources sont instables. On cherche un critère, dans la veine du théorème de classification 3.24, permettant de savoir rapidement à quel type de point d'équilibre on a affaire.

### 5.1 Stabilité asymptotique

**Théorème 5.3.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Sont équivalents :

- (1) Toutes les valeurs propres de  $A$  ont partie réelle strictement négative,
- (2) Il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$ , des constantes  $c, C > 0$  telles que, pour la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$  associée à  $\mathcal{B}$ ,

$$e^{-ct}\|X_0\|_{\mathcal{B}} \leq \|e^{At}X_0\|_{\mathcal{B}} \leq e^{-Ct}\|X_0\|_{\mathcal{B}}$$

pour tout  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $t \in \mathbb{R}$ . En particulier,  $X_* = 0$  est asymptotiquement stable.

- (3) Pour toute norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^n$ , il existe des constantes  $c, C, m, M > 0$  telles que

$$me^{-ct}\|X_0\| \leq \|e^{At}X_0\|_{\mathcal{B}} \leq Me^{-Ct}\|X_0\|$$

pour tout  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $t \in \mathbb{R}$ .

- (4) Pour tout  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $e^{At}X_0$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ .

Rappel :

**Définition 5.4.** Soit  $\mathcal{B} = \{U_1, \dots, U_n\}$  une base de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle produit scalaire à  $\mathcal{B}$ , le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$  pour lequel  $\mathcal{B}$  est orthonormée. Si  $Q = (U_1 \dots U_n)$ , il est défini par la relation

$$\langle X, Y \rangle_{\mathcal{B}} = \langle Q^{-1}X, Q^{-1}Y \rangle$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire standard de  $\mathbb{R}^n$ . La norme associée à  $\mathcal{B}$  est  $\sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}}$ .

**Preuve:** L'équivalence de (2) et (3) se réduit à l'équivalence des normes dans  $\mathbb{R}^n$  : si  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sont deux normes, il existe  $m, M > 0$  tel que  $m \leq \frac{\|X\|_1}{\|X\|_2} \leq M$  pour tout  $X$  non nul.

(2)-(3)  $\Rightarrow$  (4) est évident.

Montrons (4)  $\Rightarrow$  (1) puis (1)  $\Rightarrow$  (2).

(4)  $\Rightarrow$  (1). Supposons qu'il existe une valeur propre  $\lambda = a + ib$  avec  $a \geq 0$  (on n'exclut pas  $b = 0$ ). Si  $b = 0$ , la valeur propre  $\lambda = a$  est réelle et  $A$  admet un vecteur propre associé  $V$ . Alors  $X(t) = e^{at}V$  est solution (cf proposition 3.6), et  $e^{At}V$  ne tend pas vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$  ce qui contredit (4).

SI  $b \neq 0$ ,  $A$  admet un vecteur propre complexe  $W = W_R + iW_I$  donc on déduit deux solutions réelles  $X_R(t)$  et  $X_I(t)$  (cf proposition 3.19). Considérons par exemple

$$X_R(t) = e^{at}(\cos(bt)W_R - \sin(bt)W_I).$$

Alors pour réel  $t$ ,

$$\|X_R(t)\| = e^{at} \|\cos(bt)W_R - \sin(bt)W_I\| \geq we^{at}$$

pour une constante  $w > 0$  indépendante de  $t$ , donc  $X_R(t)$  ne tend pas vers 0, contredisant aussi (4).

Montrons (1)  $\Rightarrow$  (2). Soit  $-C < 0$  tel que  $\operatorname{Re}(\lambda) < -C$  pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $A$ . Donnons nous aussi  $-c < 0$  tel que  $-c < \operatorname{Re}(\lambda)$ . On a besoin du lemme suivant :

**Lemme 5.5.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Supposons que

$$\alpha < \operatorname{Re}(\lambda) < \beta$$

pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $A$ . Alors il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que

$$\alpha(\|X\|_{\mathcal{B}})^2 \leq \langle AX, X \rangle_{\mathcal{B}} \leq \beta(\|X\|_{\mathcal{B}})^2 \quad (5.1)$$

pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ .

Supposons le lemme vrai et montrons le théorème. On se sert du lemme, avec  $\alpha = -c$  et  $\beta = -C$ . pour montrer que la fonction  $t \mapsto \|X(t)\|_{\mathcal{B}}$  décroît le long des trajectoires. Pour simplifier, notons

$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{B}}$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$ . Soit  $X(t)$  une solution de  $X' = AX$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|X\| &= \frac{d}{dt} \langle X, X \rangle^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 \langle X', X \rangle}{\langle X, X \rangle^{1/2}} \\ &= \frac{\langle AX, X \rangle}{\langle X, X \rangle^{1/2}} \end{aligned}$$

d'où en utilisant (5.1),

$$\alpha \leq \frac{\frac{d}{dt} \|X\|}{\|X\|} \leq \beta$$

soit

$$\alpha \leq \frac{d}{dt} \ln \|X\| \leq \beta.$$

Par intégration, on a

$$\alpha t \leq \ln \|X(t)\| - \ln \|X(0)\| \leq \beta t,$$

puis

$$\alpha t \leq \frac{\|X(t)\|}{\|X(0)\|} \leq \beta t,$$

et enfin

$$e^{\alpha t} \|X(0)\| \leq \|X(t)\| \leq e^{\beta t} \|X(0)\|.$$

Il reste à prouver le lemme.

**Preuve:** (du lemme) Montrons la majoration, la minoration étant semblable. Supposons d'abord que  $A$  soit semi-simple, sa forme normale de Jordan donnée par le théorème 4.20 se réduit à  $P^{-1}AP = S$ . Soit  $\mathcal{B}$  la base associée à  $P$  (cf remarque 4.22)

$$\mathcal{B} = \{U_1, \dots, U_k, W_{R,1}, W_{I,1}, \dots, W_{R,m}, W_{I,m}\}$$

Alors le produit scalaire associé, pour lequel  $\mathcal{B}$  est orthonormée, convient. En effet puisque  $U_i$  est vecteur propre de  $A$  :

$$\langle AU_i, U_i \rangle_{\mathcal{B}} = \langle \lambda_i U_i, U_i \rangle_{\mathcal{B}} = \lambda_i \leq \beta$$

Par ailleurs  $A$  agit sur chaque  $\{W_R, W_I\} = \{W_{R,i}, W_{I,i}\}$  comme  $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$  donc

$$\langle AW_R, W_R \rangle_{\mathcal{B}} = \langle a_i W_R - b_i W_I, W_R \rangle = a_i \leq \beta$$

et de même

$$\langle AW_I, W_I \rangle_{\mathcal{B}} = \langle b_i W_R + a_i W_I, W_I \rangle = a_i \leq \beta$$

On en déduit que

$$\langle AX, X \rangle_{\mathcal{B}} \leq \beta (\|X\|_{\mathcal{B}})^2$$

pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ .

Supposons maintenant  $A$  quelconque, alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_r \end{pmatrix} = S + N$$

où chaque  $B = B_i$  est un bloc de Jordan, de la forme (4.6) ou (4.7). On peut décomposer orthogonalement (pour le produit scalaire standard)  $\mathbb{R}^n$  en sous-espaces vectoriels

$$\mathbb{R}^n = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$$

chaque  $F_i$  étant stabilisé par  $A$  et correspondant à un bloc de Jordan, i.e.  $P^{-1}F_i$  est stable par  $S + N$  et la restriction de  $S + N$  à  $P^{-1}F_i$  est le bloc  $B_i$ . Notons  $A_i$  la restriction de  $A$  à  $F_i$ . Il suffit de montrer l'existence d'une base de  $F_i$  pour lequel le lemme est vrai pour  $A_i$ , pour chaque  $i$ , et la réunion de ces bases vérifiera le lemme pour  $A$ . Pour simplifier on peut donc supposer que  $P^{-1}AP = B$  est un bloc de Jordan. Supposons d'abord que

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n + N.$$

On a  $N.E_1 = 0$  et  $N.E_i = E_{i-1}$  pour  $i \in \{2, \dots, n\}$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , considérons la nouvelle base de  $\mathbb{R}^n$

$$\{E_1, \varepsilon E_2, \dots, \varepsilon^{n-1} E_n\} = \{\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n\}$$

Observons que

$$\begin{aligned} N.\bar{E}_1 &= 0 \\ N.\bar{E}_2 &= \varepsilon \bar{E}_1 \\ &\vdots \\ N.\bar{E}_n &= \varepsilon \bar{E}_{n-1} \end{aligned}$$

Notant  $Q_\varepsilon$  la matrice formée des  $\bar{E}_i$ , ceci équivaut à

$$Q_\varepsilon^{-1}(S + N)Q_\varepsilon = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \varepsilon & \dots & 0 \\ \dots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & \lambda & \varepsilon \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n + \varepsilon N$$

Notons  $\mathcal{B}_\varepsilon = \{U_1, \varepsilon U_2, \dots, \varepsilon^{n-1} U_n\}$  (la base correspondant à la matrice  $PQ_\varepsilon$ ), on a

$$\begin{aligned} \frac{\langle AX, X \rangle_{\mathcal{B}_\varepsilon}}{\langle X, X \rangle_{\mathcal{B}_\varepsilon}} &= \frac{\langle (PQ_\varepsilon)^{-1}AX, (PQ_\varepsilon)^{-1}X \rangle}{\langle (PQ_\varepsilon)^{-1}X, (PQ_\varepsilon)^{-1}X \rangle} \\ &= \frac{\langle (\lambda I_n + \varepsilon N)Y_\varepsilon, Y_\varepsilon \rangle}{\langle Y_\varepsilon, Y_\varepsilon \rangle} \quad (\text{en posant } Y_\varepsilon = (PQ_\varepsilon)^{-1}X) \\ &= \lambda + \varepsilon \frac{\langle NY_\varepsilon, Y_\varepsilon \rangle}{\langle Y_\varepsilon, Y_\varepsilon \rangle} \\ &\rightarrow \lambda \end{aligned}$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Donc pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, la base  $\mathcal{B}_\varepsilon$  satisfait le lemme. Pour un bloc de la forme (4.7) la preuve est semblable.  $\square$

Ayant prouvé le lemme, la preuve du théorème est complète.  $\square$

On montre de la même manière le résultat suivant :

**Théorème 5.6.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Sont équivalents :

- (1) Toutes les valeurs propres de  $A$  ont partie réelle strictement positive,
- (2) Il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$ , des constantes  $c, C > 0$  telles que, pour la norme associée à  $\mathcal{B}$ ,

$$e^{ct}\|X_0\|_{\mathcal{B}} \leq \|e^{At}X_0\|_{\mathcal{B}} \leq e^{Ct}\|X_0\|_{\mathcal{B}}$$

pour tout  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $t \in \mathbb{R}$ .

- (3) Pour toute norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^n$ , il existe des constantes  $c, C, m, M > 0$  telles que

$$me^{ct}\|X_0\| \leq \|e^{At}X_0\|_{\mathcal{B}} \leq Me^{Ct}\|X_0\|$$

pour tout  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $t \in \mathbb{R}$ .

- (4) Pour tout  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $e^{At}X_0$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow -\infty$ .

Si on s'intéresse à la stabilité

**Proposition 5.7.** Si  $X' = AX$  admet  $X = 0$  comme point d'équilibre stable, alors toutes les valeurs propres de  $A$  ont partie réelle négative ou nulle.

*Preuve:* Se montre comme (4)  $\Rightarrow$  (1) dans le théorème 5.3.  $\square$

**Remarque 5.8.** On n'affirme pas que si toutes les valeurs propres ont partie réelle négative ou nulle,  $X = 0$  est un centre. Par exemple  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  n'admet comme valeur propre que  $\lambda = 0$ , mais admet la solution  $(x(t), y(t)) = (t, 1)$  qui montre que  $X = 0$  n'est pas stable.

## 5.2 Sous-espaces stables et instables

**Proposition 5.9.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Il existe une décomposition

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

en sous-espaces invariants par  $A$  et par  $e^{tA}$ . Les valeurs propres de

- la restriction de  $A$  à  $E^s$  ont partie réelle strictement négative,
- la restriction de  $A$  à  $E^c$  sont de partie réelle nulle,

- la restriction de  $A$  à  $E^s$  ont partie réelle strictement positive.

Preuve: Soit  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_r \end{pmatrix} = S + N$  la forme normale de Jordan de  $A$ . On

décompose  $\mathbb{R}^n = F^s \oplus F^c \oplus F^u$ , où  $F^s$  correspond aux blocs de Jordan de valeur propre  $\lambda$  satisfaisant  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ ,  $F^c$  correspond au bloc ayant  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  et  $F^u$  correspond au bloc vérifiant  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ . Chaque sous-espace est invariant par  $S + N$ . On pose alors  $E^u = P.F^u$ ,  $E^c = P.F^c$  et  $E^s = P.F^s$ ; ils sont clairement invariants par  $A$ , donc par  $e^{tA}$ .  $\square$

**Définition 5.10.** On appelle  $E^s$  le *sous-espace stable*,  $E^c$  le *sous-espace centre*,  $E^u$  le *sous-espace instable*.

En restriction à  $E^s$ ,  $X(t) = e^{tA}X_0$  satisfait les conclusions du théorème 5.3. En restriction à  $E^u$ ,  $X(t) = e^{tA}X_0$  satisfait les conclusions du théorème 5.6. Sur l'exemple 4.15, on a  $E^s = \operatorname{vect}\{E_1, E_2\}$ ,  $E^u = \operatorname{vect}\{E_3\}$ ,  $E^c = \{0\}$ .

Sur l'exemple 4.16,  $E^c = \operatorname{vect}\{E_1, E_2\}$ ,  $E^s = \operatorname{vect}\{E_3\}$ ,  $E^u = \{0\}$ .

Sur l'exemple 4.17,  $\mathbb{R}^3 = E^u$ ,  $E^c = E^s = \{0\}$ . Sur l'exemple 4.19,  $\mathbb{R}^4 = E^u$  si  $a > 0$ ,  $\mathbb{R}^4 = E^s$  si  $a < 0$ .

## Cours 9 : mercredi 06/03/13

### 6 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Le but de ce chapitre est de montrer le théorème fondamental 2.6, dont nous rappelons l'énoncé ici :

**Théorème 6.1** (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les systèmes). Soit  $F : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue, où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle ouvert et  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $t_0 \in I$  et  $Y_0 \in U$ . Si  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $I \times U$  alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' &= F(t, Y) \\ Y(t_0) &= Y_0, \end{cases} \quad (6.1)$$

admet une unique solution maximale  $(J, Y)$ .

Pour simplifier la rédaction on détaille la preuve dans le cas autonome  $Y' = F(Y)$ , le cas général étant similaire.

#### 6.1 Préliminaires

**Définition 6.2.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert, une fonction  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite **localement lipschitzienne** (loc. lipschitz) si pour tout  $x \in U$ , il existe un voisinage  $U_x \subset U$  de  $x$  et une constante  $K_x$  tels que

$$\forall y, z \in U_x, \quad \|f(y) - f(z)\| \leq K \|y - z\|.$$

**Lemme 6.3.** Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$  elle est loc. lipschitz.

*Preuve:* Notons  $d_x f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la différentielle de  $f$  en un point  $x \in U$ , elle vérifie

$$d_x f(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}.$$

Si  $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ ,  $d_x f$  est déterminée par les dérivées partielles

$$\frac{\partial f_i}{\partial x^j} = \frac{d}{dt} f_i(x_1, \dots, x_j + t, \dots, x_n) = d_x f(e_j)$$

La fonction  $f$  est de classe  $C^1$  si et seulement si les dérivées partielles existent et sont continues. Ceci revient à dire que l'application qui à  $x$  associe sa matrice jacobienne  $J_x f = (\frac{\partial f_i}{\partial x^j}) \in M_n(\mathbb{R})$  est continue. Fixons  $x \in U$  et considérons  $U_x = \overline{B(x, r)}$  où  $r > 0$  est assez petit pour que  $U_x \subset U$ . Puisque  $U_x$  est compact, il existe une constante  $K$  telle que  $\|J_y f\| \leq K$  pour tout  $y \in U_x$ . On travaille avec la norme d'opérateur sur  $M_n(\mathbb{R})$ , donc

$$\|d_y f(u)\| = \|J_y f \cdot u\| \leq K \|u\|$$

pour tout vecteur  $u \in \mathbb{R}^n$ . Maintenant soit  $y, z \in U_x$ , alors  $c(t) : (1-t)y + tz = y + t(z-y)$  définit un segment de  $y$  à  $z$  (pour  $t \in [0, 1]$ ), contenu dans  $U_x$ , de vecteur vitesse  $\gamma'(t) = z - y$ . Posons  $\varphi(t) = f(c(t))$ . Alors

$$\begin{aligned} \|f(z) - f(y)\| &= \|\Phi(1) - \varphi(0)\| = \left\| \int_0^1 \varphi'(s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 d_{\varphi(s)} f(c'(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|d_{\varphi(s)} f(c'(s))\| ds \\ &\leq \int_0^1 K \|z - y\| ds = K \|z - y\| \end{aligned}$$

□

## 6.2 Reformulation du problème, solution locale

On commence par montrer que (6.1) admet une solution locale, i.e. définie sur un intervalle  $J \subset I$  pas nécessairement maximal. Pour cela on reformule l'équation sous forme intégrale :  $X : J \subset I \rightarrow \mathbb{R}^n$  vérifie  $X' = f(X)$ ,  $X(0) = X_0$  si et seulement si

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(X(s)) ds \quad (6.2)$$

On se donne  $K > 0$  tel que  $\|J_y f\| \leq K$  sur  $U_0 = \overline{B(X_0, r)} \subset U$ . Par continuité de  $f$ , on se donne également une constante  $M > 0$  telle que  $\|f(y)\| \leq M$  sur  $U_0$ . Choisissons une petite constante  $0 < a < \min\{\frac{r}{M}, K\}$  et considérons  $J = [-a, a]$ .

**Lemme 6.4.** Il existe  $X : [-a, a] \rightarrow U_0$ , solution de (6.2),

**Preuve:** On va construire une suite de fonctions  $X_k : [-a, a] \rightarrow U_0$ , s'approchant de plus en plus de l'égalité dans (6.2), et avec la propriété d'être de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \|X_p - X_q\|_\infty < \varepsilon.$$

On utilise ici la norme uniforme sur l'espace  $C([-a, a], \mathbb{R}^n)$  des fonctions continues de  $[-a, a]$  dans  $\mathbb{R}^n$ , définie par

$$\|X(\cdot)\|_\infty = \sup_{t \in [-a, a]} \|X(t)\|.$$

On utilise cette norme à cause de la propriété suivante :

**Théorème 6.5.** Dans  $(C([-a, a], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ , toute suite de Cauchy converge (on dit que l'espace est complet).

On saura donc que  $(X_k)$  converge. Il restera à voir que la limite  $X$  vérifie (6.2). Allons-y : On définit

$$X_0(t) = X_0, \forall t \in [-a, a]$$

Clairement  $X_0 : [-a, a] \rightarrow U_0$ . Supposons défini  $X_i : [-a, a] \rightarrow U_0$ , on pose pour  $t \in [-a, a]$ ,

$$X_{i+1}(t) = X_0 + \int_0^t f(X_i(s)) ds \quad (6.3)$$

Vérifions que  $X_i$  est à valeurs dans  $U_0$  :

$$\|X_{i+1}(t) - X_0\| \leq \int_0^t \|f(X_i(s))\| ds \leq \int_0^a M ds = aM < r$$

car  $X_i(s) \in U_0$ . Vérifions que  $(X_k)$  est de Cauchy. On montre d'abord une estimée intermédiaire, à savoir qu'il existe  $L > 0$  tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|X_{k+1} - X_k\|_\infty \leq (Ka)^k L. \quad (6.4)$$

Posons  $L = \|X_1 - X_0\|_\infty$ . Montrons (6.4) par récurrence. C'est vrai au rang  $k = 0$ . Supposons l'inégalité vraie au rang  $k$ . Alors pour  $t \in [-a, a]$ ,

$$\begin{aligned} \|X_{k+2}(t) - X_{k+1}(t)\| &= \left\| \int_0^t f(X_{k+1}(s)) - f(X_k(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_0^a K \|X_{k+1}(s) - X_k(s)\| ds \\ &\leq aK(aK)^k L = (aK)^{k+1} L \end{aligned}$$

donc  $\|X_{k+2} - X_{k+1}\|_\infty \leq (aK)^{k+1}L$  ce qui achève la récurrence. Maintenant soit  $p < q$  des entiers, alors

$$\begin{aligned} \|X_q - X_p\|_\infty &= \|X_q - X_{q-1} + X_{q-1} - \dots + X_{p+1} - X_p\|_\infty \\ &\leq \|X_q - X_{q-1}\|_\infty + \dots + \|X_{p+1} - X_p\|_\infty \\ &\leq \sum_{k=p}^{q-1} (aK)^k L \leq L \sum_{k=p}^{\infty} \alpha^k \quad (\alpha = aK < 1) \\ &= L \frac{\alpha^{p+1}}{1 - \alpha} < \varepsilon \end{aligned}$$

si  $p, q$  sont assez grands. Ceci établit que  $(X_k)$  est de Cauchy.

D'après le théorème 6.5, il existe donc  $X : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue telle que  $\|X_k - X\|_\infty \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ . Puisque  $X_k(t) \in U_0$  pour tout  $k$  et que  $U_0$  est fermé, il en est de même pour  $X(t) = \lim X_k(t)$ , pour tout  $t \in [-a, a]$ . De plus en passant à la limite dans (6.3), et en utilisant la convergence uniforme

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(X(s)) ds.$$

□

On pourrait montrer l'unicité de la solution dans le lemme 6.4 à partir de la construction ci-dessus. On le fera par d'autres arguments dans les sections suivantes.

### 6.3 Contrôle exponentiel

**Théorème 6.6** (Contrôle exponentiel). Soit  $U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lipschitzienne de constante  $K$ , soit  $Y, Z$  deux solutions de  $X' = f(X)$  définies sur un intervalle  $[t_0, t_1]$ . Alors pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ ,

$$\|Y(t) - Z(t)\| \leq \|Y(t_0) - Z(t_0)\| e^{K(t-t_0)}.$$

En particulier si  $Y(t_0) = Z(t_0)$  alors  $Y(t) = Z(t)$  sur  $[t_0, t_1]$ . On a besoin du lemme suivant.

**Lemme 6.7** (lemme de Gronwall). Soit  $u : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$  continue positive. Supposons que pour des constantes  $C \geq 0, K \geq 0$ ,

$$\forall t \in [0, \alpha], \quad u(t) \leq C + \int_0^t K u(s) ds.$$

Alors  $u(t) \leq C e^{Kt}$  sur  $[0, \alpha]$ .

**Preuve:** Supposons d'abord  $C > 0$ . Posons

$$U(t) = C + \int_0^t Ku(s) ds > 0$$

L'hypothèse s'écrit alors  $u(t) \leq U(t)$  sur  $[0, \alpha]$ . On a  $U' = Ku$  donc

$$\frac{U'}{U} \leq \frac{Ku}{U} \leq K,$$

d'où

$$\ln(|U(t)|) \leq Kt + \ln|U(0)|$$

donc (avec  $\ln|U(0)| = C$ )

$$u \leq U = |U| \leq Ce^{Kt}.$$

Si  $C = 0$ , on applique ce qui précède à une suite  $C_i \rightarrow 0$  strictement positive. □

Pour démontrer le théorème 6.6, posons  $v(t) = \|Y(t) - Z(t)\|$ . Puisque

$$(Y - Z)(t) = (Y - Z)(t_0) + \int_{t_0}^t (f(Y) - f(Z))(s) ds$$

on a en prenant la norme,

$$v(t) \leq v(t_0) + \int_{t_0}^t K\|v\| ds$$

et on peut appliquer le lemme de Gronwall à  $u(t) = v(t + t_0)$ .

## 6.4 Extension sur un intervalle maximal

**Lemme 6.8 (Unicité).** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ ,  $Y(t)$  et  $Z(t)$  deux solutions de  $X' = f(X)$  définies sur un intervalle  $J$  telles que  $Y(t_0) = Z(t_0)$ . Alors  $Y(t) = Z(t)$  sur  $J$ .

**Preuve:** Soit  $J^* \subset J$  le plus grand intervalle sur lequel  $Y = Z$ . Si  $J^* \neq J$ ,  $J^*$  a une extrémité, par exemple à droite,  $t_1 < +\infty$ . Par continuité  $Y(t_1) = Z(t_1) \in U$ . D'après le lemme 6.3, il existe un voisinage  $U_0 \subset U$  de  $Y(t_1)$  et une constante  $K > 0$  tels que  $f$  est  $K$ -lipschitz sur  $U_0$ . Par continuité,  $Y([t_1, t_1 + \varepsilon])$  et  $Z([t_1, t_1 + \varepsilon])$  sont contenus dans  $U_0$  pour  $\varepsilon > 0$  assez petit. D'après le théorème 6.6,  $Y(t) = Z(t)$  sur  $[t_1, t_1 + \varepsilon]$ , contredisant la maximalité de  $t_1$ . □

## Cours 10 : mercredi 20/03/13

On peut maintenant conclure la preuve du théorème 6.1 (dans le cas autonome) et trouver une solution maximale. Soit  $(\alpha, \beta)$  la réunion de tous les intervalles contenant 0 sur lequel est défini une solution vérifiant  $X(0) = X_0$ . D'après le lemme d'unicité, deux solutions sur deux intervalles coïncident sur l'intersection des deux intervalles. Il s'ensuit qu'il y a une solution sur  $(\alpha, \beta)$ .

On n'exclut pas  $\alpha = -\infty$  ou  $\beta = +\infty$ . Que peut-on dire si une borne est finie ?

**Corollaire 6.9** (Sortie de compacts). Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . Soit  $Y(t)$  solution sur  $J = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$  maximal, avec  $\beta < +\infty$ . Alors pour tout compact  $K \subset U$ , il existe  $t_0 \in (\alpha, \beta)$  tel que  $\alpha(t) \notin K$  pour tout  $t \in [t_0, \beta)$ .

Preuve: Voir la preuve du corollaire équivalent 1.19 □

Par contradiction, on en déduit qu'on peut prolonger indéfiniment une solution restant dans un compact :

**Corollaire 6.10.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . Soient  $K \subset U$  un compact et  $Y_0 \in K$ . Si toute solution de la forme  $Y : [0, \beta] \rightarrow U$  telle que  $Y(0) = Y_0$  reste contenue dans  $K$ , alors il existe une solution  $Y : [0, \infty) \rightarrow U$  telle que  $Y(0) = Y_0$ , contenue dans  $K$ .

### 6.5 Solution globale

On donne une version plus forte du résultat de contrôle exponentiel :

**Théorème 6.11.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . Soit  $Y(t)$  une solution de  $X' = f(X)$  sur un intervalle  $[t_0, t_1]$  tel que  $Y(t_0) = Y_0$ . Alors il existe un voisinage  $V$  de  $Y_0$  et

$K > 0$  tel que pour tout  $Z_0 \in V$ , il existe une unique solution  $Z(t)$  aussi définie sur  $[t_0, t_1]$  telle que  $Z(t_0) = Z_0$ . De plus,

$$\|Y(t) - Z(t)\| \leq \|Y_0 - Z_0\| e^{K(t-t_0)}$$

sur  $[t_0, t_1]$ .

La force de ce résultat est qu'on ne demande pas à l'avance que  $Z$  soit définie sur  $[t_0, t_1]$ .

Preuve :

On utilise le résultat d'analyse suivant :

**Lemme 6.12.** Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  localement lipschitzienne,  $A \subset U$  un compact. Alors il existe une constante  $K > 0$  telle que  $f|_A$  est  $K$ -lipschitz.

Ce résultat se démontre par contradiction, en considérant deux suites  $x_n, y_n$  de  $A$  telles que  $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq n\|x_n - y_n\|$ . Par compacité de  $A$ , on se ramène à ce que  $x_n$  et  $y_n$  convergent. Comme  $f$  est bornée sur  $A$  l'inégalité implique qu'elles ont même limite,  $x \in A$ . L'hypothèse que  $f$  est localement lipschitzienne en  $x$  permet de conclure.

Si  $D$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}^n$ , la fonction  $x \mapsto d(x, D) = \inf\{d(x, y) \mid y \in D\}$  est continue et la distance est toujours réalisée par un élément  $y \in D$ . En conséquence, si  $B$  est un compact disjoint de  $D$ , la fonction  $d(x, D)$  est strictement positive sur  $B$  et donc minorée par une constante  $\varepsilon > 0$ . Appliquons ceci avec  $B = Y([t_0, t_1])$  et  $D = \mathbb{R}^n \setminus U$ . On en déduit qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que le  $\varepsilon$ -voisinage de  $B$  est contenu dans  $U$ . Quitte à remplacer  $\varepsilon$  par  $\varepsilon/2$ , on obtient que  $A = \bar{U}_\varepsilon(B)$  le  $\varepsilon$ -voisinage fermé de  $B$ , égale à l'ensemble des  $z \in \mathbb{R}^n$  tel que  $d(z, B) \leq \varepsilon$ , est contenu dans  $U$ . C'est un fermé borné donc compact. D'après le lemme il existe  $K > 0$  tel que  $f$  est  $K$ -lipschitz sur  $A$ . Soit  $\delta > 0$  assez petit pour que

$$\delta e^{K(t_1-t_0)} < \varepsilon$$

Posons  $V = B(Z_0, \delta)$ . Soit  $Z_0 \in V$ . Montrons que  $Z(t)$  telle que  $Z(t_0) = Z_0$  est défini sur  $[t_0, t_1]$  et reste dans  $A$ . D'après le théorème 6.1, il existe une unique solution maximale  $Z(t)$  définie sur  $[t_0, \beta)$  maximal. Montrons que  $\beta > t_1$ . Supposons au contraire que  $\beta \leq t_1$ . Alors pour  $t \in [t_0, \beta)$  et tant que  $Z(t)$  reste dans  $A$ , le lemme de contrôle exponentiel s'applique et donne

$$\begin{aligned} \|Z(t) - Y(t)\| &\leq \|Z_0 - Y_0\| e^{K(t-t_0)} \\ &\leq \delta e^{K(t-t_1)} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui montre que  $Z(t)$  reste dans  $A$  sur  $[0, \beta)$ . Ceci contredit le corollaire 6.9 de sortie des compacts lorsque  $[t_0, \beta)$  maximal vérifie  $\beta < \infty$ . Il s'ensuit que  $\beta > t_1$  et que  $Z(t)$  reste dans  $A$  sur  $[t_0, t_1]$  par l'estimée ci-dessus. L'unicité découle de lemme 6.8.  $\square$

On peut interpréter le théorème ci-dessus comme un résultat de continuité pour le système dynamique associé à l'équation  $X' = f(X)$ . En effet, le théorème dit que si  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $Z(t)$  est défini si  $Z(t_0) = Z_0$  est assez proche de  $Y_0$  et que de plus  $Z(t)$  tend vers  $Y(t)$  quand  $Z_0$  tend vers  $Y_0$ . Si on appelle  $\phi(t, Z_0) = Z(t)$ , on a

$$\lim_{Z_0 \rightarrow Y_0} \phi(t, Z_0) = \phi(t, Y_0)$$

uniformément sur  $[t_0, t_1]$ . Autrement dit  $\phi$  est continue en la seconde variable.

## 6.6 Système dynamique

Supposons donnée  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . Pour tout  $X$  in  $U$  il existe une unique solution maximale  $(Y(t), J_X)$  de  $Y' = f(Y)$  vérifiant  $Y(0) = X$ . Posons alors  $\Phi(t, X) = Y(t)$  si  $Y(t)$  est définie. Notons que  $\Phi(0, X) = X$ . Notons

$$\Omega = \{(t, X) \in \mathbb{R} \times U \mid t \in J_X\}$$

Alors l'application  $(t, X) \mapsto \Phi(t, X)$  définie de  $\Omega$  dans  $U$  est appelé le *flot* de  $X' = f(X)$  ou *système dynamique* associé à  $X' = f(X)$ . On note souvent  $\Phi_t(X) = \Phi(t, X)$ .

**Théorème 6.13.** L'application  $\Phi$  a les propriétés suivantes.

- (1)  $\Phi_{s+t}(X) = \Phi_s(\Phi_t(X))$ , dans le sens que si l'un des cotés de l'expression est défini, l'autre aussi et il y a alors égalité.
- (2)  $\Omega$  est ouvert dans  $\mathbb{R} \times U$  et  $\Phi : \Omega \rightarrow U$  est continue.
- (3) Si  $(t, X_0) \in \Omega$ , il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $X_0$  tel que  $\{t\} \times V \subset \Omega$ ,  $V_t := \Phi_t(V)$  est ouvert, et  $\Phi_{-t}(\Phi_t(X)) = X$  pour tout  $X \in V$  et  $\Phi_t(\Phi_{-t}(Y)) = Y$  pour tout  $Y \in V_t$ . En particulier  $\Phi_t$  est un homéomorphisme de  $V$  sur  $V_t$ .

**Preuve:** (1) Supposons  $\Phi_{s+t}(X)$  défini, notons  $Y(u) = \Phi_u(X)$  pour  $u \in [0, s+t]$  alors  $Y'(u) = f(Y(u))$ ,  $Y(0) = X$ ,  $Y(t) = \Phi_t(X)$  et  $Y(t+s) = \Phi_{s+t}(X)$ . Notons  $Z(v) = Y(t+v)$ , défini pour  $v \in [0, s]$ . Alors  $Z'(v) = Y'(t+v) = f(Y(t+v)) = f(Z(v))$  et  $Z(0) = Y(t) = \Phi_t(X)$ . En conséquence,

$$\Phi_s(\Phi_t(X)) = Z(s) = Y(t+s) = \Phi_{s+t}(X).$$

Inversement supposons  $\Phi_s(\Phi_t(X))$  défini. Posons  $Y(u) = \Phi_u(X)$  pour  $u \in [0, t]$  puis  $Y(u) = \Phi_u(\Phi_t(X))$  pour  $u \in [t, t+s]$ . Alors  $Y(u)$  est une solution de  $Y' = f(Y)$ , qui vérifie  $Y(0) = \Phi_0(X) = X$ , donc

$$\Phi_{s+t}(X) = Y(s+t) = \Phi_s(\Phi_t(X)).$$

(2) Soit  $(t_0, X_0) \in \Omega$ . Supposons  $t_0 \geq 0$ , l'autre cas étant similaire. Par hypothèse  $t \mapsto \Phi(t, X_0)$  est une solution définie sur  $[0, t_0]$ . En réappliquant le théorème de Cauchy-Lipshitz en 0 et en  $t_0$ , on peut étendre la solution sur  $[-\varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  pour  $\varepsilon > 0$ . Le théorème 6.11 donne alors un voisinage  $V$  de  $X_0$  tel que  $t \mapsto \Phi(t, X)$  est défini sur  $[-\varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  pour tout  $X \in V$ . Donc  $]-\varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \times V \subset \Omega$ . Ceci montre que  $\Omega$  est ouvert. Montrons que  $\Phi$  est continue en  $(t_0, X_0)$ . On peut supposer que  $\bar{V}$  est contenu dans  $U$ . La fonction  $f$  étant  $C^1$  sur  $U$ , elle est localement lipschitzienne donc

$K$ -lipschitz pour une constante  $K > 0$ , sur le compact  $A = \Phi([- \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \bar{V})$ , d'après le lemme 6.12. Soit  $M = \max\{\|f(X)\| \mid X \in A\}$ . Soit  $\delta \in (0, \varepsilon)$  assez petit pour que  $B(X_0, \delta) \subset V$ . Pour  $|t_1 - t_0| < \delta$  et  $X_1 \in B(X_0, \delta)$ ,

$$\begin{aligned} \|\Phi(t_1, X_1) - \Phi(t_0, X_0)\| &\leq \|\Phi(t_1, X_1) - \Phi(t_1, X_0)\| + \|\Phi(t_1, X_0) - \Phi(t_0, X_0)\| \\ &\leq \delta e^{K\delta} + M\delta \end{aligned}$$

(en utilisant 6.11) qui tend vers 0 avec  $\delta$ .

(3) Puisque  $\Omega$  est ouvert, il existe  $\varepsilon > 0$  et un voisinage ouvert  $V$  de  $X_0$  tel que  $]t - \varepsilon, t + \varepsilon[ \times V \subset \Omega$ . Pour  $Y = \Phi_t(X) \in V_t$ , la fonction  $Z(s) = \Phi_{t+s}(X)$  est définie sur  $[-t, 0]$ , vérifie  $Z' = f(Z)$  et  $Z(0) = Y$ , donc  $\Phi_{-t}$  est définie sur  $V_t$  et d'après (2) :

$$\Phi_{-t}(\Phi_t(X)) = \Phi_0(X) = X, \quad \Phi_t(\Phi_{-t}(Y)) = \Phi_0(Y) = Y.$$

Puisque  $\Phi$  est continue,  $\Phi_{-t}$  est continue donc  $V_t = (\Phi_{-t})^{-1}(V)$  est ouvert. □

## Cours 11 : mercredi 03/04/13

### 7 Stabilité dans les systèmes non linéaires

On considère un système différentiel

$$X' = f(X) \quad (7.1)$$

om  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  ouvert. On dit qu'un point  $X_* \in U$  est un point d'équilibre si  $f(X_*) = 0$ . Dans ce cas la solution constante  $X(t) = X_*$  est l'unique solution passant par  $X_*$ . En termes de flot, si  $\Phi : \Omega \rightarrow U$  est le flot associé au système ( $\Omega \subset \mathbb{R} \times U$  ouvert,  $\Phi_t(X) = \Phi(t, X)$  solution de (7.1)), on a  $\Phi_t(X_*) = X_*$ . Pour étudier  $\Phi$  au voisinage de  $X_*$  on utilise son linéarisé.

#### 7.1 Linéarisé

**Définition 7.1.** Soit  $A = J_{X_*} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$  la matrice jacobienne de  $f$  en  $X_*$ . On appelle *partie linéaire* de  $f$  en  $X_*$  la matrice  $A$  et *linéarisé* de (7.1) le système différentiel

$$X' = AX \quad (7.2)$$

EXEMPLE 7.2. Soit  $f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$ . Les points d'équilibre sont  $X_1 = (1, 0)$  et  $X_2 = (-1, 0)$ .

La matrice jacobienne est  $Jf = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Le linéarisé de  $X' = f(X)$  est  $X' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X$  en  $X_1$

et  $X' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X$  en  $X_2$ .

**Définition 7.3.** Soit  $X_*$  un point d'équilibre de (7.1),  $A = J_{X_*}$  la partie linéaire de  $f$ . On dit que

- (1)  $X_*$  est **hyperbolique** si aucune valeur propre de  $A$  n'a partie réelle nulle.
- (2)  $X_*$  est un **puits** si toutes les valeurs propres de  $A$  ont partie réelle  $< 0$ .
- (3)  $X_*$  est une **source** si toutes les valeurs propres de  $A$  ont partie réelle  $> 0$ .
- (4)  $X_*$  est un **point-selle** s'il est hyperbolique mais ni un puits ni une source.

EXERCICE 7.4. Trouver les points d'équilibre des systèmes non linéaires suivants et déterminer leur type

$$(a) \begin{pmatrix} x_1 - x_1x_2 \\ x_2 - x_1^2 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} -4x_2 + 2x_1x_2 - 8 \\ 4x_2^2 - x_1^2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_1x_2 \\ 2x_2 - x_2^2 + x_1^2 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1^2 \\ x_3 + x_1^2 \end{pmatrix}$$

## 7.2 Stabilité asymptotique des puits

En termes de flot la stabilité et la stabilité asymptotique s'énoncent comme suit :

- $X_*$  est *stable* si pour tout voisinage  $V$  de  $X_*$  il existe un voisinage  $W$  de  $X_*$  tel que  $\Phi_t(X)$  est défini pour tout  $t \geq 0$  et reste dans  $V$  si  $X_* \in W$ .
- $X_*$  est *asymptotiquement stable* s'il est stable et si  $\Phi_t(X) \rightarrow X_*$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ , pour tout  $X$  voisin de  $X_*$ .

**Théorème 7.5.** Soit  $X_*$  un point d'équilibre du système (7.1) de type puits et soit  $c > 0$  une constante telle que toute valeur propre de la partie linéaire  $A = J_{X_*}f$  ait partie réelle  $< -c$ . Alors il existe un voisinage  $V \subset U$  de  $X_*$  tel que

- (1)  $\Phi_t(X)$  est défini sur  $V$  pour tout  $t \geq 0$ ,
- (2) Il existe une norme sur  $\mathbb{R}^n$  telle que pour tout  $t \geq 0$ , pour tout  $X \in V$ ,

$$\|\Phi_t(X) - X_*\| \leq e^{-ct} \|X - X_*\|$$

En particulier  $X_*$  est asymptotiquement stable.

**Preuve:** Quitte à remplacer la fonction  $f(X)$  par  $g(X) = f(X + X_*)$ , on peut supposer que  $X_* = 0$ . Soit  $b > 0$  tel que toute valeur propre de  $A = J_0f$  ait partie réelle  $< -b < -c < 0$ . D'après le lemme 5.5 il existe un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$  tel que

$$\langle AX, X \rangle \leq -b\|X\|^2, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

Par définition,

$$f(X) = AX + o(X)$$

donc pour  $\delta > 0$  assez petit,

$$\|f(X) - AX\| \leq (b - c)\|X\|$$

si  $X \in B(0, \delta) := V$ . Par Cauchy-Schwarz,

$$\frac{\langle f(X) - AX, X \rangle}{\|X\|^2} \leq b - c$$

d'où

$$\frac{\langle f(X), X \rangle}{\|X\|^2} \leq (b - c) + \frac{\langle AX, X \rangle}{\|X\|^2} \leq -c$$

pour tout  $X \in V$ . Soit  $X \in V$ ,  $I = [0, t_0]$  maximal tel que  $\phi_t(X)$  soit défini pour  $t \in [0, t_0]$ . Soit  $[0, t_1] \subset [0, t_0[$  maximal tel que  $\Phi_t(X) \in \bar{V}$  alors

$$\frac{d}{dt}\|X(t)\| \leq \frac{\langle X', X \rangle}{\|X\|} \leq -c\|X\| < 0 \quad (7.3)$$

donc  $\|X(t)\|$  décroît sur  $[0, t_1]$ , donc  $\|X(t)\| \leq \|X(0)\| < \delta$  et  $t_1 = t_0$ . Il s'ensuit que  $X([0, t_1]) \subset \bar{V}$ . D'après le corollaire 6.10,  $X(t)$  est défini sur  $[0, +\infty[$  et reste dans  $\bar{V}$ . En intégrant l'inégalité 7.3 on obtient

$$\|X(t)\| \leq e^{-ct}\|X(0)\|.$$

□

### 7.3 Exemple : Le pendule avec friction

On considère un pendule en mouvement, soumis à une force de friction. Soit une corde de longueur  $\ell$ , à laquelle est attachée une masse soumise à une force gravitationnelle  $m\vec{g}$  dirigée vers le bas. On note  $\theta$  l'angle de la corde avec la verticale. La vitesse angulaire est  $\theta'$ , la vitesse tangentielle  $\ell\theta'T$  où  $T = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ . On suppose qu'il y a une force de friction opposée au mouvement et proportionnelle à la vitesse tangentielle, soit  $-k\ell\theta'T$ . En notant  $c(t) = \ell(\sin(\theta(t)), -\cos(\theta(t)))$  la position de la masse, on a

$$\begin{aligned} c'(t) &= \ell\theta'T \\ c''(t) &= \ell\theta''T + \ell\theta'^2(-c) \end{aligned}$$

Faisons le bilan des accélérations et forces dans la direction tangentielle : Accélération tangentielle :  $\theta''\ell$ ,

Friction :  $-k\theta'\ell$

Gravité :  $-mg\sin(\theta)$ .

L'équation de Newton  $\sum F = m\vec{a}$  se traduit, pour sa composante tangentielle, en

$$-k\theta'\ell - mg\sin(\theta) = m\ell\theta''$$

soit l'équation d'ordre 2 non linéaire

$$\theta'' = \frac{-k}{m}\theta' - \frac{g\sin(\theta)}{\ell}$$

On se ramène à un système différentiel en posant  $\omega = \theta'$  :

$$\begin{cases} \theta' & = \omega \\ \omega' & = \theta'' = \frac{-k}{m}\omega - \frac{g \sin(\theta)}{\ell} \end{cases}$$

soit  $\begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \omega \\ \frac{-k}{m}\omega - \frac{g \sin(\theta)}{\ell} \end{pmatrix} = f(\theta, \omega)$ . La matrice jacobienne en  $(\theta, \omega)$  est

$$J_{(\theta, \omega)} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g \cos(\theta)}{\ell} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}.$$

Au point d'équilibre  $(0, 0)$  on obtient le linéarisé

$$A = J_{(0,0)} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}.$$

Les racines de l'équation caractéristique sont

$$\lambda = \frac{-\frac{k}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \frac{4g}{\ell}}}{2}$$

de partie réelles  $-\frac{k}{2m} < 0$  :  $(0, 0)$  est bien un point d'équilibre asymptotiquement stable.

#### 7.4 Théorème de Hartman-Grobman

Le théorème 7.5 montre qu'au voisinage d'un puits, le comportement des solutions d'un système non linéaire ressemble à celui des solutions du linéarisé. Cette propriété est en fait valable en tout point d'équilibre hyperbolique, ce que démontre le très important théorème suivant. Avant de l'énoncer, précisons ce qu'on entend par "ressemblance" des solutions

**Définition 7.6.** Soit  $X' = f(X)$  et  $g' = g(X)$  deux systèmes différentiels où  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont de classe  $C^1$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert contenant l'origine. Notons  $\Phi_t$  le flot associé à  $f$  et  $\Psi_t$  le flot associé à  $g$ . On dit que les deux systèmes sont **topologiquement conjugués** s'il existe un homéomorphisme  $H$  défini d'un voisinage de 0 sur un voisinage de 0 tel que pour  $t$  voisin de 0.

$$\Psi_t(H(X)) = H(\Phi_t(X))$$

**Théorème 7.7 (Hartman-Grobman).** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ ,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant 0,  $\Phi_t$  le flot du système non linéaire  $X' = f(X)$ . Supposons que 0 soit un point d'équilibre hyperbolique du système  $X' = f(X)$  et notons  $A = J_0 f$ . Alors il existe homéomorphisme  $H$  défini d'un voisinage de 0 sur un voisinage de 0 tel que pour tout  $X$  voisin de 0, pour  $t$  voisin de 0

$$H(\Phi_t(X)) = e^{At} H(X)$$

Autrement dit le système non linéaire est topologiquement conjugué à son linéarisé, au voisinage du point d'équilibre. Ce théorème implique 7.5. Nous n'aborderons pas sa preuve, plus délicate.

## Cours 12 : mercredi 10/04/13

On a les corollaires suivants :

**Corollaire 7.8.** Supposons que  $X_*$  soit un point d'équilibre stable de (7.1). Alors aucune valeur propre de la partie linéaire  $A = J_{X_*}$  n'a de partie réelle  $> 0$ . En particulier, un point-selle est instable.

**Corollaire 7.9.** Un point d'équilibre hyperbolique est asymptotiquement stable ou instable.

EXERCICE 7.10. Montrer que le point d'équilibre  $\theta = \pi$  du pendule est instable.

Il reste à étudier la stabilité éventuelle en des points non hyperboliques, i.e. lorsqu'une valeur propre au moins de la partie linéaire est de partie réelle nulle. Un critère très utile pour établir la stabilité est l'existence de *fonctions de Lyapounov*.

### 7.5 Fonctions de Lyapounov

Soit  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable sur  $U \setminus \{X_*\}$ . Etant donnée une équation (7.1), on note  $\dot{V} : U \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction

$$\dot{V}(X) = d_X V \cdot f(X) = \langle \nabla_X V, f(X) \rangle$$

Si  $\Phi_t(X)$  est une trajectoire de  $X' = f(X)$ , on alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\Phi_t(X)) \Big|_{t=0} &= d_X V \cdot \frac{d}{dt} \Phi_t(X) \\ &= \dot{V} \end{aligned}$$

**Théorème 7.11.** Soit  $X_*$  un point d'équilibre de (7.1). Soit  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $U$ , différentiable sur  $U \setminus \{X_*\}$ . On suppose que

- (1)  $V(X_*) = 0$ ,  $V(X) > 0$  si  $X \neq X_*$ .
- (2)  $\dot{V} \leq 0$  sur  $U \setminus \{X_*\}$ .  
Alors  $X_*$  est stable. Si de plus on a
- (3)  $\dot{V} < 0$  sur  $U \setminus \{X_*\}$ ,  
alors  $X_*$  est asymptotiquement stable.

**Définition 7.12.** On appelle **fonction de Lyapounov** une telle fonction  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant (1)-(2). On appelle **fonction de Lyapounov stricte** une fonction qui satisfait de plus (3)

Remarquons que dans le théorème, on ne fait pas du tout référence aux valeurs propres du linéarisé. On a en fait déjà rencontré une fonction de Lyapounov stricte : la fonction  $X \mapsto \|X\|$  dont on a montré, lorsque  $X_*$  était un puits, qu'elle satisfaisait  $\frac{d}{dt}\|X(t)\| < 0$  le long des trajectoires. C'est exactement la condition (3) ci-dessus. Démontrons le théorème :

**Preuve:** Considérons une boule fermée  $\overline{B(X_*, \delta)} \subset U$ . Puisque  $V > 0$  sur  $U \setminus \{X_*\}$ , par continuité de  $V$  et compacité de la sphère  $S(X_*, \delta)$ , il existe

$$0 < \alpha = \min\{V(X) \mid X \in S(X_*, \delta)\}.$$

Posons  $W = \overline{B(X_*, \varepsilon)}$  pour  $\varepsilon > 0$  assez petit tel que  $V < \alpha$  sur  $W$  ( $\varepsilon$  existe par continuité de  $V$  et l'hypothèse  $V(0) = 0$ ). Si  $X \in W \setminus \{X_*\}$ , alors  $t \mapsto V(\Phi_t(X))$  est décroissante (puisque sa dérivée est  $\dot{V} \leq 0$ ) donc  $V(\Phi_t(X)) < \alpha$  pour  $t \geq 0$ , ce qui implique que  $\Phi_t(X)$  reste dans  $\overline{B(X_*, \delta)}$  et est défini  $\forall t \geq 0$ .

Supposons maintenant que  $V$  soit une fonction de Lyapounov stricte. Alors  $\dot{V} < 0$  implique que  $V$  décroît strictement le long des trajectoires de  $U \setminus \{X_*\}$ . Soit  $\Phi_t(X)$  une trajectoire telle que  $X \in W \setminus \{X_*\}$ . Par compacité de  $\overline{B(X_*, \delta)}$  il existe  $X_\infty$  tel que  $\Phi_{t_n}(X) \rightarrow X_\infty$  pour une sous-suite  $t_n \rightarrow \infty$ . On affirme que  $X_\infty = X_*$ . Notons d'abord que

$$V(X_\infty) < V(\Phi_t(X)) \tag{7.1}$$

par décroissance stricte de  $V(\Phi_t(X))$ . Si  $X_\infty \neq X_*$ , alors

$$V(\Phi_t(X_\infty)) < V(X_\infty) \tag{7.2}$$

également pour tout  $t > 0$ . Fixons  $s > 0$ . Puisque  $X_n := \Phi_{t_n}(X) \rightarrow X_\infty$ , alors

$$\Phi_{s+t_n}(X) = \Phi_s(X_n) \rightarrow \Phi_s(X_\infty)$$

par continuité de  $\Phi_s$ , d'où pour  $n$  assez grand, par continuité de  $V$ ,

$$V(\Phi_{s+t_n}(X)) \rightarrow V(\Phi_s(X_\infty)) < V(X_\infty)$$

par (7.2), ce qui contredit (7.1).

Il s'ensuit que  $X_*$  est la seule limite possible de  $\{\Phi_t(X) \mid t \geq 0\}$ , d'où  $\Phi_t(X) \rightarrow X_*$ .  $\square$

EXEMPLE 7.13. Soit le système  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \end{pmatrix}$ . Au point d'équilibre  $X_* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , la partie linéaire est

$$Jf = \begin{pmatrix} 0 & -3y^2 \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc  $X_*$  n'est pas hyperbolique. Considérons  $V(x, y) = x^4 + y^4 > 0$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{X_*\}$ . De plus

$$\dot{V} = (4x^3, 4y^3) \cdot \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0$$

Le théorème 7.11 permet d'affirmer que  $X_*$  est stable. L'étude des lignes de niveau de la fonction  $V$  permet d'en dire plus. Les courbes de niveau de  $V$ ,

$$\{(x, y) \mid V(x, y) = c\}$$

forment une famille de courbes fermées entourant l'origine. Puisque  $\dot{V} = 0$ ,  $V$  est constante le long des trajectoires, ce qui signifie qu'une trajectoire  $X(t)$  reste contenue dans le niveau  $\{(x, y) \mid V(x, y) = V(X(0))\}$ . En conséquence,  $X_*$  n'est pas asymptotiquement stable.

Dans une situation où  $\dot{V} < 0$  hors de  $X_*$ , les trajectoires doivent traverser les lignes de niveau. Observons que les lignes de niveau d'une fonction sont orthogonales en chaque point au gradient  $\nabla V$  de la fonction. Le champ de vecteur  $\nabla V$  donne en chaque point la direction dans laquelle la croissance de  $V$  est maximale (penser à la ligne de plus grande pente d'une colline). L'hypothèse

$$\dot{V} = \langle \nabla_X V, f(X) \rangle < 0$$

signifie que le champ de vecteur  $f(X)$  est orientée dans une direction opposée (faisant un angle  $> \pi/2$ ) à celle du gradient de  $V$  : la valeur de  $V$  décroît si on se déplace dans la direction  $f(X)$ , i.e. le long des trajectoires. Si les courbes de niveau forment une famille de courbes fermées entourant un centre  $X_*$ , il est intuitivement clair (et c'est ce que montre le théorème) que les trajectoires n'ont pas d'autre choix que de converger vers le centre.

## 7.6 Un exemple : le système proie-prédateur de Lotka et Volterra

Il s'agit du système différentiel non linéaire

$$x' = ax - bxy = x(a - by) \tag{7.3}$$

$$y' = -cy + dxy = y(-c + dx) \tag{7.4}$$

où  $a, b, c, d > 0$ . C'est une équation du type  $X' = F(X)$  où  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}^n$  et de classe  $C^1$ . Il existe donc, pour toute donnée initiale  $X_0 = (x_0, y_0)$ , une unique solution maximale  $(J, X(t) = (x(t), y(t)))$  issue de  $X_0$ . On s'intéresse à des quantités  $x(t)$  et  $y(t)$  positives,  $x(t)$  représentant une population de proies et  $y(t)$  une population de prédateurs.

Lorsque  $y_0 = 0$ , on voit que  $y(t) = 0$  sur  $\mathbb{R}$  est solution de (7.4) et que (7.3) se résout en  $x(t) = x_0 e^{at}$ . Inversement, si  $x_0 = 0$  alors  $x(t) = 0$  sur  $\mathbb{R}$  résout (7.3) et alors  $y(t) = y_0 e^{-ct}$ . En l'absence de son prédateur, la population de proies croît exponentiellement. En l'absence de proies la population de prédateurs décroît exponentiellement. C'est évidemment un modèle rudimentaire. Les axes (Ox) et (Oy) sont stables par le flot de l'équation.

La solution  $(0, 0)$  est un point d'équilibre évident. On vérifie sans peine que  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  est l'unique autre point d'équilibre. Etudions leur type. La partie linéaire de  $F$  est

$$J_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}.$$

En  $(0, 0)$ ,

$$J_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix},$$

d'où  $(0, 0)$  est un point selle et donc un point hyperbolique. C'est donc un point d'équilibre instable par le théorème de Hartman-Grobman.

En  $X_* = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ ,

$$J_{X_*}f = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est  $P(\lambda) = \lambda^2 + ac$ , les valeurs propres sont  $\pm i\sqrt{ac}$ , imaginaires pures. Le point d'équilibre  $X_*$  n'est pas hyperbolique donc le théorème de Hartman-Grobman ne s'applique pas.

Cherchons une fonction de Lyapounov. Commençons par chercher  $V : ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\dot{V} = \frac{d}{dt}V(X(t)) \leq 0$$

sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ - \{X_*\}$ . On a

$$\dot{V} = x' \frac{\partial V}{\partial x} + y' \frac{\partial V}{\partial y}.$$

En écrivant

$$\begin{aligned} x' &= xy \left( \frac{a}{y} - b \right) \\ y' &= xy \left( -\frac{c}{x} + d \right) \end{aligned}$$

il vient

$$x' \left( -\frac{c}{x} + d \right) - y' \left( \frac{a}{y} - b \right) = 0$$

Donc si on peut trouver  $V$  telle que

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left( -\frac{c}{x} + d \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\left( \frac{a}{y} - b \right)$$

on aura  $\dot{V} = 0$ . Or il suffit de poser  $V(x, y) = G(x) + H(y)$  où  $G$  est une primitive de  $(-\frac{c}{x} + d)$  et  $H$  une primitive de  $-(\frac{a}{y} - b)$ . On obtient

$$V(x, y) = -c \ln x + dx - a \ln y + by.$$

Le tableau de variation de  $G$  et  $H$  montre que  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  est le minimum strict de  $V$  sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ . De plus  $V$  est continue sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ . Il s'ensuit que  $V - V(X_*)$  est une fonction de Lyapounov du système en  $X_*$ . On conclut du théorème 7.11 que  $X_*$  est un point d'équilibre stable.

En travaillant plus, on peut montrer que pour tout  $X_0 = (x_0, y_0)$  (dans le quadrant supérieur droit) différent du point d'équilibre  $X_*$ , la trajectoire issue de  $X_0$  est périodique autour de  $X_*$ .