Cours N1MA6014 : Géométrie et Topologie

Laurent Bessières

S6, 2012-2013

Cours 1 : 17/01/13

Ce cours est une initiation à la topologie algébrique, branche des mathématiques qui utilise des outils d'algèbre pour étudier des espaces topologiques. De quoi s'agit-il ? Une question fondamentale pour les topologues est de classifier les espaces topologiques. On veut, par exemple, faire la liste de toutes les surfaces, à homéomorphisme près, ou savoir si deux surfaces données sont homéomorphes ou pas. L'idée centrale pour attaquer ce genre de question est d'associer à l'objet topologique un objet algébrique (entier, groupe, etc..) de manière qu'à deux objets topologiques homéomorphes soient associées deux objets algébriques isomorphes. On peut alors tester sur ces derniers l'équivalence ou non des premiers.

Un des premiers succès de la topologie algébrique (au alentour des années 1900) a été la classification des surfaces, que nous montrerons à la fin du cours. Nous commencerons par introduire les principales notions de topologie générale, qui sera plus efficace pour construire surfaces et variétés (l'analogue n-dimensionnel d'une surface) que les simples espaces métriques. Nous introduirons alors le groupe fondamental, groupe associé à un espace topologique. Nous montrerons ensuite le théorème principal permettant de calculer ces groupes, le théorème de Seifert-Van Kampen. On conclura avec la classification.

Le plan du cours est donc le suivant (sous réserve) :

(1) Topologie générale.
(2) Surfaces et variétés
(3) Groupe fondamental.
(4) Théorème de Seifert-Van Kampen
(5) Classification des surfaces compactes.

Mentionnons que le problème de topologie le plus célèbre du 20e siècle, la *conjecture de Poincaré*, est une question de classification. On peut l'énoncer comme suit : une variété de dimension 3 compacte, connexe, sans trou (on dira plus tard dans le cours *simplement connexe*) est homéomorphe à S^3 (Poincaré, 1904). Cette question à 1 million de dollars (véridique !) a été prouvée récemment (Perelman, 2002) par des méthodes d'analyse et de géométrie. C'est une autre histoire.

1 Topologie Générale

On va commencer par définir des *espaces topologiques*, généralisation des espaces métriques. Ils seront plus pratiques pour certaines constructions. Sur un espace métrique (E, d), on a une notion de partie *ouverte* : tout $O \subset E$ tel que

$$\forall x \in E, \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset E.$$

Leur propriété fondamentale est qu'une union quelconque d'ouverts est ouverte, une intersection finie d'ouverts est ouverte. On peut exprimer les notions de limite, continuité, compacité, connexité, etc... à l'aide d'ouverts. Le but de la topologie générale est de généraliser ces notions à un espace X sans utiliser de distance. Pour ce faire on va prendre la propriété fondamentale des ouverts comme axiome.

1.1 Espaces topologiques

Définition 1.1. Une **topologie** sur un ensemble X est une collection $\mathcal{T}$ de parties de X vérifiant les axiomes suivants :

(1) $\emptyset$ et X sont dans $\mathcal{T}$.

(2) Une union quelconque d'éléments de $\mathcal{T}$ est dans $\mathcal{T}$.

(3) Une intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est dans $\mathcal{T}$.

Le couple $(X, \mathcal{T})$ est appelé **espace topologique**. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés **ouverts** de $(X, \mathcal{T})$, ou simplement ouvetrts de X s'il n'y pas d'ambiguité.

Dans l'axiome (3) on peut remplacer "intersection finie" par "intersection de deux éléments", l'équivalence découlant par une récurrence immédiate utilisant l'égalité

$$(U_1 \cap \ldots \cap U_n) = (U_1 \cap \ldots \cap U_{n-1}) \cap U_n.$$

Exemple 1.2. La collection des ouverts d'un espace métrique (E, d) est une topologie sur E.

Exemple 1.3. On appelle **topologie grossière** sur X, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. On appelle **topologie discrète** $\mathcal{T} = \mathcal{P}X$, i.e. la collection de toutes les parties de X. Pour cette topologie toutes les parties, en particulier les singletons, sont ouvertes.

Exemple 1.4. Topologies sur $X = \{a, b, c\}$. $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, a, b\}$ n'est pas une topologie, $\mathcal{T}' = \{\emptyset, X, a, b, \{a, b\}\}$ oui, $\mathcal{T}' = \{\emptyset, X, a, \{a, b\}\}$ non.

Définition 1.5. On dit qu'une topologie $\mathcal{T}$ sur X est **métrisable** s'il existe une distance d sur X dont les ouverts sont ceux de $\mathcal{T}$.

Si X a plus de 2 éléments, la topologie grossière n'est pas métrisable. En effet si $x \neq y \in X$ et si d est une distance sur X, la boule ouverte $B_d(x, d(x,y))$ est un ouvert non vide ne contenant pas y, donc différent de $\emptyset$ et X. La topologie discrète est métrisable : on prend $d(x,x) = 0$ et $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$.

Exercice 1.6. Soit X un ensemble ; soit $\mathcal{T}_f$ la collection de tous les $U \subset X$ tels que $X - U$ est fini ou égal à X. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X. On l'appelle la topologie du **complémentaire fini**.

L'inclusion définit une relation d'ordre (partiel) sur l'ensemble des topologies de X :

Définition 1.7. Soit $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ deux topologies sur X. On dit que $\mathcal{T}'$ est **plus fine** que $\mathcal{T}$ si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$; $\mathcal{T}'$ est **strictement plus fine** que $\mathcal{T}$ si $\mathcal{T}'$ contient strictement $\mathcal{T}$. On dit que $\mathcal{T}$ est plus **grossière** que $\mathcal{T}'$, ou **strictement plus grossière**, dans ces deux situations respectives. On dit $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont **comparables** si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ ou si $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$.

Exemple 1.8. Sur $X = \{a, b, c\}$,$\{\emptyset, X, a\} \subset \{\emptyset, X, a, b, \{a, b\}\}$.

1.2 Bases d'une topologie

Définir une topologie peut-être assez compliqué car il y a beaucoup d'éléments. Souvent on se donne une sous-collection, *la base*, qui engendre la topologie.

Définition 1.9. Soit X un ensemble, une collection $\mathcal{B}$ de parties de X est une **base** de topologie pour X si :

(1) Pour chaque $x \in X$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B$.

(2) Pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et $x \in B_1 \cap B_2$, il existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Remarque 1.10. L'axiome (2) est une sorte de stabilité faible par intersection finie (on ne demande pas que $B_1 \cap B_2$ soit dans $\mathcal{B}$). C'est vérifié par les boules ouvertes d'un espace métrique (c'est l'exemple auquel penser) : l'intersection de 2 boules ouvertes n'est pas (en général) une boule ouverte mais chaque point de l'intersection est centre d'une boule contenue dans l'intersection. Les boules ouvertes forment une base pour la topologie des espaces métriques.

Avec une telle base, on fabrique une topologie :

Définition 1.11 (Topologie engendrée par une base)**.** Soit $\mathcal{T}_\mathcal{B}$ la collection des réunions quelconques d'éléments de $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{T}_\mathcal{B} = \{\bigcup_{i \in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{B}, i \in I\}$$

On appelle $\mathcal{T}_\mathcal{B}$ la **topologie engendrée par** $\mathcal{B}$ et on dit que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$.

Lemme 1.12. (1) $\mathcal{T}_\mathcal{B}$ est une topologie.
(2) Une partie $A \subset X$ est ouverte si et seulement si

$$\forall x \in A, \exists B \in \mathcal{B}, x \in B \subset A.$$

Les éléments de $\mathcal{B}$ jouent donc le même rôle que les boules ouvertes d'un espace métrique.

`Preuve:` (1) Vérifions les 3 axiomes de la définition 1.1.
Axiome (1) $\emptyset \in \mathcal{T}_\mathcal{B}$ en prenant la réunion vide. Pour chaque $x \in X$, notons $B_x \in \mathcal{B}$ un élément de la base donné par l'axiome 1.9(1). Alors $X = \cup_{x \in X} B_x \in \mathcal{T}_\mathcal{B}$.
Axiome (2) Soit (U_α) une collection d'éléments de $\mathcal{T}_\mathcal{B}$; alors $U_\alpha = \cup_{i \in I_\alpha} B_i$ où $B_i \in \mathcal{B}$. On a

$$\bigcup_\alpha U_\alpha = \bigcup_\alpha \bigcup_{i \in I_\alpha} B_i = \bigcup_{\alpha, i \in I_\alpha} B_i \in \mathcal{T}_\mathcal{B}$$

Axiome (3) Soit $U_1 = \cup_{i \in I} B_i$ et $U_2 = \cup_{j \in J} B_j$, alors $U_1 \cap U_2 = \bigcup B_i \cap B_j$. Soit $x \in U_1 \cap U_2$, alors il existe i, j tel que $x \in B_i \cap B_j$. Notons $B_x \in \mathcal{B}$, l'élément donné par l'axiome 1.9(2) tel que $x \in B_x \subset B_1 \cap B_2$. On a alors $B_x \subset U_1 \cap U_2$, puis

$$U_1 \cap U_2 = \left(\bigcup_{x \in U_1 \cap U_2} B_x \right) \in \mathcal{T}_\mathcal{B}.$$

(2) Soit A un ouvert et $x \in A$. Puisque A est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$, x est dans un de ces éléments, appelons le B et alors $x \in B \subset A$. Réciproquement, soit A tel que $\forall x \in A, \exists B \in \mathcal{B}, x \in B \subset A$; pour chaque $x \in A$ notons $B_x \in \mathcal{B}$ un tel élément de $\mathcal{B}$, alors $A = \cup_{x \in A} B_x \in \mathcal{T}_\mathcal{B}$. $\square$

Exercice 1.13. (1) Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de topologie sur X. Montrer que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ est plus fine que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ si et seulement si pour chaque $x \in X$ et $B \in \mathcal{B}$ contenant x, il existe $B' \in \mathcal{B}'$ tel que $x \in B' \subset B$.

(2) Montrer que $\mathcal{B} = \{]a, b[|\ a < b, a \text{ et } b \text{ réels}\}$ et $\mathcal{B}' = \{]a, b[|\ a < b, a \text{ et } b \text{ rationnels}\}$ sont deux bases engendrant la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

A quoi on reconnait une base, quand on a déjà la topologie ? Il suffit qu'elle vérifie l'assertion (2) du lemme 1.12, plus précisément :

Lemme 1.14. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{B}$ une collection d'ouverts telle que pour tout U ouvert de X et tout $x \in U$, il existe $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subset U$. Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$.

`Preuve:` L'axiome 1.9(1) est vérifié en prenant $U = X$. Pour 1.9(2), soit $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et $x \in B_1 \cap B_2$. Puisque B_1 et B_2 sont ouverts, $B_1 \cap B_2$ est ouvert donc il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$ par hypothèse. $\square$

On peut faire encore plus simple pour engendrer une topologie : engendrer une base à l'aide d'une *sous-base* qui est simplement d'une collection $\mathcal{S}$ de parties de X dont l'union est égale à X. La collection des intersections finies d'éléments de $\mathcal{S}$ est alors une base de topologie. La topologie engendrée est alors l'ensemble des réunions quelconques d'intersections finies d'élements de $\mathcal{S}$.

Exercice 1.15. (1) Vérifier que ça marche.

(2) Soit $(\mathcal{T}_\alpha)$ une famille de topologies sur X. Montrer que $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$ est une topologie.

(3) Soit $\mathcal{B}$ une base de topologie de X. Montrer que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ est l'intersection de toutes les topologies contenant $\mathcal{B}$.

1.3 Topologie produit

On note $X \times Y$ le produit cartésien de X et Y, i.e. l'ensemble des couples (x, y) où $x \in X$, $y \in Y$.

Définition 1.16. Soit X, Y deux espaces topologiques.On appelle **topologie produit** sur $X \times Y$ la topologie engendrée par la base

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \text{ ouvert de } X; V \text{ ouvert de } Y\}.$$

(on dit que c'est la topologie engendrée par les **cubes** $U \times V$). Vérifions que $\mathcal{B}$ est une base de topologie : l'axiome 1.9(1) est vérifié car $X \times Y \in \mathcal{B}$; pour 1.9(2) $\mathcal{B}$ est stable par intersection finie : si $U \times V$ et $U' \times V'$ sont dans $\mathcal{B}$, alors

$$(U \times V) \cap (U' \times V') = (U \cap U') \times (V \cap V') \in \mathcal{B}$$

car $U \cap U'$ est ouvert dans X et $V \cap V'$ ouvert dans Y.

Remarque 1.17. On vérifie aisément que si $\mathcal{B}$ une base de X et $\mathcal{C}$ une base de Y, alors la collection

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$$

est aussi une base de $X \times Y$.

1.4 Topologie induite

Définition 1.18. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $Y \subset X$, alors la collection

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$$

est une topologie sur Y, appelée la **topologie induite**.

La vérification est immédiate. Lorsqu'on omettra les topologies, on dira simplement que U **est ouvert dans** Y s'il est ouvert pour la topologie induite, et **ouvert dans** X s'il appartient à la topologie de X.

Exemple 1.19. Soit $Y = [0, 2] \subset \mathbb{R} = X$ muni de sa topologie usuelle. Alors $]1, 2]$ est ouvert dans Y (et pas dans X) car $]1, 2] =]1, 3[\cap Y$. De même $[0, 2]$ est ouvert dans Y (et pas dans X).

On peut se demander quand un ouvert pour Y l'est aussi pour X.

Lemme 1.20. Soit $Y \subset X$. Si U est ouvert dans Y et Y est ouvert dans X, alors U est ouvert dans X.

`Preuve:` On a $U = V \cap Y$ où V, et Y par hypothèse, sont ouverts dans X. □

Exercice 1.21. Soit $Y = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$. Lesquels des ensembles suivants sont ouverts dans Y ? Dans $\mathbb{R}$?

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid \frac{1}{2} < |x| < 1\}, \\ B &= \{x \mid \frac{1}{2} < |x| \leq 1\}, \\ C &= \{x \mid \frac{1}{2} \leq |x| < 1\}, \\ D &= \{x \mid \frac{1}{2} < |x| < 1\}, \\ E &= \{x \mid 0 < |x| < 1 \text{ et } 1/x \notin \mathbb{Z}_+\} \end{aligned}$$

Que se passe t'il au niveau des bases ? Ce qu'on imagine :

Lemme 1.22. Soit $\mathcal{B}$ une base de la topologie $\mathcal{T}$, alors la collection

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

est une base de la topologie induite $\mathcal{T}_Y$.

`Preuve:` Soit $y \in Y$ et U un ouvert de Y tel que $y \in U$. Il existe V ouvert dans X tel que $U = V \cap Y$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de topologie por X, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $y \in B \subset V$. On a alors d'où $y \in B \cap Y \subset V \cap Y = U$ et on applique le critère 1.14. $\square$

1.5 Fermés, adhérence

Définition 1.23. Une partie A d'un espace topologique X est **fermée** si $X - A$ est ouverte.

Les intervalles fermés sont fermés dans $\mathbb{R}$. Pour la topologie discrète, toutes les parties sont ouvertes et fermées. Pour la topologie du complémentaire fini, les fermés sont les parties finies et l'ensemble entier.

Exemple 1.24. Soit $Y = [0, 1] \cup]2, 3[$ muni de la topologie induite usuelle. Alors $[0, 1]$ est ouvert dans Y, car $[0, 1] =]-1, 1.5[\cap Y$. Il s'ensuit que $]2, 3[$ est fermé dans Y. Comme $]2, 3[$ est ouvert dans Y, $[0, 1]$ est aussi fermé dans Y.

Lemme 1.25 (Propriété fondamentale des fermés)**.** Soit X un espace topologique, alors :

(1) $\emptyset$ et X sont fermés.

(2) Une intersection quelconque de fermés est fermée.
(3) Une union finie de fermés est fermée.

`Preuve:` Découle de

$$X - \bigcap U_\alpha = \bigcup (X - U_\alpha), \qquad X - \bigcup U_\alpha = \bigcap (X - U_\alpha)$$

□

Lemme 1.26. Soit $Y \subset X$. Une partie $A \subset Y$ est fermée dans Y si et seulement si A est l'intersection de Y et d'un fermé de X.

Cours 2 : jeudi 24/01/13

`Preuve:` Supposons que A soit fermé dans Y. Alors $Y - A$ est ouvert dans Y, donc il existe U ouvert de X tel que $Y - A = U \cap Y$. Mais $A = (X - (Y - A)) \cap Y = (X - (U \cap Y)) \cap Y = ((X - U) \cup X - Y) \cap Y = (X - U) \cap Y$ où $X - U$ est bien un fermé de X. Réciproquement supposons que $A = F \cap Y$ où F est fermé dans X. Alors $Y - A = (Y - F) \cup (Y - Y) = Y - F = (X - F) \cap Y$ est bien un ouvert de Y car $X - F$ est ouvert dans X. $\square$

En résumé les ouverts et fermés de Y sont les traces sur Y des ouverts et fermés de X, respectivement.

Définition 1.27. Etant donné une partie A d'un espace topologique X, on définit l' **intérieur** de A comme l'union de tous les ouverts de X contenus dans A :

$$\mathrm{Int}A = \bigcup_{U \text{ ouvert de} X, U \subset A} U.$$

On définit l'**adhérence** de A comme l'intersection de tous les fermés de X contenant A :

$$\bar{A} = \bigcap_{F \text{ fermé de } X, F \supset A} F.$$

On peut aussi trouver la notation $\mathrm{Int}A = \overset{\circ}{A}$.

Proposition 1.28 (Propriétés de l'intérieur et de l'adhérence)**.** Soit X un espace topologique et A une partie de X.

(1) $\mathrm{Int}A \subset A$ est ouvert dans X, A est ouvert $\Leftrightarrow A = \mathrm{Int}A$ et

$$\mathrm{Int}(A) = \{x \in A \mid \exists U \subset A, U \text{ ouvert de } X, x \in U\}.$$

(2) $\bar{A} \supset A$ est fermé dans X, A est fermé $\Leftrightarrow A = \bar{A}$.

(3) $\overline{X-A} = X - \mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Int}(X-A) = X - \bar{A}$.

(4) $\mathrm{Int}A$ est le plus gros ouvert de X contenu dans A : $\mathrm{Int}A$ est ouvert et si U ouvert de X et $U \subset A$, alors $U \subset \mathrm{Int}A$.

(5) $\bar{A}$ est le plus petit fermé de X contenant A : $\bar{A}$ est fermé et si F fermé de X et $F \supset A$, alors $\bar{A} \subset F$.

(6) Si $A \subset B$, $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(B)$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$.

`Preuve:`
(1) $\mathrm{Int}(A)$ est une union d'ouverts donc ouvert ; si A est ouvert il est dans l'union donc $A = \mathrm{Int}(A)$, la réciproque est claire. Soit $x \in \mathrm{Int}A$. Par définition il existe U ouvert $x \in U \subset A$. Réciproquement, si $x \in U$ ouvert $\subset A$, x est dans la réunion de ouverts $\subset A$.
(2) $\bar{A}$ est une intersection de fermés donc fermé. Si A est fermé il est dans l'intersection, la réciproque est claire.
(3) $x \in \overline{X-A} \Leftrightarrow \forall F$ fermé tel que $F \supset X-A$, $x \in F$. Or $F \supset X-A \Leftrightarrow X-F \subset A$, et $X-F = U$ est ouvert. On a donc équivalence avec $x \notin U$, pour tout ouvert $U \subset A$, soit $x \notin \mathrm{Int}A$. En posant $B = X-A$ et en prenant le complémentaire de l'égalité montrée, $X-\overline{B} = X-(X-\mathrm{Int}(X-B))$ soit $X - \overline{B} = \mathrm{Int}B$ pour tout $B \subset X$.
(4) Si $U \subset A$ et U ouvert alors U est contenu dans la réunion des ouverts $\subset A$, donc $U \subset \mathrm{Int}A$.
(5) Si $F \supset A$ et F est fermé alors l'intersection des fermés $\supset A$ est contenue dans F, donc $\bar{A} \subset F$.
(6) Soit $A \subset B$. Soit $x \in \mathrm{Int}A$ alors il existe U_x ouvert, $x \in U_x \subset A$; alors $x \in U_x \subset B$ et $x \in \mathrm{Int}B$. $\bar{B}$ est un fermé et $A \subset B \subset \bar{B}$, or $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A donc $\bar{A} \subset \bar{B}$. □

Si $A \subset Y \subset X$, l'adhérence de A dans Y peut différer de celle de A dans X. On notera toujours $\bar{A}$ l'adhérence dans X. L'adhérence de A dans Y est alors $\bar{A} \cap Y$. En effet :

Théorème 1.29. Soit $Y \subset X$; soit $A \subset Y$. Alors l'adhérence de A dans Y est $\bar{A} \cap Y$.

`Preuve:` Notons B l'adhérence de A dans Y. Alors $B \subset \bar{A} \cap Y$ qui est un fermé de Y contenant A. Par ailleurs B est fermé dans Y donc $B = F \cap Y$ pour un fermé F de X. Comme $A \subset B \subset F$, $F \supset \bar{A}$. On conclut que $B = F \cap Y \supset \bar{A} \cap Y$, d'où l'égalité. □

Définition 1.30. Soit A une partie d'un espace topologique X. On dit que $x \in X$ est un **point d'accumulation** de A si pour tout tout ouvert U contenant x, $U - \{x\}$ intersecte A. On note A' l'ensemble des points d'accumulation de A,

$$A' = \{x \in X \mid \text{ pour tout ouvert } U \text{ contenant } x,\ U - \{x\} \text{ intersecte } A\}.$$

Théorème 1.31. Soit A une partie d'un espace topologique X.

(1) $\bar{A} = A \cup A'$.

(2) $x \in \bar{A}$ si et seulement si tout ouvert U contenant x intersecte A.

Une autre manière de définir l'adhérence est donc

$$\mathrm{Int}(A) = \{x \in X \mid \forall U \text{ ouvert de } X \text{ contenant } x,\ U \cap A \neq \emptyset\}.$$

`Preuve:` Montrons d'abord (2). Pour cela montrons l'assertion équivalente :

$$x \notin \bar{A} \Leftrightarrow \text{ il existe un ouvert } U \text{ contenant } x \text{ disjoint de } A.$$

Supposons que $x \notin \bar{A}$. Alors $U = X - \bar{A}$ est un ouvert contenant x disjoint de A. Réciproquement, supposons que U soit un ouvert contenant x, disjoint de A. Alors $X - U$ est un fermé contenant A, donc $X - U \supset \bar{A}$. Comme $x \in U$, $x \notin \bar{A}$.
(1) l'inclusion $\bar{A} \supset A \cup A'$ est évidente car $A \subset \bar{A}$ et si $x \in A'$, si U est un ouvert contenant x, alors $U - \{x\}$ intersecte A donc U aussi, d'où $A' \subset \bar{A}$. Réciproquement, supposons que $x \in \bar{A}$ et que $x \notin A$. Soit U un ouvert contenant x, par (2) il intersecte A en un point $y \in U \cap A$. Puisque $x \notin A$, $y \neq x$ et donc $U - \{x\}$ intersecte A. D'où $x \in A'$ comme voulu. □

Exemple 1.32. Pour $A =]0,1[\subset \mathbb{R}$, $\bar{A} = A' = [0,1]$. Pour $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$, $\bar{A} = A \cup \{0\}$, $A' = \{0\}$.

Un ouvert U contenant x est un cas particulier de *voisinage* de x.

Définition 1.33. On dit qu'une partie $V \subset X$ est un **voisinage** de x s'il existe un ouvert U_x tel que $x \in U_x \subset V$. On note $\mathcal{V}_x$ l'ensemble des voisinages de x.

Proposition 1.34 (Propriétés des voisinages)**.** (1) Si $V \in \mathcal{V}_x$ et $V \subset V'$ alors $V' \in \mathcal{V}_x$.

(2) Si $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}_x$, alors $V_1 \cap \cdots \cap V_n \in \mathcal{V}_x$.

(3) Si $V \in \mathcal{V}_x$, il existe $U \subset V$, $U \ni x$, $U \in \mathcal{V}_{x'}$ pour tout $x' \in U$.

`Preuve:`
(1) Si $V \in \mathcal{V}_x$, il existe U ouvert, $x \in U \subset V$, alors $x \in U \subset V \subset V'$ donc $V' \in \mathcal{V}_x$.
(2) Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ il existe U_i ouvert, $x \in U_i \subset V_i$, alors $x \in U_1 \cap \cdots \cap U_n \subset V_1 \cap \cdots \cap V_n$ d'où $V_1 \cap \cdots \cap V_n \in \mathcal{V}_x$.
(3) Si $V \in \mathcal{V}_x$, il existe U ouvert, $x \in U \subset V$, alors pour tout $x' \in U$, $x' \in U \subset V$ donc $V \in \mathcal{V}_{x'}$. □

En particulier un ouvert est voisinage de chacun de ses points, cette propriété caractérisant d'ailleurs les ouverts. Le théorème 1.31(2) est vrai si on remplace "tout ouvert contenant x"

par "tout voisinage de x". Dans la définition d'un point d'accumulation, il est équivalent de demander que "tout voisinage épointé de x intersecte A".

Remarque 1.35. Ceux qui se rappellent du cours "Espaces métriques" se demandent peut-être pourquoi il n'est pas mentionné l'équivalence séquentielle : $x \in \bar{A}$ ssi x est limite (dans X) d'une suite (x_n) de A. C'est qu'il n'est pas vrai en toute généralité.

On rappelle qu'*une suite* dans un espace X est une application $x : \mathbb{N} \to X$. Pour $n \in \mathbb{N}$, les éléments $x(n)$ sont souvent notés x_n, et la suite est notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (x_n). Définir une limite de suite ne pose pas de problème dans un espace topologique :

Définition 1.36. Soit X un espace topologique. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X et $x \in X$. On dit que (x_n) converge vers x si pour tout voisinage V de x, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in V$ pour tout $n \geq n_0$.

Par contre on rencontre des difficultés à définir *la* limite d'une suite : celle-ci n'est pas forcément unique ! Pour la topologie grossière une suite quelconque converge vers tout les points ! Voir aussi l'exemple 1.4. La suite $x_n = a$ pour tout n converge vers a et b. On peut remédier à ces difficultés avec la notion de topologie *séparée*, qu'on verra dans un instant. On a cependant :

Lemme 1.37. Soit A une partie d'un espace topologique X et (x_n) une suite de A convergeant dans X vers $x \in X$. Alors $x \in \bar{A}$.

`Preuve:` Soit V un voisinage de x. Soit n_0 tel que $x_n \in V$ pour tout entier $n \geq n_0$. Puisque $x_{n_0} \in A$, on a $A \cap V \neq 0$ d'où $x \in \bar{A}$. □

Comme dit plus haut, la "réciproque", à savoir la caractérisation séquentielle de $\bar{A}$ comme étant l'ensemble des limites de suites de A, est valide dans un espace métrique, mais pas dans un espace topologique en toute généralité.

1.6 Espaces séparés

Définition 1.38. Un espace topologique X est **séparé** si pour tout $x \neq y$ dans X, il existe deux ouverts U_x, U_y tels que

$$x \in U_x,\ y \in U_y,\ U_x \cap U_y = \emptyset.$$

Autrement dit on peut séparer les points par des ouverts. Un espace métrique est séparé car on peut séparer x de y par deux boules ouvertes disjointes (de rayon la moitié de $d(x, y)$). La plupart des espaces avec lesquels on travaillera sont séparés mais pas tous.

Théorème 1.39. Dans un espace topologique séparé, une suite de points converge vers au plus un point.

`Preuve:` Supposons que (x_n) converge vers x ; soit $y \neq x$. On prend des voisinages U_x de x et U_y de y, disjoints. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geq n_0$. Alors pour tout $n \geq n_0$, $x_n \notin V$. Ce voisinage V empêche la suite de converger vers y. □

Théorème 1.40. Le produit cartésien $X \times Y$ est séparé si et seulement si X et Y sont séparés. Une partie d'un espace séparé est séparée.

`Preuve:` Montrons d'abord $\Rightarrow$. Supposons que $X \times Y$ soit séparé et montrons que X est séparé, l'argument sera le même pour Y. Soit $x \neq x'$ dans X. Prenons $y \in Y$ quelconque. Alors $(x, y) \neq (x', y)$ donc il existe des ouverts U, V de $X \times Y$ contenant (x, y) et (x', y) respectivement tels que $U \cap V = \emptyset$. La topologie produit ayant pour base de topologie les cubes, il existe un voisinage ouvert $U_X \times U_Y$ de (x, y) contenu dans U, et un voisinage ouvert $V_X \times V_Y$ de (x', y) contenu dans V. Quitte à remplacer U_Y et V_Y par $U_Y \cap V_Y$, on peut supposer que $U_Y = V_Y$. Alors de $U \cap V = \emptyset$ on déduit que $U_X \cap V_X = \emptyset$, séparant x et x'. Réciproquement si X et Y sont séparés, soit $(x, y) \neq (x', y)$ par exemple. Soit $U_x, U_{x'}$ deux ouverts de X séparant x de x'. Alors $U_x \times Y$ et $U_{x'} \times Y$ séparent (x, y) de (x', y). Le cas $(x, y) \neq (x, y')$ est similaire.
Supposons X séparé et soit $A \subset X$. Soit $x \neq y \in A$. Soit U_x, U_y des voisinages de x, y respectivement, tels que $U_x \cap U_y = \emptyset$. Alors $U_x \cap A$ et $U_y \cap A$ séparent x et y dans A. □

Exercice 1.41. (1) Discuter de la convergence de la suite $x_n = 1/n$ dans $\mathbb{R}$, muni de la topologie du complément fini.
(2) Montrer que X est séparé ssi la diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ est fermée dans $X \times X$.

1.7 Continuité

On se rappelle que la continuité d'une fonction f entre deux espaces métriques peut être caractérisée de la façon suivante : l'image réciproque par f de tout ouvert est un ouvert. Dans le cadre des espaces topologiques, ce sera notre définition :

Définition 1.42. Soit X, Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est **continue** si, pour tout ouvert U de Y, $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X.

Remarque 1.43. La définition dépend des topologies de X et Y. Si Y est muni de la topologie grossière, toute application (surjective) est continue. Si c'est X qui est muni de la topologie grossière et si Y a au moins 2 éléments, les seules applications continues sont les constantes.

Cours 3 : jeudi 31/01/13

Exemple 1.44. Les projections $\pi_X : X \times Y$, $(x, y) \mapsto x$ et $\pi_Y : X \times Y$, $(x, y) \mapsto y$, sont continues. Effet pour tout ouvert U de X, $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$ est ouvert dans $X \times Y$. De même si V est un ouvert de Y, $\pi_Y^{-1}(V) = X \times V$ est ouvert dans $X \times Y$.

Remarque 1.45. La topologie produit est la plus grossière (la moins fine) rendant les projections continues. En effet si τ est une topologie sur $X \times Y$ telle que π_X et π_Y sont continues, alors τ contient $\mathcal{S} = \{U \times Y \mid U \text{ ouvert de } X\} \cup \{X \times V \mid V \text{ ouvert de } Y\}$. Or il est facile de voir que $\mathcal{S}$ est une sous-base de la topologie produit.

Pour vérifier la continuité, on peut se contenter de tester la définition sur une *base* de Y, ou mieux sur une *sous-base*. En effet si V est un ouvert de Y, $V = \cup_\alpha B_\alpha$ où les B_α sont dans la base, et on a $f^{-1}(V) = \cup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$. Il suffit donc que chaque $f^{-1}(B_\alpha)$ soit ouvert pour que $f^{-1}(V)$ le soit. Maintenant B_α peut-être écrit comme une intersection finie $S_1 \cap \ldots \cap S_n$ d'éléments de la sous-base. Puisque $f^{-1}(B_\alpha) = f^{-1}(S_1) \cap \ldots \cap f^{-1}(S_n)$, il suffit que l'image réciproque de chaque élément de la sous-base soit ouverte.

Théorème 1.46. Soit X, Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. Sont équivalents :

(1) f est continue.

(2) Pour toute partie $A \subset X$, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(3) Pour tout fermé B de Y, $f^{-1}(B)$ est fermé dans X.

(4) Pour tout $x \in X$, pour tout voisinage V de $f(x)$ il existe un voisinage U de x tel que $f(U) \subset V$.

Définition 1.47. Si la condition (4) vaut en un point $x \in X$, on dit que f est **continue au point x**. Puisque $f(U) \subset V \Leftrightarrow U \subset f^{-1}(V)$, cela équivaut à : l'image réciproque tout voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x.

`Preuve:` Montrons (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) et (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1).
(1) $\Rightarrow$ (2) Supposons f continue et soit $A \subset Y$. Soit $x \in \bar{A}$, montrons que $f(x) \in \overline{f(A)}$. Soit V un voisinage ouvert de $f(x)$, alors $f^{-1}(V)$ est un voisinage ouvert de x, donc intersecte A en un point y. Il s'ensuit que $f(y) \in V \cap f(A)$. Tout voisinage ouvert de $f(x)$ intersecte $f(A)$ donc $f(x)$ est adhérent à $f(A)$.
(2) $\Rightarrow$ (3) Soit B un fermé de Y. Posons $A = f^{-1}(B)$ et montrons que $A = \bar{A}$. On a $f(A) \subset B$ donc $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \bar{B} = B$ donc $\bar{A} \subset f^{-1}(B) = A$.
(3) $\Rightarrow$ (1) Soit V un ouvert de Y, alors $Y - V = B$ est un fermé. On a

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B) = X - f^{-1}(B)$$

est ouvert car $f^{-1}(B)$ est fermé par hypothèse.
(1) $\Rightarrow$ (4) Soit $x \in X$; soit V un voisinage de $f(x)$. Soit O un ouvert de Y tel que $f(x) \in O \subset V$. Puisque f est continue, $f^{-1}(O)$ est ouvert dans X. De plus $x \in f^{-1}(O) \subset f^{-1}(V)$. Alors $U = f^{-1}(O)$ est un voisinage de x satisfaisant (4)
(4) $\Rightarrow$ (1) Soit V un ouvert de Y ; soit $x \in f^{-1}(V)$. Puisque $f(x) \in V$, V est un voisinage de $f(x)$. Par hypothèse $f^{-1}(V)$ est alors un voisinage de x. Puisque x est quelconque dans $f^{-1}(V)$, $f^{-1}(V)$ est ouvert. $\square$

Lemme 1.48. Soit X, Y deux espaces topologiques, $x \in X$ un point et $f : X \to Y$ une application continue en x. Si une suite (x_n) converge vers x alors la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$.

`Preuve:` Soit V un voisinage de $f(x)$, alors $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x. Puisque (x_n) converge vers x il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in f^{-1}(V)$ pour tout entier $n \geq n_0$. D'où $f(x_n) \in V$ pour tout entier $n \geq n_0$ et $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. $\square$
Remarquons qu'on n'a pas écrit la "réciproque", à savoir la caractérisation séquentielle de la continuité, car elle n'est pas vraie en toute généralité. Vérifier la définition n'est pas forcément très pratique. On pourra avoir recours aux règles suivantes.

Théorème 1.49 (Règles de construction d'applications continues)**.** Soit X, Y et Z des espaces topologiques.

1. (fonction constante) Si $f : X \to Y$ envoie tout X sur un point $y \in Y$, alors f est continue.
2. (inclusion) Si $A \subset X$, la fonction inclusion $j : A \to X$ est continue.
3. (composition) Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont continues, alors $g \circ f : X \to Z$ est continue.
4. (restriction du domaine) Si $A \subset X$ et si $f : X \to Y$ est continue, alors la restriction $f_{|A} : A \to Y$ est continue

(5) (restriction ou agrandissement au but) Soit $f : X \to Y$ est continue. Si $Z \subset Y$ contient l'image $f(X)$, alors la fonction $g : X \to Z$ restriction de f au but est continue. Si $Z \supset Y$, alors la fonction $g : X \to Z$ obtenue en agrandissant l'espace but de f, est continue.

(6) (formulation locale) L'application $f : X \to Y$ est continue si X admet un recouvrement par des ouverts U_α tels que chaque restriction $f_{|U_\alpha}$ soit continue.

(7) (Recollement de fermés) Si $X = A \cup B$ où A et B sont fermés dans X, $f : A \to Y$ continue et $g : B \to Y$ continues telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A \cap B$ alors la fonction combinée $h : X \to Y$ définie par $h(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $h(x) = g(x)$ si $x \in B$ est continue.

`Preuve:` (1)-(5) sont évidents.
(6) Voir que pour un ouvert $V \subset Y$, $f^{-1}_{|U_\alpha}(V) = f^{-1}(V) \cap U_\alpha$ est ouvert dans X car ouvert dans U_α par hypothèse et U_α est ouvert dans X. Ensuite, puisque $X = \bigcup U_\alpha$

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap \bigcup U_\alpha = \bigcup (f^{-1}(V) \cap U_\alpha)$$

est une union d'ouverts de X donc ouverte.
(7) Soit U un fermé de Y, $f^{-1}(U) = (f^{-1}(U) \cap A) \cup (f^{-1}(U) \cap B) = h^{-1}(U) \cup g^{-1}(B)$ est une union finie de fermés donc fermée. □

Exercice 1.50. (1) $f : X \to Y \times Z$, $f = (f_1, f_2)$ est continue si et seulement si f_1 et f_2 sont continues.
(2) (7) se généralise à un nombre fini de fermés, mais pas à une infinité. Trouver un contre-exemple.

Définition 1.51. Soit X, Y un espace topologique. On dit qu'une application $f : X \to Y$ est **ouverte** si l'image par f de tout ouvert est un ouvert, qu'elle est **fermée** si l'image par f de tout fermé est fermé. On dit que f est un **homéomorphisme** si f est bijective, continue et ouverte.

Remarque 1.52. Si f est bijective, f est ouverte $\Leftrightarrow$ f est fermée $\Leftrightarrow$ f^{-1} est continue. Une bijection f est homéomorphisme si f et f^{-1} sont continues. Un homéomorphisme réalise une bijection entre la collection des ouverts (resp. fermés) de X et la collection des ouverts (resp. fermés) de Y.

Lorsque $f : X \to Y$ est injective et continue, la fonction $f' : X \to Z = f(X)$ obtenue en restreignant le but, est bijective continue. Si elle est de plus ouverte, c'est un homéomorphisme. On dit alors que $f : X \to Y$ est un **plongement** (homéomorphisme sur son image).

Exercice 1.53. Les projections $\pi_X : X \times Y \to X$ et $\pi_Y : X \times Y \to Y$ sont ouvertes. Pour tout $y \in Y$, $x \mapsto (x, y)$ est un plongement de X dans $X \times Y$,

1.8 Quelques constructions d'espaces topologiques

1.8.1 Union disjointe

Définition 1.54. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. On appelle **union disjointe** l'ensemble

$$\coprod_i X_i = \{(i,x) \mid x \in X_i\}$$

On prend la réunion de copies disjointes de chaque X_i. Attention $[0,2]\coprod[1,3] \neq [0,3]$. En effet, il se peut que $x \in X_1 \cap X_2$ mais $(1,x) \neq (2,x)$ dans $X_1 \coprod X_2$. Si on note $\phi_i : X_i \to \coprod_i X_i$ l'inclusion canonique, définie par $\phi_i(x) = (i,x)$, on a $\phi_1(x) \neq \phi_2(x)$.

Définition 1.55. La **topologie de l'union disjointe** a pour ouverts

$$\mathcal{T}_u = \left\{\coprod_i U_i \mid U_i \text{ ouvert de } X_i\right\}$$

(vérifier que c'est une topologie). On peut voir que $U \subset \coprod_i X_i$ est ouvert si et seulement si ${\phi_i}^{-1}(U)$ est ouvert dans X_i pour tout $i \in I$. C'est la topologie la plus fine pour laquelle les ϕ_i sont continues. En effet si $U \in \mathcal{T}$ une topologie et que les ϕ_i sont continues, alors ${\phi_i}^{-1}(U)$ est ouvert dans X_i et $U = \coprod_i {\phi_i}^{-1}(U) \in \mathcal{T}_u$, d'où $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_u$.

Exercice 1.56. Les ϕ_i sont des plongements.

1.8.2 Topologie quotient

Soit X un ensemble et $\mathcal{R}$ une *relation d'équivalence* sur X. On rappelle que c'est une relation binaire ($\mathcal{R} \subset X \times X$) qui vérifie 3 axiomes : (1) $x\mathcal{R}x$ (réflexivité) (2) $x\mathcal{R}x \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$ (symétrie) (3) $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ (transitivité). Les classes d'équivalence associées, i.e. pour chaque $x \in X$,

$$\mathcal{R}(x) = \{y \in X \mid x\mathcal{R}y\}$$

forment une partition de X, c'est à dire une collection $(C_i)_{i\in I}$ de parties de X telle que $\cup_i C_i = X$ et $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Inversement une partition $\mathcal{C} = (C_i)_{i\in I}$ de X, définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{C}, x, y \in C$, dont les classes d'équivalence sont les éléments de $\mathcal{C}$. On note $X/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence et $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la projection canonique associée. On pourra noter $[x]$ la classe de x, et $x \sim y$ la relation $x\mathcal{R}y$. Si X est un espace topologique, on veut munir $X/\mathcal{R}$ d'une topologie rendant π continue.

Définition 1.57. Soit X un ensemble, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X et $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la projection canonique associée. On appelle **topologie quotient** sur $X/\mathcal{R}$

$$\mathcal{T}_{\mathcal{R}} = \{U \subset X/\mathcal{R} \mid \pi^{-1}(U) \text{ ouvert de } X\}$$

Autrement dit U est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert. On vérifie aisément que c'est une topologie, la plus fine rendant π continue.

Si X, Y sont deux ensembles, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X, on dit que $f : X \to Y$ est compatible avec $\mathcal{R}$ si f est constante dans chaque classe d'equivalence. Elle "passe alors au quotient" en $\bar{f} : X/\mathcal{R} \to Y$, vérifiant $f = \bar{f} \circ \pi$.

Théorème 1.58. Soit X, Y sont deux espaces topologiques, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X, et $f : X \to Y$ compatible avec $\mathcal{R}$.
(1) Alors f est continue $\Leftrightarrow$ $\bar{f}$ est continue.
(2) Si f est ouverte, alors $\bar{f}$ est ouverte ; si f est fermée alors $\bar{f}$ est fermée.

`Preuve:` (1) Si $\bar{f}$ est continue alors $f = \bar{f} \circ \pi$ est composée d'applications continues donc continue. Supposons f continue et soit $U \subset Y$ un ouvert, alors $f^{-1}(U)$ est ouvert. Or

$$f^{-1}(U) = (\bar{f} \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(U))$$

est ouvert si et seulement si $\bar{f}^{-1}(U)$ est ouvert.
(2) Soit U un ouvert de $X/\mathcal{R}$ alors $\pi^{-1}(U)$ est ouvert de X et $\bar{f}(U) = f(\pi^{-1}(U))$ est ouvert si f est ouverte. □

Corollaire 1.59. Sous les mêmes hypothèses, si f est continue, ouverte et $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ alors $\bar{f}$ est un plongement de $X/\mathcal{R}$ sur Y.

Exemple 1.60. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$, et $f : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (\cos(2\pi x, \sin(2\pi x))$. Il est clair que f est continue, surjective et $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Il s'ensuit que $\bar{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ est continue, bijective. De plus f est : soit $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert, $x \in U$, $0 < \varepsilon < 1/2$ assez petit pour que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$. Alors $f(]x-\varepsilon, x+\varepsilon[)$ est l'intersection de S^1 un secteur angulaire ouvert d'angle $4\pi\varepsilon$ centré sur l'angle $2\pi x$, et est donc ouvert dans S^1. Il s'ensuit que $\bar{f}$ est un homéomorphisme.

Exemple 1.61. Soit $g : [0,1] \to S^1$ la restriction à $[0,1]$ de l'application f de l'exemple précédent. On a $g(0) = g(1)$. L'application g est donc compatible avec la relation $\mathcal{R}$ sur $[0,1]$ définie par $0 \sim 1$ (on identifie 0 et 1). Il s'ensuit que $[0,1]/\mathcal{R}$ est homéomorphe à S^1.

EXERCICE 1.62. Sur $[0,1] \times [0,1]$ on considère la relation $(s,0) \sim (s,1)$ et $(0,t) \sim (1,t)$. Montrer que $f : [0,1] \times [0,1] \to S^1 \times S^1$, $(s,t) \mapsto (\cos(2\pi s, \sin(2\pi s)), \cos(2\pi t, \sin(2\pi t))$ induit un homéomophisme de $([0,1] \times [0,1]/\mathcal{R}$ sur le tore $S^1 \times S^1$.

Cours 4 : jeudi 7/02/13

Remarque 1.63. L'espace quotient $X/\mathcal{R}$ d'un espace topologique séparé X n'est pas nécessairement séparé. Considérons par exemple $X = \mathbb{R}$ muni de la relation d'équivalence : $x \sim y$ ssi $x - y \in \mathbb{Q}$. Alors $[0] = \mathbb{Q}$ et $[x] = x + \mathbb{Q}$ ne peuvent pas être séparés par des ouverts, même si $x \notin \mathbb{Q}$. En effet soit U un voisinage ouvert de $[0]$ et V un voisinage ouvert de $[x]$. Alors $\pi^{-1}(U)$ est un voisinage ouvert de 0, il intersecte $x + \mathbb{Q} = \pi^{-1}[x]$ et en particulier $\pi^{-1}(V)$, d'où U intersecte V.

Définition 1.64. Soit $A \subset X$ une partie de X. On dit que le **saturé** de A par $\mathcal{R}$ est la réunion de toutes les classes d'équivalence qui rencontrent A, soit l'ensemble $\pi^{-1}(\pi(A))$. On dit que A **est saturé** s'il est égal à son saturé par $\mathcal{R}$.

Proposition 1.65. L'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ est séparé si et seulement si pour tout $x, y \in X$ n'appartenant pas à la même classe d'équivalence, il existe deux ouverts U, V saturés disjoints contenant x, y respectivement.

`Preuve:` Supposons que $X/\mathcal{R}$ soit séparé, soit $x, y \in X$ n'appartenant pas à la même classe d'équivalence, i.e. $\pi(x) \neq \pi(y)$. Alors on peut prendre pour U, V l'image réciproque de deux ouverts de X/R disjoints contenant $\pi(x), \pi(y)$ respectivement.
Réciproquement supposons la condition vérifiée. Soit $x' \neq y' \in X/\mathcal{R}$, alors $x' = \pi(x)$ et $y' = \pi(y)$ où $x, y \in X$ ne sont pas équivalents. Soit U, V des ouverts saturés disjoints contenant x, y respectivement. Alors $\pi(U) \ni x'$ est ouvert car $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$. De même $\pi(V) \ni y'$ est ouvert. Enfin $\pi(U)$ et $\pi(V)$ sont disjoints car aucun élément de U n'est équivalent à un élément de V. $\square$

La topologie quotient permet de nombreuses constructions d'espaces topologiques :

1.8.3 Cône sur un espace topologique

Définition 1.66. Soit X un espace topologique. Le **cône sur X** est l'espace topologique quotient

$$CX = (X \times [0,1])/\mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence sur $X \times [0,1]$ engendrée par $(x,1) \sim (x',1)$ pour tout $x, x' \in X$.

On laisse en exercice de vérifier que $x \mapsto [(x,0)]$ est un homéomorphisme sur son image, permettant d'identifier X avec une partie de CX, et que si $f : X \to Y$ est une application continue, alors l'application $Cf : CX \to CY$ définie par $[(x,t)] \mapsto [(f(x),t)]$ est continue. L'image de $X \times \{1\}$ dans CX est réduite à un point, qu'on appelle **sommet du cône**.

1.8.4 Suspension d'un espace topologique

Définition 1.67. Soit X un espace topologique. La **suspension de X** est l'espace topologique quotient

$$SX = (X \times [-1,1])/\mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence sur $X \times [-1,1]$ engendrée par $(x,1) \sim (x',1)$ et $(x,-1) \sim (x',-1)$ pour tous $x, x' \in X$.

On laisse en exercice de vérifier que $x \mapsto [(x,0)]$ est un homéomorphisme sur son image, permettant d'identifier X avec une partie de SX, et que si $f : X \to Y$ est une application continue, alors l'application $Sf : SX \to SY$ définie par $[(x,t)] \mapsto [(f(x),t)]$ est continue.

1.8.5 Recollement de deux espaces topologiques

Définition 1.68. Soient X, Y deux espaces topologiques, A une partie de X et $f : A \mapsto Y$ une application continue. Le **recollement de X sur Y par f** est l'espace topologique quotient

$$X \cup_f Y = (X \coprod Y)/\mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $x \sim f(x)$ pour tout $x \in A$.

1.8.6 Somme pointée d'espaces topologiques

Définition 1.69. Soit $(X_x, x_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques pointés ($x_i \in X_i$). La **somme pointée** de cette famille est l'espace topologique quotient

$$\bigvee_{i\in I}(X_i, x_i) = \coprod_{i\in I} X_i/\mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $x_i \sim x_j$ pour tous $i, j \in I$.

Il est clair que l'inclusion $X_i \to \coprod_{i\in I} X_i$ induit un plongement de X_i dans $\bigvee_{i\in}(X_i, x_i)$.

1.9 Connexité, connexité par arc

Les notions de connexité et connexité par arc formalisent l'idée simple d'un espace fait d'un seul morceau. Commençons par la connexité, notion plus générale.

Définition 1.70. Soit X un espace topologique. On dit que X est **connexe** s'il n'existe pas de partition de X en deux ouverts non vides. On dit qu'une partie $A \subset X$ est connexe si elle est connexe pour la topologie induite..

Proposition 1.71. Soit X un espace topologique. Sont équivalents :

(1) X est connexe.

(2) Il n'existe pas de partition de X en deux fermés non vides.

(3) Les seules parties ouvertes et fermées de X sont $\emptyset$ et X.

(4) Toute application continue de X dans un espace discret est constante.

(5) Toute application continue de X dans $\{0, 1\}$ discret est constante.

`Preuve:` (1) $\Leftrightarrow$ (2) car une partition de X en deux fermés est une partition en deux ouverts.
(1) $\Rightarrow$ (3) Si $A \subset X$ est ouverte et fermée alors $\{A, X - A\}$ forme une partition de X en deux ouverts. Puisque X est connexe, $\{A, X - A\} = \{\emptyset, X\}$.
(3) $\Rightarrow$ (4) Soit $f : X \to Y$ continue où Y est muni de la topologie discrète. En particulier les points de Y sont ouverts et fermés. Soit $y \in f(X)$, alors par continuité de f, $f^{-1}(y)$ est ouvert, fermé dans X. Puisque non vide il est égal à X. D'où $f(X) = y$.
(4) $\Rightarrow$ (5) Evident.
(5) $\Rightarrow$ (1) Montrons la contraposée, non (1) $\Rightarrow$ non (5). Soit $\{U, X - U\}$ une partition de X en deux ouverts non vides. Définissons $f : X \to \{0, 1\}$ par $f(U) = 0$ et $f(X - U) = 1$. Les restrictions

de f à U et à $X-U$ sont continues car constantes (cf 1.49(1)). Puisque U et $X-U$ sont ouverts, 1.49(6) dit que f est continue. On peut aussi conclure avec le lemme de recollement 1.49(7) car $\{U, X-U\}$ est une partition en deux fermés. □

Un ensemble discret est le moins connexe possible. Le connexe de base est l'intervalle :

Théorème 1.72. Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

`Preuve:` Rappelons qu'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si elle vérifie la propriété :

$$\forall\, a < b \in A,\, \forall\, z \in \mathbb{R},\, a < z < b \Rightarrow z \in A.$$

Montrons d'abord qu'une partie connexe est un intervalle. Soit $A \subset \mathbb{R}$ connexe, soit $a, b \in A$ tel que $a < b$ et soit $a < z < b$. Si $z \notin A$ alors

$$A = (A \cap]-\infty, z[) \cup (A \cap]z, +\infty[)$$

est réunion de deux ouverts de A, disjoints, contenant a, b respectivement donc non vides. Contradiction donc $z \in A$ et A est un intervalle.
Montrons qu'un intervalle est connexe. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un intervalle (non vide) et $f : A \to \{0,1\}$ continue. Nous allons montrer que f est constante, ce qui sera conclusif d'après 1.71(5). Supposons qu'il existe $a < b \in A$ tel que $f(a) \neq f(b)$; quitte à remplacer f par $1-f$ supposons que $f(a) = 0$. Soit

$$J = \{t \in [a,b] \mid f(s) = 0,\ \forall\, s \in [a,t]\}.$$

Cet ensemble est non vide car contient a, majoré par b donc admet un borne supérieure $z \in [a,b] \subset A$. Par définition de la borne sup il existe (z_n) dans J convergeant vers z. Par continuité de f (cf lemme 1.48) on a donc $f(z) = \lim f(z_n) = 0$, donc $z < b$. Par continuité de f, $f^{-1}(0)$ est ouvert dans A. Comme $z < b$, on en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f = 0$ sur $[z, z+\varepsilon] \subset [a,b]$, ce qui contredit la définition de z. En conclusion f est constante. □

Définition 1.73. Soit X un espace topologique, $x, y \in X$ deux points. On appelle **arc de x à y** toute application continue $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. On dit que X est **connexe par arc** si pour tout $x, y \in X$ il existe un arc de x à y.

Proposition 1.74. Soit X un espace topologique. Si X connexe par arc alors X est connexe.

`Preuve:` Supposons X connexe par arc et utilisons la caractérisation 1.71(5) de la connexité. Soit $f : X \to \{0,1\}$ continue et soit $x, y \in X$. Puisque X est connexe par arc il existe un arc γ de x à y. L'application composée $f \circ \gamma : [0,1] \to \{0,1\}$ est continue, à valeurs dans $\{0,1\}$, donc constante puisque $[0,1]$ est connexe. D'où $f(x) = f \circ \gamma(0) = f \circ \gamma(1) = f(y)$. □

Il va de soit qu'un intervalle est connexe par arc car convexe. On peut fabriquer des connexes et des connexes par arc grâce aux résultats suivants :

Proposition 1.75. L'image continue d'un connexe (resp. connexe par arc) est connexe (resp. connexe par arc).

`Preuve:` Faisons le cas de la connexité, la connexité par arc étant un exercice. Soit X connexe, $f : X \to Y$ continue telle que $Y = f(X)$. Soit $g : Y \to \{0,1\}$ continue. Alors l'application composée $g \circ f : X \to \{0,1\}$ est continue, à valeurs dans $\{0,1\}$ donc constante par 1.71(5) puisque X est connexe. Il s'ensuit que g est constante d'où Y est connexe par 1.71. □

Corollaire 1.76 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** Soit X un espace topologique connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Si f prend les valeurs y_1 et y_2 alors elle prend toutes les valeurs intermédiaires.

`Preuve:` $f(X)$ est connexe dans $\mathbb{R}$, donc c'est un intervalle, qui contient $[y_1, y_2]$. □

Proposition 1.77. Soit X, Y deux espaces topologiques. Alors $X \times Y$ est connexe (resp. connexe par arc) si et seulement si X et Y sont connexes (resp. connexes par arc).

`Preuve:` Faisons le cas de la connexité, la connexité par arc étant un exercice. Supposons que $X \times Y$ soit connexe. Puisque les projections $\pi_X : X \times Y \to X$, $(x,y) \mapsto x$ et $\pi_Y : X \times Y \to Y$, $(x,y) \mapsto y$ sont continues par 1.44, on obtient que $X = \pi(X \times Y)$ et $Y_2(X \times Y)$ sont connexes par 1.75. □

Proposition 1.78 (Réunion de connexes)**.** Soit X un espace topologique et soient $(A_i)_{i \in I}$, $A_i \subset X$, des sous-espaces connexes (resp. connexes par arcs) de X. Supposons que $\forall i, j \in I, A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe (resp. connexe par arc).

`Preuve:` Faisons le cas de la connexité, la connexité par arc étant un exercice. On va encore utiliser 1.71 (5). Soit $f : \bigcup_{i \in I} A_i \to \{0,1\}$ continue. Pour chaque $i \in I$, la restriction de f à A_i est continue par 1.49(4), à valeurs dans $\{0,1\}$ donc constante puisque A_i est connexe. Fixons un indice $i_0 \in I$, alors pour tout $i \in I$, puisque $A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset$, $f(A_{i_0}) = f(A_i)$. D'où f est constante et $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe □

Cela s'applique en particulier si $\cap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Dans le cas d'une union dénombrable $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ de parties connexes, il suffit que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ pour tout n pour que l'union soit connexe. En général, l'intersection de deux connexes n'est pas connexe (prenez deux croissants).

> **Proposition 1.79** (Adhérence de connexe)**.** Soit A une partie connexe d'un espace topologique X et B une partie de X telle que $A \subset B \subset \bar{A}$. Alors B est connexe. En particulier $\bar{A}$ est connexe.

`Preuve:` Soit $f : B \to \{0, 1\}$ continue. La restriction de f à A est continue à valeurs dans $\{0, 1\}$ donc constante puisque A est connexe. Soit $x \in B$. Puisque $f(x)$ est un ouvert de $\{0, 1\}$, par continuité $U = f^{-1}(f(x))$ est un voisinage (ouvert) de x. Or $x \in \bar{A}$ donc tout voisinage de x rencontre A. En particulier $U \cap A \neq \emptyset$ d'où $f(x) = f(A)$. Il s'ensuit que f est constante sur B. On conclut par 1.71. □

Exemple 1.80. Donnons (enfin) un exemple de partie connexe non connexe par arc. Notons $A = \{(x, \sin(1/x) \mid 0 < x < 1\} \subset \mathbb{R}^2$. C'est l'image continue par $x \mapsto (x, \sin(1/x))$ de $]0, 1[$, c'est donc une partie connexe. On vérifie que $\bar{A} = A \cup \{0\} \times [-1, 1]$. Il est donc connexe par 1.79. Par contre $\bar{A}$ n'est pas connexe par arc (exercice).

La connexité est une propriété invariante par homéomorphisme. Cela fournit un moyen très simple de savoir que deux espaces topologiques ne sont pas homéomorphes : lorsque l'un est connexe et l'autre pas. Ainsi S^1 est connexe, comme image continue de $[0, 1]$ par $t \mapsto e^{2i\pi t}$ mais n'est pas homéomorphe à $[0, 1]$ (ni à aucun intervalle) : S^1 privé d'un point reste connexe alors qu'un intervalle privé d'un point non (si on prend le point à l'intérieur). De même $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$ car $\mathbb{R}^2$ privé d'un point est connexe (par arc) alors que $\mathbb{R}$ privé d'un point ne l'est pas. Plus généralement $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ ne sont homéomorphes que si $p = q$ mais la démonstration demande des outils plus sophistiqués.

Exercice 1.81. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est dénombrable, $n \geq 2$, alors $\mathbb{R}^n - A$ est connexe (par arc).

On déduit sans peine de la proposition 1.78 que la relation sur X, $x\mathcal{R}y$ si x, y sont dans une même partie connexe de X, définit une relation d'équivalence sur X.

Définition 1.82. Soit X un espace topologique et $x \in X$. On appelle **composante connexe de** x la classe d'équivalence de x pour la relation "être dans une même partie connexe".

Proposition 1.83. Soit X un espace topologique et $x \in X$.

(1) La composante connexe C_x de x est

$$C_x = \bigcup_{C \text{ connexe de } X, x \in C} C$$

(2) C_x est connexe, fermée et la plus grande partie connexe contenant x.

`Preuve:` Notons U la réunion des connexes de X contenant x.
(1) Si $y \in C_x$, il existe un connexe C dans X tel que $x, y \in C$. En particulier, $y \in C \subset U$, d'où $C_x \subset U$. Réciproquement, si $y \in U$, il existe C un connexe de X contenant y et x, d'où y est équivalent à x et $U \subset C_x$. Donc $C_x = U$.
(2) C_x est connexe d'après 1.78, comme union de connexes d'intersection non vide. D'après 1.79 $\bar{C}_x$ est connexe. Comme $x \in \bar{C}_x$, $\bar{C}_x \subset C_x$ d'où l'égalité $\bar{C}_x = C_x$ et le fait que C_x est fermé. Enfin, si $C \subset X$ est connexe et contient x, $C \subset U = C_x$. □

Une composante connexe C_x avale tous les connexes qu'elle touche : si C_x intersecte un connexe C, alors $C_x \supset C$. L'espace X est connexe si et seulement si $C_x = X$. Pour détecter une composante connexe, on peut utiliser le lemme suivant :

Lemme 1.84. Soit $A \subset X$ une partie non vide, ouverte, fermée et connexe. Alors A est une composante connexe de X.

`Preuve:` Soit $x \in A$, alors $A \subset C_x$ car A est connexe. Réciproquement, $C_x \cap A$ est non vide, ouvert et fermé dans C_x connexe : il est donc égal à C_x. On a donc $C_x \subset A$. □

Exemple 1.85. (1) $X = [0,1[\cup[2,3[$ a deux composantes connexes : $[0,1[$ et $[2,3[$ qui sont ouvertes et fermées (dans X) et connexes.

(2) Une composante connexe n'est pas nécessairement ouverte : les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont les singletons, qui ne sont pas ouverts.

Proposition 1.86. Soit X, Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue.

(1) Pour tout $x \in X$, $f(C_x) \subset C_{f(x)}$.

(2) Si f est un homémorphisme, f induit une bijection entre les composantes connexes (resp. cpa) de X et les composantes connexes (resp. cpa) de Y. De plus pour tout $x \in X$ la restriction $f_{|C_x} : C_x \to C_{f(x)}$ est un homéomorphisme.

`Preuve:` (1) Evident car $f(C_x)$ est connexe et contient $f(x)$.

(2) On a $f(C_x) \subset C_{f(x)}$ et, en faisant de même avec f^{-1}, $C_x \subset f^{-1}(C_{f(x)}) \subset C_x$ d'où l'égalité. $\square$

Ainsi un bouquet de m droites n'est homéomorphe à un bouquet de n droites que si $n = m$ (enlever le centre).

On définit de même une relation d'équivalence associée à la notion de connexité par arc : deux points x, y sont équivalents s'ils sont contenus dans une partie connexe par arc de X.

Définition 1.87. Soit X un espace topologique et $x \in X$. On appelle **composante connexe par arc de x** la classe d'équivalence de x pour la relation "être dans une même partie connexe par arc".

On montre aisément que la composante connexe par arc de x est la plus grande partie connexe par arc de X contenant x. Cependant une composante connexe par arc n'est pas fermée en général. Voir par exemple la partie A de 1.80.

1.10 Compacité

Si X est un ensemble, on dit une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X est un *recouvrement* de X (ou recouvre X) si $\cup_{i\in I} A_i = X$. Un sous-recouvrement est une sous-famille $(A_i)_{i\in J}$(avec $J \subset I$) qui recouvre encore X. Si X est un espace topologique, un recouvrement $(A_i)_{i\in I}$ est dit ouvert ou fermé si les A_i le sont.

Définition 1.88. On dit qu'un espace topologique X est **compact** si les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) X est séparé.

(2) Tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini.

On réfère souvent à (2) en disant simplement : "de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement fini". Cette notion est parfois appelée *propriété de Borel-Lebesgue*. Certains auteurs, notamment anglo-saxons, appellent compacts les espaces qui vérifient (2). Pour nous les espaces compacts seront séparés. Par passage au complémentaire, (2) équivaut à : si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés telle que $\cap_{i\in I} F_i = \emptyset$, alors il existe $J \subset I$ fini tel que $\cap_{i\in J} F_i = \emptyset$. Si la famille $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ($F_{n+1} \subset F_n$) alors (2) implique qu'il existe n tel que $F_n = \emptyset$. Par contraposée (2) implique donc : pour toute suite décroissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés non vides, $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est non vide.

Une partie $A \subset X$ sera compacte si A muni de la topologie induite est compacte. L'assertion (2) se traduit par : pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X tel que $A \subset \cup_{i\in I} U_i$, il existe $J \subset I$

fini tel que $A \subset \cup_{i\in J} U_i$. Par abus de langage on pourra appeler $\cup_{i\in I} U_i$ un recouvrement ouvert de A (c'est les $U_i \cap A$ qui forment le recouvrement d'ouverts *de* A).

Proposition 1.89 (Séparation). (1) Soit X un espace compact et $F \subset X$ un fermé, alors F est compact.

(2) Soit K une partie compacte dans X un espace séparé. Alors pour tout $x \in X - K$, il existe des ouverts U_x, U_K de X contenant x, K respectivement tel que $U_x \cap U_K = \emptyset$. En particulier K est fermé dans X.

(3) Soit X un espace séparé et K_1, K_2 deux parties compactes de X tel que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Alors il existe deux ouverts U_1, U_2 de X, contenant K_1, K_2 respectivement, tel que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

`Preuve:` (1) Il est clair que F est séparé, comme partie d'un espace séparé. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X tel que $F \subset \cup_{i\in I} U_i$. En ajoutant $X - F$ à la famille (U_i) on obtient un recouvrement ouvert de X, dont on extrait un sous-recouvrement fini, de la forme $(U_i)_{i\in J}$, $J \subset I$ fini, plus éventuellement $X - F$. Alors $(U_i)_{i\in J}$ est un sous-recouvrement fini de F.
(2) Soit $x \in X - K$. Puisque X est séparé, pour chaque $a \in K$ il existe un ouvert U_a de X contenant x et un ouvert U_{xa} de X contenant x tel que $U_a \cap U_{xa} = \emptyset$. La famille $(U_a)_{a\in K}$ est un recouvrement ouvert de K. Par compacité de K, il existe $a_1, \dots, a_n \in K$ tel que $(U_{a_i})_{i=1,..,n}$ recouvre encore K. Posons $U_x = \cap_{i=1,..,n} U_{y_{a_i}}$, c'est un ouvert de X car l'intersection est finie, contenant x. De plus $U_x \cap U_{a_i} = \emptyset$ pour chaque $i = 1, ..n$. On prend alors $U_K = \cup_{i=1,..,n} U_{a_i}$, c'est un ouvert de X contenant K et $U_x \cap U_K = \emptyset$. En particulier, $U_x \subset X - K$ et $X - K = \cup_{x\in X-K} U_x$ est un ouvert de X, d'où K est fermé dans X.
(3) Pour chaque $x \in K_1$, il existe d'après (2) un ouvert $U_x \subset X$ contenant x et un ouvert $U_{K_2 x} \subset X$ contenant K_2 tel que $U_x \cap U_{K_2 x} = \emptyset$. Du recouvrement ouvert $(U_x)_{x\in K_1}$ de K_1 on prend un sous-recouvrement fini $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$. On pose $U_1 = \cup_{i=1,..,n} U_{x_i}$ et $U_2 = \cap_{i=1,..,n} U_{K_2 x_i}$. Alors U_1 et U_2 sont ouverts, $K_1 \subset U_1$, $K_2 \subset U_2$ et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. □

Proposition 1.90. Soit X un espace compact, Y un espace séparé et $f : X \to Y$ continue. Alors $f(X)$ est compact.

`Preuve:` $f(X)$ est séparé comme partie d'un espace séparé. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de Y telle que $f(X) \subset \cup_{i\in I} U_i$. Puisque f est continue, chaque $f^{-1}(U_i)$ est ouvert et $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X. On extrait un sous-recouvrement fini $(f^{-1}(U_i))_{i\in J}$, $J \subset X$. Alors $(U_i)_{i\in J}$ recouvre encore $f(X)$. □

Corollaire 1.91. Soit X un espace compact, Y un espace séparé et $f : X \to Y$ continue, bijective. Alors f est un homéomorphisme.

`Preuve:` D'après 1.52, il suffit de montrer que f est fermée. Or soit F un fermé de X, alors F

est compact par 1.89(1), donc $f(F)$ est compact par 1.90, puis fermé par 1.89(2). □

Proposition 1.92. Soit X et Y deux espaces topologiques. Alors

$$X \times Y \text{ est compact } \iff X \text{ et } Y \text{ sont compacts}$$

`Preuve:` $X \times Y$ est séparé $\iff$ X et Y sont séparés par 1.40. Etudions maintenant la compacité. Si $X \times Y$ est compact, alors X et Y sont compacts d'après 1.90 comme image continue par les projections sur le premier et le second facteur. Réciproquement, supposons X et Y compacts. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $X \times Y$. Pour chaque $y \in Y$, l'application $\phi_X : x \mapsto (x, y)$ est continue de X dans $X \times Y$ (c'est même un plongement). Alors $(\phi_X^{-1}(U_i))_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X, dont on extrait un sous-recouvrement fini $(\phi_X^{-1}(U_i))_{i\in J_y}$, $J_y \subset I$ fini. D'autre part $\pi_Y : X \times Y$ étant ouverte, $V_y := \cap_{i\in J_y} U_i$ est ouvert de Y contenant y. Par compacité de Y, on peut extraire un recouvrement fini $V_{y_1}, \dots, V_{y_k}$. Posons $J = J_{y_1} \cup \ldots \cup J_{y_k}$. Alors $(U_i)_{i\in J}$ est un sous-recouvrement fini de $X \times Y$. □

1.10.1 Compacts dans les espaces métriques

Dans les espaces métriques, on peut caractériser beaucoup de propriétés topologiques à l'aide de suites. Si $x : \mathbb{N} \to X$ est une suite, on appelle *suite extraite* ou *sous-suite* de x, $x \circ \phi$ où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante. Se donner ϕ revient à se donner une partie $J \subset \mathbb{N}$ infinie, que l'on parcourt dans l'ordre strictement croissant ($J = \phi(\mathbb{N})$). On note souvent $(x_{\phi(n)})$ la sous-suite.

Théorème 1.93. Soit (E, d) un espace métrique. Sont équivalents :

(1) E est compact.

(2) Tout ensemble infini dans E a un point d'accumulation.

(3) Toute suite de E admet une sous-suite convergente.

`Preuve:` (1) $\Rightarrow$ (2) Supposons E compact, nous allons montrer qu'une partie $A \subset E$ sans point d'accumulation est finie. Soit $A \subset E$ sans point d'accumulation. D'après 1.31(1) $A = \bar{A}$ est alors fermé. Pour chaque $a \in A$, il existe un voisinage U_a de a dont l'intersection avec A est réduite à a. L'espace E est recouvert par l'ouvert $E - A$ et les ouverts U_a ; par compacité de E il existe un sous-recouvrement fini. Comme $X - A$ est disjoint de A et que chaque U_a ne contient qu'un point de A, A est fini.
(2) $\Rightarrow$ (3) Soit (x_n) une suite de E. Posons $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Si A est fini, il existe un entier n_0 tel que $J = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = x_{n_0}\}$ est infini. La sous-suite correspondante converge trivialement car constante. Supposons A infini et soit $a \in A'$ un point d'accumulation existant par hypothèse. Par définition de A', pour tout $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) - \{a\}$ intersecte A. De plus l'intersection est infinie car sinon on pourrait trouver $\varepsilon' > 0$ assez petit tel que $B(a, \varepsilon') - \{a\}$ soit disjoint de A (en

prenant pour ε' la distance de a au point de $A \cap (B(a, \varepsilon) - \{a\})$ le plus proche). On définit une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ de (x_n) telle que $x_{\phi(n)} \in B(a, \frac{1}{n})$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) comme suit. Il est clair que $(x_{\phi(n)})$ convergera vers a puisque pour tout voisinage V de a, $B(a, \frac{1}{n}) \subset V$ pour n assez grand. On choisit $\phi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $x_{\phi(0)} \in B(a, 1)$. Supposons que $\phi(0) < \phi(1) < \ldots < \phi(n)$ sont définis, on choisit alors $\phi(n+1)$ comme un entier $k > \phi(n)$ tel que $x_k \in B(a, \frac{1}{n+1}$.
(3) $\Rightarrow$ (1) C'est plus difficile. Nous commençons par montrer que tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de E admet un *nombre de Lebesgue*, c'est-à-dire $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \exists i \in I, B(x, \varepsilon) \subset U_i.$$

Lemme 1.94. Soit (E, d) un espace métrique telle que toute suite admette une sous suite convergente. Alors tout recouvrement ouvert de E admet un nombre de Lebesgue.

`Preuve:` Par contradiction. Soit (U_i) un recouvrement ouvert de E. S'il n'a pas de nombre de Lebesgue, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in E$ tel que $B(x, \frac{1}{n}) \not\subset U_i, \forall i$. Par hypothèse il existe $x \in E$ et une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ convergeant vers x. Il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U_{i_0}$. Alors pour n assez grand $B(x_{\phi(n)}, \frac{1}{\phi(n)}) \subset B(x, \varepsilon) \subset U_{i_0}$, ce qui est contraire à la définition de (x_n). □

On montre maintenant qu'on peut recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon donné, propriété que l'on appelle la *précompacité*.

Lemme 1.95. Soit (E, d) un espace métrique telle que toute suite admette une sous suite convergente. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_1, x_1, \ldots, x_N \in E$ tel que $E = \cup_{i=1,..,N} B(x_i, \varepsilon)$.

`Preuve:` Fixons $\varepsilon > 0$. Prenons $x_1 \in E$. Si $E = B(x_1, \varepsilon)$, c'est fini. Sinon il existe $x_2 \in E - B(x_1, \varepsilon)$. Si $E = B(x_1, \varepsilon) \cap B(x_2, \varepsilon)$ c'est fini. Sinon on prend $x_3 \notin B(x_1, \varepsilon) \cap B(x_2, \varepsilon)$ et on itère. Si la construction ne s'arrête pas, on obtient une suite (x_n) de E telle que $d(x_i, x_j) > 2\varepsilon$ pour tout $i \neq j$. Cette suite ne peut avoir de sous-suite convergente. La construction s'arrête donc sur un entier N. □

On conclut maintenant la preuve du théorème 1.93. Soit (U_i) un recouvrement ouvert de E, soit ε un nombre de Lebesgue donné par 1.94. Soit $x_1, \ldots, x_N \in E$ donné par 1.95 appliqué pour le nombre de Lebesgue ε. Chaque $B(x_k, \varepsilon)$ est contenu dans un certain U_{i_k}, pour $k \in \{1, \ldots, N\}$. Les $B(x_k, \varepsilon)$ recouvrant E, il en est de même des U_{i_k}, qui sont le sous-recouvrement fini attendu.

□

Remarque 1.96. (1) $\Rightarrow$ (2) dans un espace topologique (la preuve au dessus marche). Par contre entre (1) et (3) il n'y a pas de relation vraie en toute généralité. On appelle *séquentiellement compacts* les espaces vérifiant (3).

Lemme 1.97. Soit (E, d) un espace métrique, soit A une partie de E. Si A est compacte, alors A est fermée et bornée.

`Preuve:` Soit $A \subset E$ compacte. Un espace métrique est séparé, donc A est fermé par 1.89(2). Fixons $x \in E$. Si A n'est pas borné, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A \not\subset B(x, n)$. On peut alors construire une suite (x_n) de A telle que $d(x, x_n)$ tende vers $+\infty$ quand $n \to \infty$. Une telle suite n'a pas de sous-suite convergente car une suite convergente est bornée. $\square$

Corollaire 1.98. Soit X est un espace topologique compact et $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée et atteind ses bornes.

`Preuve:` On sait que $f(X)$ est compact par 1.90, il est donc fermé borné dans $\mathbb{R}$ par 1.97. Soit $M = \sup f(X) \in \bar{f}(X) = f(X)$ et $m = \inf f(X)\bar{f}(X) = f(X)$. Il existe donc $a, b \in E$ tel que $f(a) = m$ et $f(b) = M$. $\square$

Théorème 1.99. Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors les compacts de E sont les fermés bornés.

`Preuve:` Les compacts sont fermés bornés par 1.97, il reste à voir que les fermés bornés sont compacts. On utilise le fait que sur un espace vectoriel de dimension finie, les normes sont équivalentes. On peut donc travailler dans $\mathbb{R}^p$ muni de $||x|| = \max\{|x_i|\}$. Commençons par traiter le cas des intervalles $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Soit (x_n) une suite de $[a, b]$. Montrons qu'elle admet une sous-suite convergente. On définit une suite décroissante d'intervalles $[a_n, b_n]$ comme suit. On choisit $[a_1, b_1]$ comme une des deux moitiés de l'intervalle $[a, b]$ tel que $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in [a_1, b_1]\}$ est infini. $[a_2, b_2]$ comme une des deux moitiés de l'intervalle $[a_1, b_1]$ tel que $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in [a_2, b_2]\}$ est infini. On itère. Clairement $b_n - a_n \to 0$ et il existe $x = \lim a_n = \lim b_n$, par le fait qu'une suite croissante majorée converge. On a que pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B(x, \varepsilon)\}$ est infini. De cela on déduit qu'une sous-suite de (x_n) converge vers x (même argument que dans la preuve de 1.93 (2) $\Rightarrow$ (3).)
Montrons maintenant qu'un cube $[a, b]^p$ est compact dans $\mathbb{R}^p$. Soit $x : n \mapsto (x^1(n), \ldots, x^p(n))$ une suite de $[a, b]^p$. Puisque $[a, b]$ est compact, on peut trouver $\phi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x^1 \circ \phi_1$ converge. De même, on peut trouver $\phi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la sous-suite $x^2 \circ \phi_1 \circ \phi_2$ de $x^2 \circ \phi_1$ converge. On définit de même $\phi_3, \ldots, \phi_p$ telle que $x^i \circ \phi_1 \circ \ldots \circ \phi_i$ converge. On pose alors $\phi = \phi_1 \circ \ldots \circ \phi_p$. Alors $x \circ \phi$ converge. Pour conclure il suffit de dire que tout fermé borné de $\mathbb{R}^p$ est inclus dans un cube $[a, b]^p$ assez gros, et donc compact car fermé dans un compact. $\square$

Remarque 1.100. En fait la compacité des fermés bornés, ou de manière équivalente de la boule unité fermée, caractérise parmi les EVN ceux de dimension finie : c'est le théorème de Riesz.

1.11 Caractérisations séquentielles

Pour terminer, quelques caractérisations séquentielles de propriétés topologiques, vraies dans un espace métrique :

Lemme 1.101. Soit A une partie d'un espace métrique (E, d) et $x \in A$. Si $x \in \bar{A}$ il existe une suite de A convergeant vers x.

`Preuve:` Soit $x \in \bar{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ est non vide, on peut donc choisir un élément $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. La suite (x_n) converge alors vers x. □

Lemme 1.102. Soit $f : (E, d) \to Y$ une application continue et $x \in E$. Supposons que pour toute suite (x_n) de E convergeant vers x, $(f(x_n)$ converge vers $f(x)$. Alors f est continue en x.

`Preuve:` Montrons la contraposée : si f n'est pas continue en x, il existe une suite (x_n) de E convergeant vers x telle que $(f(x_n)$ ne converge pas vers $f(x)$. Par hypothèse il existe un voisinage V de $f(x)$ tel que $f^{-1}(V)$ n'est pas un voisinage de x. En particulier pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \not\subset f^{-1}(V)$. En faisant $\varepsilon = \frac{1}{n}$, cela donne un point $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ tel que $f(x_n) \notin V$. La suite (x_n) converge vers x et $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(x)$. □

Remarque 1.103. Le point clé dans les deux arguments ci-dessus est d'avoir une famille décroissantes $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de voisinages du point considéré x, telle que tout voisinage W de x contienne V_n pour tout n assez grand. Cela assure que la suite construite converge bien vers x. Dans un espace métrique on peut prendre $V_n = B(x, \frac{1}{n})$. Dans un espace topologique quelconque, on ne sait pas à priori si V_n, et donc x_n, va rentrer dans un voisinage W donné. Ce sera le cas si X a la propriété que x admet une *base dénombrable de voisinages* : $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ voisinages de x telle que pour tout voisinage W de x, $x \in V_n \subset W$ pour un entier n (on peut alors se ramener à une famille décroissante en considérant $V_1 \cap \ldots \cap V_n$).

Cours 5 : jeudi 14/02/13

2 Variétés

2.1 Variétés topologiques de dimension m.

Définition 2.1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Une **variété topologique de dimension** m est un espace topologique localement homéomorphe à $\mathbb{R}^m$, i.e. tout $x \in M$ admet un voisinage ouvert U_x et $\phi_x : U_x \to V \subset \mathbb{R}^m$ un homéomorphisme, V ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Pour aller plus vite on pourra dire que M est une m-variété. On dira que M est une variété s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que M est une m-variété.

Définition 2.2. Etant donné une variété topologique M de dimension m, le couple (U_x, ϕ_x) (U_x voisinage ouvert de $x \in M$, $\phi_x : U_x \to V$ homéomorphisme) est appelé une **carte** (locale au voisinage de x).

Exemple 2.3. (1) $\mathbb{R}^m$, tout ouvert U de $\mathbb{R}^m$ ($id : U \to U$ est une carte)

(2) Toute sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^m$: les cartes sont les récirpoques des paramétrisations. $\phi_x = \psi^{-1}$ où $\psi : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une immersion et un homéomorphisme de V sur $\psi(V) = M \cap U = U_x$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$.

(3) La partie de $\mathbb{R}^2$, $M =]-1, 1[\times \{0\} \cup \{0\} \times]0, 1[$ n'est pas une 1-variété : un voisinage de 0 ne peut être homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}$ car on trouverait alors un voisinage épointé (à 3 composantes connexes) homéomorphe à un segment épointé.

Si M est connexe, il n'est pas nécessaire de requérir que M soit localement homéomorphe à $\mathbb{R}^m$, m fixé, pour que M soit une m-variété : si chaque point $x \in M$ admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^m$, où $m = m(x) \in \mathbb{N}$, nécessairement $m(x)$ est constant sur M. Cela découle du théorème suivant, dont il n'y a pas de preuve simple (sans introduire de nouveaux outils)

Théorème 2.4 (Théorème d'invariance du domaine de Brouwer)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue et injective, alors $V = f(U)$ est ouvert et f est un homéomorphisme entre U et V. En particulier $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^m$ si et seulement si $n = m$.

(la dernière assertion du théorème vient de ce que l'inclusion $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$ est continue et injective, si $n < m$, mais d'image clairement pas un ouvert). Si 2 cartes (U_x, ϕ_x) et (U_y, ϕ_y) sont telles que $U_x \cap U_y \neq \emptyset$, le théorème implique que $m(x) = m(y)$. Il s'ensuit que m est localement constante donc continue. Comme elle est à valeur dans $\mathbb{N}$ discret, m est constante sur M connexe. On appelle m la *dimension topologique* de la variété. Il s'ensuit également que la dimension topologique d'un espace topologique est un invariant : si deux variétés topologiques M, N sont homéomorphes, elles ont la même dimension.

Définition 2.5. Etant donné 2 cartes (U_x, ϕ_x) et (U_y, ϕ_y) d'une m-variété M, on appelle **changement de cartes** l'application

$$\phi_y \circ \phi_x^{-1} : \phi_x(U_x \cap U_y) \to \phi_y(\phi_x \cap U_y).$$

Les ensembles $\phi_x(U_x \cap U_y)$ et $\phi_y(\phi_x \cap U_y)$ sont deux ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\phi_y \circ \phi_x^{-1}$ est un homéomorphisme entre ces deux ouverts. Pour alléger les écritures on pourra noter $U_{xy} = U_x \cap U_y = U_{yx}$ et $\phi_y^x = \phi_y \circ \phi_x^{-1} = (\phi_x^y)^{-1} : \phi_x(U_{xy}) \to \phi_y(U_{xy})$.

Exemple 2.6. La sous-variété $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (donc une variété) peut-être recouverte par deux cartes. Notons $N = (0, \ldots, 0, 1)$ le pôle nord et $S = (0, \ldots, 0, -1)$ le pole sud, posons

$$U_N = S^n \setminus \{N\}, \quad \text{et } U_S = S^n \setminus \{S\}.$$

On appelle projections stéréographique de pôle Nord i_n (resp. de pôle Sud i_S), l'application de U_N (resp. U_S) dans $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ qui à $x \in U_N$ (resp. $x \in U_S$) associe l'intersection de la droite (Nx) (resp. (Sx)) avec l'hyperplan $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Soit

$$i_N(x) = \frac{(x_1, \ldots, x_n)}{1 - x_{n+1}}, \quad i_S(x) = \frac{(x_1, \ldots, x_n)}{1 + x_{n+1}},$$

Ce sont des homéomorphismes de réciproques

$$i_N^{-1}(y) = \frac{(2y_1, \ldots, 2y_n, |y|^2 - 1)}{\|y\|^2 + 1}, \quad i_S^{-1}(y) = \frac{(2y_1, \ldots, 2y_n, -\|y\|^2 + 1)}{\|y\|^2 + 1}.$$

Le changement des cartes $i_S \circ i_N^{-1}$ est un homéomorphisme de $(\mathbb{R}^n \times \{0\}) \setminus \{0\}$ dans lui-même d'équation

$$y \mapsto \frac{y}{\|y\|^2}$$

On peut également munir un ensemble (sans topologie) d'une structure de variété en se donnant des bijections et des changements de cartes.

Définition 2.7. Soit M un ensemble. On appelle C^0**-atlas** (atlas de classe C^0) de dimension m de M une famille $\mathcal{A} = (U_i, \phi_i)_{i \in I}$ de "cartes" telle que

(1) $U_i \subset M$ et $M = \bigcup_{i \in I} U_i$,

(2) $\phi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^m$ est une bijection, $V_i = \phi_i(U_i)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ ainsi que les $\phi_i(U_{ij})$.

(3) Les changements de cartes $\phi^i_j : \phi_i(U_{ij}) \to \phi_j(U_{ij})$ sont des homéomorphismes.

Proposition 2.8. Soit $\mathcal{A}$ un C^0-atlas de dimension m d'un ensemble M. Soit $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ l'ensemble des $U \subset M$ tel que $\phi_i(U \cap U_i)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^m$ pour tout $(U_i, \phi_i) \in \mathcal{A}$. Alors $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ est une topologie sur M qui en fait une m-variété, les éléments de $\mathcal{A}$ devenant ses cartes au sens de la définition 2.2.

`Preuve:` On vérifie les axiomes d'une topologie. Notons que les U_i sont dans $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ par l'axiome (2) d'un atlas. Puisque $U_i = M \cap U_i$ ($M = \cup_i U_i$ par (axiome (1)), M est un ouvert. Il est clair que $\emptyset$ est ouvert.
Soit $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. Alors, pour $(U_i, \phi_i) \in \mathcal{A}$,

$$\phi_i((\cup_{\alpha \in I} U_\alpha) \cap U_i) = \phi_i(\cup_{\alpha \in I}(U_\alpha \cap U_i) = \cup_{\alpha \in I} \phi_i(U_\alpha \cap U_i)$$

est ouvert dans $\mathbb{R}^m$ comme réunion d'ouverts de $\mathbb{R}^m$ (car $U_\alpha \in \mathcal{T}\mathcal{A}$).
Soit $U_\alpha, U_\beta \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ alors

$$\phi_i((U_\alpha \cap U_\beta \cap U_i) = \phi_i((U_\alpha \cap U_i) \cap (U_\beta \cap U_i) = \phi_i(U_\alpha \cap U_i) \cap \phi_i(U_\beta \cap U_i)$$

est ouvert dans $\mathbb{R}^m$ comme intersection de deux ouverts. Il reste à voir que $\phi_i : U_i \to V_i = \phi_i(U_i)$ est un homéomorphisme. Soit U un ouvert de U_i (alors U ouvert de M), alors $\phi_i(U) = \phi_i(U \cap U_i)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^m$ par définition de $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ donc ϕ_i est ouverte. Soit V un ouvert de V_i (donc de $\mathbb{R}^m$). Alors $\phi_i^{-1}(V)$ est ouvert dans M si $\phi_j(\phi_i^{-1}(V) \cap U_j)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^m$, pour tout $(U_j, \phi_j) \in \mathcal{A}$. Or,

$$\phi_j(\phi_i^{-1}(V) \cap U_j) = \phi^i_j(V \cap \phi_i(U_{ij})$$

est ouvert car le changement de carte ϕ^i_j est un homéomorphisme sur son ensemble de définition □

Exemple 2.9 (Espace projectif réel). Soit

$$P^1(\mathbb{R}) = \{ax + by = 0 \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$$

l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^2$ passant par 0. Il n'y a pas de topologie à priori.
Posons $U_0 = \{$ droites non verticales $\}$, $\phi_0 : U_0 \to \mathbb{R}$, $\{y = -\frac{b}{a}x\} \mapsto -\frac{b}{a}$ la pente (bijection).

Posons $U_1 = \{$ droites non horizontales $\}$, $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{R}$, $\{x = -\frac{a}{b}y\} \mapsto -\frac{a}{b}$ l'autre "pente" (bijection). Alors $\phi_0(U_0) = \mathbb{R} = \phi_1(U_1)$ et $\phi_0(U_0 \cap U_1) = \mathbb{R}^* = \phi_1(U_0 \cap U_1)$ sont ouverts dans $\mathbb{R}$ et $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^*$ dans lui même. Il s'ensuit que $\{(U_0, \phi_0), (U_1, \phi_1)\}$ est un C^0-atlas de $P^1(\mathbb{R})$. On verra plus loin que $P^1(\mathbb{R})$ est homéomorphe à S^1.

Exercice 2.10 (A faire en TD). (1) Montrer que l'ensemble des droites affines $\{ax + by + c = 0\}$ a une structure de 2-variété.

(2) Donner un C^0-atlas de $P^n(\mathbb{R}) = \{$ droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}\}$ en s'inspirant de la construction ci-dessus (c'est une n-variété).

Remarque 2.11. On revient sur l'exemple 2.3(3) : $M =]-1,1[\times\{0\} \cup \{0\}\times]0,1[$. Cet ensemble a une structure de 1-variété : on prend $U_0 =]-1,1[\times\{0\}$ avec $\phi_0(t,0) = t$ et $U_1 = \{0\}\times]0,1[$ avec $\phi_1(0,t) = t$. Alors $\phi_0(U_0) =]-1,1|$ et $\phi_1(U_1) =]0,1[$ sont ouverts dans $\mathbb{R}$. Comme $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, le reste des axiomes pour que $\mathcal{A} = \{(U_0, \phi_0), (U_1, \phi_1)\}$ soit un atlas est trivialement vérifié ! La topologie de 1-variété n'est pas la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$. En fait $(M, \mathcal{T}_{\mathcal{A}})$ est homéomorphe à l'union disjointe de deux segments : $M \approx]-1,1[\coprod]0,1[$ (n'est pas connexe).

Cela amène aux questions suivantes :

- En quoi la topologie de variété dépend de l'atlas ?
- Si M a déjà une topologie, quand coincide t'elle avec une topologie de variété ?

2.2 Atlas compatibles, Atlas maximal

Définition 2.12. Soit $\mathcal{A}$ un C^0-atlas d'une m-variété M et (U, ϕ) telle que U est une partie de M et $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^m$ est une bijection, $\phi(U) = V$ étant un ouvert de $\mathbb{R}^m$. On dit que (U, ϕ) est **compatible** avec $\mathcal{A}$ si leur réunion $\mathcal{A} \cup \{(U, \phi)\}$ est encore un C^0-atlas de M. On dit que deux atlas $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ de M sont compatibles si leur réunion $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est encore un atlas de M.

Dire que (U, ϕ) est compatible avec $\mathcal{A}$ revient à dire que les $\phi(U \cap \phi_i)$ et les $\phi_i(U \cap \phi_i)$ sont ouverts, et que les changements de cartes $\phi \circ \phi_i^{-1}$ et $\phi_i \circ \phi^{-1}$ sont des homéomorphismes sur leur ensembles de définition. Deux atlas sont compatibles si toute carte de l'un est compatible avec les cartes de l'autre.

Lemme 2.13. Etre compatible définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des C^0-atlas de dimension m de M.

`Preuve:` Il y a à vérifier la transitivité. Soit $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ trois atlas avec $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \sim \mathcal{C}$. Soit (U_a, ϕ_a), (U_c, ϕ_c) cartes de $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ respectivement. Montrons que $\phi_a(U_a \cap U_c)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^m$.

On a

$$\phi_a(U_a \cap U_c) = \phi_a(U_a \cap (\cup_b U_b) U_c) = \phi_a(U_a \cup_b (U_b \cap U_c)) = \cup_b \phi_a(U_a \cap U_b \cap U_c)$$

On sait que $\phi_a(U_a \cap U_b)$ et $\phi_b(U_b \cap U_c)$ sont ouverts dans $\mathbb{R}^m$. On écrit

$$\begin{aligned} \phi_a(U_a \cap U_b \cap U_c) &= \phi_a(U_a \cap U_b) \cap \phi_a(U_b \cap U_c) \\ &= \phi_a(U_a \cap U_b) \cap \phi_a \circ \phi_b^{-1} \circ \phi_b(U_b \cap U_c) \end{aligned}$$

et comme $\phi_a \circ \phi_b^{-1}$ est un homéomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^m$ on obtient que on obtient que $\phi_a(U_a \cap U_b \cap U_c)$ est ouvert. D'où $\phi_a(U_a \cap U_c$ est ouvert dans ${}_r m$ comme union d'ouverts. Ensuite, pour montrer que les $\phi_a \circ \phi_c^{-1} : \phi_c(U_{ac}) \to \phi_a(U_{ac})$ sont des homéomorphismes, il suffit de voir qu'en restreignant aux $\phi_c(U_{abc})$, leur restriction est continue (on applique alors 1.49(6). Or $\phi_a \circ \phi_c^{-1} = \phi_a \circ \phi_b^{-1} \circ \phi_b \circ \phi_c^{-1}$ est alors continue comme composée d'applications continues (en passant par $\phi_b(U_{abc})$). □

On va montrer que si deux atlas $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ de M sont compatibles, alors $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. En fait on va montrer un peu plus.

Définition 2.14. On dit qu'un C^0-atlas de M est **maximal** s'il est égal à sa classe d'équivalence.

On prend la réunion de tous les atlas de la classe d'équivalence : c'est un atlas maximal.

Théorème 2.15. Soit $\mathcal{M} = \{(U_i, \phi_i)\}$ un C^0-atlas maximal de dimension m de M. Alors

(1) $\mathcal{B} = \{U_i\}$ est la base d'une topologie $\mathcal{T}$ sur M, qui en fait une variété topologique.

(2) Pour tout atlas $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \mathcal{T}$.

On appelle canonique la topologie ainsi produite sur M.

`Preuve:`

(1) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de topologie. Puisque $\mathcal{M}$ est un atlas, $M = \cup_i U_i$ donc tout $x \in M$ est contenu dans un U_i. Montrons que $\mathcal{B}$ est stable par intersection finie, ce qui montrera le deuxième axiome de 1.9. Soit (U_i, ϕ_i) et (U_j, ϕ_j) deux cartes de $\mathcal{M}$, montrons que $U_{ij} = U_i \cap U_j$ est aussi le domaine d'une carte de $\mathcal{M}$. Posons $\phi_{ij} = \phi_{i|U_{ij}}$. Alors $\phi_{ij}(U_{ij}) = \phi_i(U_{ij})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ puisque $\mathcal{M}$ est un atlas. Montrons que (U_{ij}, ϕ_{ij}) est compatible avec toute carte $(U_k, \phi_k) \in \mathcal{M}$. On a

$$\phi_{ij}(U_{ij} \cap U_k) = \phi_i(U_{ik} \cap U_{ij}) = \phi_i(U_{ik}) \cap \phi_i(U_{ij})$$

est une réunion d'ouverts de $\mathbb{R}^m$ puisque les cartes en i, j, k sont compatibles. On montre de même que $\phi_k(U_{ij} \cap U_k)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Maintenant, avec les conventions évidentes :

$$\phi_k \circ \phi_{ij}^{-1} : \phi_i(U_{ijk}) \to \phi_k(U_{ijk})$$

est une restriction de l'homéomorphisme $\phi_k \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_{ik}) \to \phi_k(U_{ik})$, donc est un homéomorphisme. Il reste à voir que les $\phi_i : U_i \to V_i = \phi_i(U_i)$ sont des homéomorphismes. Cela suivra du lemme suivant, qui montrera aussi (2) :

Lemme 2.16. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ un atlas. Alors

$$U \text{ ouvert de } (M, \mathcal{T}) \Leftrightarrow \phi_a(U \cap U_a) \text{ ouvert de } \mathbb{R}^m, \forall (U_a, \phi_a) \in \mathcal{A}.$$

`Preuve:`
$\Rightarrow$ Soit $U \in \mathcal{T}$ et $(U_a, \phi_a) \in \mathcal{A}$ une carte. Il faut montrer que $\phi_a(U \cap U_a)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^m$. Soit $y \in \phi_a(U \cap U_a)$ et $x \in \phi_a(U \cap U_a)$ tel que $y = \phi_a(x)$. On cherche O un ouvert de $\mathbb{R}^m$ tel que $\phi(x) \in O \subset \phi_a(U \cap U_a)$. Puisque les domaines de cartes de $\mathcal{M}$ sont une base de la topologie $\mathcal{T}$ il existe $(U_i, \phi_i) \in \mathcal{M}$ tel que $x \in U_i \subset U$. Alors $x \in U_i \cap U_a$ et $\phi(x) \in O = \phi_a(U_i \cap U_a) \subset \phi_a(U \cap U_a)$ est l'ouvert de $\mathbb{R}^m$ cherché (rappelons que (U_i, ϕ_i) est compatible avec $\mathcal{A}$).

$\Leftarrow$ Soit $U \subset M$ tel que $\phi_a(U \cap U_a)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^m$ pour toute carte $(U_a, \phi_a) \in \mathcal{A}$. On veut montrer que $U \in \mathcal{T}$. Il suffit de trouver une carte $(O, \phi) \in \mathcal{M}$ telle que $x \in O \subset U$ (puisque les domaines de cartes de $\mathcal{M}$ sont une base de la topologie $\mathcal{T}$). Puisque $\mathcal{A}$ est un atlas, il existe $(U_a, \phi_a) \in \mathcal{A}$ tel que $x \in U_a$. Posons $O = U \cap U_\alpha$ et $\phi = \phi_{\alpha|O}$. Clairement $x \in O \subset U$, il suffit donc de prouver que (O, ϕ) est une carte de $\mathcal{M}$. Puisque $\mathcal{M}$ est une classe d'équivalence, il suffit de montrer que (O, ϕ) est compatible avec $\mathcal{A}$. Déjà, $\phi(O) = \phi_a(U \cap U_\alpha)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ par hypothèse. Soit $(U_b, \phi_b) \in \mathcal{A}$ une carte. Alors

$$\phi(O \cap U_b) = \phi_a(U \cap U_a \cap U_b) = \phi_a(U \cap U_a) \cap \phi_a(U_a \cap U_b)$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^m$. De même pour $\phi_b(O \cap U_b)$. Le changement de cartes

$$\phi \circ \phi_b^{-1} : \phi_b(O \cap U_b) \to \phi(O \cap U_b)$$

est un homéomorphisme comme restriction de l'homéomorphisme $\phi_a \circ \phi_b^{-1}$. Ceci démontre que (O, ϕ) est compatible avec $\mathcal{A}$, et donc $(O, \phi) \in \mathcal{M}$. On conclut que $U \in \mathcal{T}$. $\square$
Cela termine la preuve du théorème. $\square$

Remarque 2.17. Si $(M, \mathcal{U})$ est un espace topologique, et une m-variété de topologie canonique $\mathcal{T}$, alors $\mathcal{U} = \mathcal{T}$ si

- les domaines de cartes U_i sont des ouverts de $\mathcal{U}$, ($\Rightarrow \mathcal{T} \subset \mathcal{U}$)
- Les $\phi_i : U_i \to \phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^m$ sont des homéomorphismes pour la topologie $\mathcal{U}$ sur M.

Remarque 2.18. Cela n'empêche pas un ensemble (sans topologie) d'avoir plusieurs structures de variétés.

Cours 6 : jeudi 21/02/13

2.3 Propriétés des variétés topologiques

On liste quelques propriétés évidentes :

Proposition 2.19. Soit M une variété topologique.

(1) M est localement connexe par arc (tout point admet un voisinage connexe par arc),

(2) M est localement compacte (tout point admet un voisinage compact),

(3) M est localement séparée (tout point admet un voisinage séparé).

En particulier si M est connexe, elle est connexe par arc. Cependant M (même connexe) n'est pas nécessairement séparée.

Exemple 2.20 (La droite à deux origines). Soit $M = \mathbb{R}^* \cup \{a, b\}$, de topologie engendrée par

$$\mathcal{B} = \{ \text{ ouverts de } \mathbb{R}^*\} \cup \{] - \varepsilon, \varepsilon[\cup \{a\} \mid \varepsilon > 0\} \cup \{] - \varepsilon, \varepsilon[\cup \{b\} \mid \varepsilon > 0\}.$$

Cette topologie est connexe mais n'est pas séparée car tout voisinage de a intersecte tout voisinage de b.
Cependant M est une variété topologique de dimension 1, avec 2 cartes $U_a = \mathbb{R}^* \cup \{a\}$ et $U_b = \mathbb{R}^* \cup \{b\}$ homéomorphes à $\mathbb{R}$ (on envoie $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^*$ par l'identité et a, resp. b, sur 0).
La même construction appliquée à S^1 privée d'un point donne une 1-variété qui vérifie la propriété de compacité (axiome (2) de la définition 1.88) mais n'est pas compact car séparé.

On dira qu'un C^0-atlas est séparé s'il induit une topologie séparée. Enonçons un critère pour la séparation :

Lemme 2.21. Soit $\mathcal{A}$ un atlas d'une variété M. On suppose que pour tout couple $\{(U_0, \phi_0), (U_1, \phi_1)\}$ de cartes de $\mathcal{A}$ et tout compact $K \subset \phi_0(U_0)$, $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}(K \cap \phi_0(U_{01})$ est compact dans $\phi_1(U_{01})$. Alors M est séparée.

`Preuve:` Soit $x \neq y \in M$. S'il existe U un domaine de carte tel que $x, y \in U$, il est évident qu'on peut séparer x de y. Supposons qu'il n'existe pas de tel domaine et soit $(U_0, \phi_0) \in \mathcal{A}$ tel que $x \in U_0$, $y \notin U_0$. Soit (U_1, ϕ_1) une carte telle que $y_1 \in U_1$. Soit $K \subset \phi_0(U_0)$ un voisinage compact de x ($K = \overline{B(\phi_0(x), \varepsilon)}$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit). Par hypothèse, $F = \phi_1 \circ \phi_0^{-1}(K \cap \phi_0(U_{01})$ est fermé dans $\phi_1(U_{01})$. Alors $V_1 = \phi_1(U_{01}) \setminus F$ est un ouvert contenant $\phi_1(y)$. Alors $\phi_1^{-1}(V_1)$ et $\phi_0^{-1}(\mathrm{Int}K)$ sont deux ouverts de M séparant x de y. □

Définition 2.22. On dit qu'un espace topologique est à **base dénombrable** s'il admet $\mathcal{B}$ une base de sa topologie, $\mathcal{B}$ dénombrable.

Exercice 2.23. Montrer que si M est une variété compacte, elle est à base dénombrable.

Théorème 2.24 (Théorème de plongement de Withney)**.** Soit M une m-variété topologique séparée à base dénombrable. Alors il existe $\phi : M \to \mathbb{R}^{2m+1}$ un plongement. En particulier M est métrisable.

Autrement dit toute variété (raisonnable) est une sous-variété. On admettra la preuve de ce théorème. On montrera en DM qu'il existe un plongement $\phi : M \to \ell^2(\mathbb{R})$, l'espace de Hilbert des suites de carré sommable (le produit scalaire étant $\langle x, y\rangle = \sum x_n y_n$). Cela impliquera aussi que M est métrisable.

A PARTIR DE MAINTENANT TOUTES LES VARIETES SERONT SUPPOSEES SEPAREES A BASE DENOMBRABLE.

On ne sera donc pas embêté avec les pathologies sur les critères séquentiels, entre autres. Vérifions que nos variétés favorites en font partie. La sphère S^n est évidement connexe, compacte. Il en est de même pour l'espace projectif $P^n(\mathbb{R})$.

Lemme 2.25. L'espace projectif $P^n(\mathbb{R})$ est une n-variété connexe et compacte, homéomorphe à $S^n/(x \sim -x)$.

`Preuve:` Soit $f : S^n \to P^n(\mathbb{R})$, qui à x associe D_x la droite passant par x. C'est une surjection. Munissons $P^n(\mathbb{R})$ de la topologie finale associée à $f : U \subset P^n(\mathbb{R})$ est ouvert $\Leftrightarrow p^{-1}(U)$ est ouvert. L'application f est alors continue. Puisque S^n est connexe cela implique que $P^n(\mathbb{R}) = f(S^n)$ est

connexe.
Soit $T : S^n \to S^n$ l'application $x \mapsto -x$ (application *antipodie*). Soit $D_x \neq D_y \in P^n(\mathbb{R})$ alors $\{x, -x\} \cap \{y, -y\} = \emptyset$. On peut trouver deux ouverts $U_x \supset \{x, -x\}$, $U_y \supset \{y, -y\}$ disjoints et saturés par T, i.e. tels que $T(U_x) = U_x$ et $T(U_y) = U_y$. Alors $f(U_x)$ est un voisinage ouvert de D_x, puisque $f^{-1}(f(U_x)) = U_x$, disjoint de $f(U_y)$ un voisinage ouvert de D_y. On a montré que $P^n(\mathbb{R})$ est séparé. Puisque S^n est compacte, f continue, surjective et $P^n(\mathbb{R})$ séparé, la proposition 1.90 implique que $P^n(\mathbb{R}) = f(S^n)$ est compacte. On en déduit aussi que f est fermée : soit F un fermé de S^n, alors F est compact dans S^n compacte, donc $f(F)$ est compacte dans $P^n(\mathbb{R})$ donc fermée.
Notons S^n/T l'espace topologique quotient induit par $x \sim T(x)$ (i.e. $x \sim -x$), $\pi : S^n \to S^n/T$ la projection canonique. Il est clair que f passe au quotient en

$$\bar{f} : S^n/T \to P^n(\mathbb{R})$$

bijective, continue, fermée. C'est donc un homéomorphisme. Il est clair aussi que $\pi : S^n \to S^n/T$ est un homéomorphisme local, qui munit S^n/T, et donc $P^n(\mathbb{R})$ d'une structure de variété topologique. □

Remarque 2.26. La couple (Id, T) d'homéomorphismes de S^n est naturellement associé au groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($T^2 = Id$). On reviendra la dessus.

2.4 Construction de variétés topologiques

2.4.1 Action de groupes, revêtements

Définition 2.27. Soient X, Y deux espace topologiques. On dit qu'une application $p : X \to Y$ est un revêtement si

(1) p est surjective, continue

(2) Pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert V de y dans Y tel que $p^{-1}(V)$ admette une partition $p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$, où les U_i sont ouverts dans X, telle que $p : U_i \to V$ est un homéomorphisme.

Exemple 2.28. $p : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ est un revêtement.

Etant donné un espace topologique X, on note $\mathrm{Hom}(X)$ le groupe (pour la loi de composition) des homéomorphismes de X.

Définition 2.29 (Action de groupes)**.** Soit G un groupe. On dit que G agit (par homéomorphisme) sur X s'il existe un morphisme $\rho : G \to \mathrm{Hom}(X)$. On appelle **orbite de** x l'ensemble $\{\rho(g)(x) \mid g \in G\} \subset X$.

Pour $g \in G$ et $x \in X$, l'image de $x \in X$ par l'homéomorphisme $\rho(g)$ peut être notée e $\rho(g)(x)$, $\rho(g).x$, $g(x)$ ou simplement $g.x$, voire gx s'il n'y a pas d'ambiguité. Le fait d'avoir un morphisme dit que $(g_1.g_2).x = g_1.(g_2.x)$ pour tout $g_1, g_2 \in G$. Le neutre $einG$ agit par l'application identité : $e.x = x$. On peut noter $G(x)$ l'orbite de x.

Exemple 2.30. (1) Le groupe $G = (\mathbb{Z}, +)$ agit sur $X = \mathbb{R}$ par translation : pour $n \in \mathbb{Z}$, $\rho(n)$ est la translation $x \mapsto x + n$. C'est bien un morphisme car $\rho(n + n')(x) = x + n + n' = (x + n) + n' = \rho(n) \circ \rho(n')(x)$. L'orbite de x est $G(x) = x + \mathbb{Z}$.

(2) Le groupe $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ agit sur S^n par l'application antipodie : $\rho([0]) = Id$, $\rho([1]) = T$. L'orbite de x est $G(x) = \{x, -x\}$.

(3) Le groupe $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ agit sur S^1 par rotation d'angle $\frac{2\pi}{p}$.

Une action de groupe sur X induit une relation d'équivalence sur X dont les classes sont les orbites : on dit que $x \sim x'$ s'il existe $g \in G$ tel que $x = gx'$. C'est une relation d'équivalence car $x = gx' \Rightarrow x' = g^{-1}x'$ donc $x' \sim x$; si $x = gx'$ et $x' = g'x''$ alors $x = (gg')x'')$. On note X/G l'espace topologique quotient. Si $X = M$ est une m-variété, on peut se demander quelles contraintes sur l'action de G assurent que M/G soit aussi un m-variété et que $p : M \to M/G$ soit un revêtement.

Cours 7 : jeudi 28/02/13

Définition 2.31. On dit que l'action $\rho : G \to \mathrm{Hom}(X)$ est **totalement discontinue** et **séparante** si

(1) (séparante) Pour tous $x, y \in X$ tel que $y \notin G(x)$, il existe des voisinages U de x et V de y tels que pour tout $g \in G$, on ait $g(U) \cap V = \emptyset$.

(2) (totalement discontinue) Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x tel que pour tout $g \in G$, $g \neq e$, $g(U) \cap U = \emptyset$.

Remarque 2.32. L'axiome (1) peut être reformulé comme suit : Pour tous $x, y \in X$ tel que $y \notin G(x)$, il existe des voisinages U de x et V de y tels que pour tous $g, h \in G$, $g(U) \cap h(V) = \emptyset$. En effet, $g(U) \cap h(V) = \emptyset \Leftrightarrow (h^{-1} \circ g)(U) \cap V = \emptyset$. Comme g et h sont quelconques, $h^{-1} \circ g$ est quelconque. De manière condensée, $G(U) \cap G(V) = \emptyset$.

Les exemples (1) et (2) ci-dessus vérifient cette définition, pas l'exemple (3) puisque $G(0) = 0$ donc $(G \setminus \{e\})(U)$ intersecte U pour tout voisinage U de 0.

Exemple 2.33. L'action de $G = (\mathbb{Z}^n, +)$ sur $\mathbb{R}^n$, définie par $g(x) = x + g$, où $g = (g_1, \ldots, g_n) \in \mathbb{Z}^n$, est proprement discontinue et séparante. Pour (1) soit $x, y \in \mathbb{Z}^n$ avec $y \notin G(x)$. Puisque $d(y, G(x)) = \inf\{d(y, z \mid z \in G(x)\} > 0$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $B(y, \varepsilon) \cap G(x) = \emptyset$. On prend alors $U = B(x, \varepsilon/2)$ et $V = B(y, \varepsilon/2)$. Pour (2) il suffit de prendre $U = B(x, 1/2)$.

Théorème 2.34. Soit M une m-variété, G un groupe agissant de manière totalement discontinue et séparante sur M. Alors l'espace topologique quotient M/G est une m-variété et la projection $p : M \to M/G$ est un revêtement. Si M est connexe, M/G est connexe.

`Preuve:` L'espace M/G est muni de la topologie quotient. Soit $[x] = G(x) \in M/G$, U un voisinage ouvert de x satisfaisant l'axiome (2) de 2.31. Puisque $g(U)$ est disjoint de U pour tout $g \in G$

différent de e, la projection $p : U \to p(U) \subset M/G$ est injective. Elle est continue par définition de la topologie quotient. Soit $U' \subset U$ un ouvert. Alors $p^{-1}(p(U')) = \cup_g g(U')$ est ouvert, ce qui signifie que $p(U')$ est un ouvert de M/G et que p est ouverte. Il s'ensuit que $p(U)$est un ouvert et que $p : U \to p(U)$ est un homéomorphisme. Cela montre que M/G est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^m$, puisque U l'est. De plus $p : G(U) \to p(U)$ est un revêtement.
Montrons que M/G est séparé. Soit $[x] \neq [y] \in M/G$, U_x un voisinage ouvert de $x \in M$, U_y un voisinage ouvert de $y \in M$ satisfaisant l'axiome (1) de 2.31. Alors $G(U_x)$ et $G(U_y)$ sont deux ouverts saturés disjoints dans M. Il s'ensuit que $p(G(U_x))$ et $p(U_y) = p(G(U_y))$ sont deux ouverts disjoints séparant $[x]$ de $[y]$ (cf 1.65).
Si $\mathcal{B}$ est une base dénombrable de M, $p(\mathcal{B})$ en est une de M/G (p est un homéomorphisme local donc ouverte, les images sont des ouverts). $\square$

Définition 2.35. Soit G agissant sur un espace X. On dit que G agit **sans point fixe** si pour tout $g \in G$, $g \neq e$, $\forall x \in X$, $g(x) \neq x$.

L'antipodie sur S^n et les actions de $\mathbb{Z}^n$ précédentes sont sans point fixes. Une action totalement discontinue est sans point fixe.

Corollaire 2.36. Soit G un groupe fini agissant sans point fixe sur une m-variété M. Alors M/G est une m-variété.

`Preuve:` Montrons d'abord que l'axiome (2) de 2.31 est vérifié. Notons $G = \{e, g_1, \ldots, g_k\}$. Soit $x \in M$, puisque G agit sans point fixe, les points $x_0 = X$, $x_1 = g_1 x, \ldots, x_k = g_k x$ sont deux à deux distincts. Puisque M est séparé, on peut trouver des voisinages ouverts U_i de x_i, pour $i = 0, \ldots, k$, deux à deux distincts (construire d'abord des voisinages U_{ij} de x_i et U_{ji} de x_j tel que $U_{ij} \cap U_{ji} = \emptyset$, puis prendre pour U_i l'intersection des U_{ij} pour j différent de i. L'intersection est finie donc c'est encore un voisinage). Définissons alors $V_0 = U_0 \cap g_1^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap g_k^{-1}(U_k)$, puis $V_i = g_i(V_0)$. Ce sont des voisinages de x_i contenus dans U_i, donc $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Ceci montre que tout $g \in G$ différent de e, $g(V_0) \cap V_0 = \emptyset$.
Pour (1) on considère $x, x' \in M$ tel que $x' \notin G(x)$. Alors $G(x) = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ et $G(x') = \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_k\}$ et les points sont tous deux à deux distincts. On procède comme au dessus pour construire des voisinages U_i des x_i et U'_i des $x'i$“ deux à deux distincts puis on pose $V_0 = \cap_i g_i^{-1}(U_i)$ et $V'_0 = \cap_i g_i^{-1}(U'_i)$. Alors $G(V_0) \cap G(V'_0) = \emptyset$. $\square$

2.5 Exemples

Construisons quelques exemples de surfaces (i.e. 2-variétés).

Exemple 2.37 (Cylindre). $M = \mathbb{R} \times]-1,1[$, $G = \mathbb{Z}$, $\rho(n) =$ translation : $(x,y) \mapsto (x+n,y)$.

Exemple 2.38 (Tore révisité). On a déjà vu le tore $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$. Il est homéomorphe à $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ où l'action de $\mathbb{Z}^n$ est par translation $\rho(k_1,\ldots,k_n) : x = (x_1,\ldots,x_n) \mapsto (x_1+k_1,\ldots,x_n+k_n)$. On a vu que l'action est totalement discontinue et séparante, donc $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est une n-variété. On montre sans difficulté que l'application $f : \mathbb{R}^n \to S^1 \times \ldots \times S^1 = T^n$, $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto (e^{2i\pi x_1},\ldots,e^{2i\pi x_n})$ passe au quotient en $\bar{f} : \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \to T^n$ un homéomorphisme. Cela montre que $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est compact. On peut aussi dire que $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = [0,1]^n/\mathbb{Z}^n$.

Exercice 2.39 (Ruban de Moebius). $M = (\mathbb{R} \times]-1,1[)/\mathbb{Z}$ (le cylindre), $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que ρ défini par

$$\rho([1]) : (x \mod \mathbb{Z}, y) \mapsto (x + 1/2 \mod \mathbb{Z}, -y)$$

est un morphisme et que M/G est une variété. Dessinez là.

Exercice 2.40 (Bouteille de Klein). $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (le tore T^2), $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que ρ défini par

$$\rho([1]) : (x \mod \mathbb{Z}, y \mod \mathbb{Z}) \mapsto ((x+1/2) \mod \mathbb{Z}, (-y) \mod \mathbb{Z})$$

est un morphisme et que $B^2 = M/G$ est une variété, qu'on appelle bouteille de Klein. Dessinez là.

2.6 Somme connexe

Soit M, N deux m-variétés. Donnons nous (U,ϕ) une carte de M telle que $\phi(U) = B(0,1) \subset \mathbb{R}^m$. De même soit (V,ψ) une carte de N telle que $\psi(V) = B(0,1) \subset \mathbb{R}^m$. On pose

$$U_{1/2} = \phi^{-1}(B(0,1/2)) \subset U, \quad \text{et} \quad V_{1/2} = \psi^{-1}(B(0,1/2)) \subset V.$$

Notons que $\partial U_{1/2} = \phi^{-1}(S(0,1/2))$ est homéomorphe via $\psi^{-1} \circ \phi$ à $\partial V_{1/2} = \psi^{-1}(S(0,1/2))$ (ce sont des $m-1$-sphères). On pose

$$\hat{M} = M \setminus U_{1/2}, \quad \text{et} \quad \hat{N} = N \setminus V_{1/2}$$

et $f : \partial U_{1/2} \subset \hat{M} \to \partial V_{1/2} \subset \hat{N}$ la restriction de l'homéomorphisme $\psi^{-1} \circ \phi$. On définit alors

$$W = \hat{M} \cup_f \hat{N} = (\hat{M} \coprod \hat{N})/(x \sim f(x))$$

l'espace topologique quotient de la somme disjointe $\hat{M} \coprod \hat{N}$ par la relation d'équivalence identifiant $x \in \partial U_{1/2}$ et $f(x) \in \partial V_{1/2}$.

On admettra la proposition suivante

Proposition 2.41. (1) W est une m-variété topologique.

(2) Si M et N sont connexes, W est connexe et la classe d'homéomorphie de W ne dépend pas des cartes (U,ϕ) et (V,ψ).

Définition 2.42. On appelle **somme connexe** de M et N et on notera $M\#N$ toute variété homéomorphe à W.

Cours 8 : jeudi 07/03/13

La proposition suivante est plus facile.

Proposition 2.43. Soit M_0, M_1, M_2 des m-variétés connexes. On note $\cong$ la relation "être homéomorphe".

(1) $M_0\#M_1 \cong M_1\#M_0$,

(2) $(M_0\#M_1)\#M_2 \cong M_0\#(M_1\#M_2)$

(3) $M\#S^m \cong M$.

Autrement dit la sphère S^m est le neutre de la somme connexe. `Preuve:` (1) est évident.
(2) Puisque qu'on a le choix des cartes, on prend (U_0, ϕ_0), (U_1, ϕ) définissant $M_0\#M_1$) et (U_1', ϕ_1'), (U_2, ϕ_2) définissant $M_1\#M_2$) tel que $U_1 \cap U_1' = \emptyset$. C'est alors évident.
(3) Il suffit de remarquer que $S^m \setminus V_{1/2}$ où $V_{1/2} \subset S^m$ est homéomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{R}^m$, est homéomorphe à une boule fermée de $\mathbb{R}^m$. Faire la somme connexe de M avec S^m consiste à enlever une boule ouverte à M puis à recoller une boule. □

Dans le cas des surfaces, on a comme briques fondamentales compactes, la sphère $S = S^2$, le tore $T = T^2$, le plan projectif $P = P^2(\mathbb{R})$ et la bouteille de Klein $B = B^2$

Définition 2.44. (1) On appelle **tore à g anses** et on note T_g toute surface homéomorphe à $T\#T\#\dots\#T$ (g copies, g entier ≥ 2), avec les conventions $T_1 = T$ et $T_0 = S^2$.

(2) On appelle **plan projectif à g anses** et on note P_g toute surface homéomorphe à $P\#T_g$ (g entier ≥ 0, $P_0 = P$).

(3) On appelle **bouteille de Klein à g anses** et on note B_g toute surface homéomorphe à $B\#T_g$ (g entier ≥ 0, $B_0 = B$).

Il n'y a rien d'autre :

Théorème 2.45 (Classification des surfaces compactes). (1) Les surfaces T_g , $P_{g'}$ et $B_{g''}$ sont deux à deux homéomorphiquement distinctes (et $T_{g_1} \cong T_{g_2} \Leftrightarrow g_1 = g_2$, de même pour P_g et B_g)

(2) Ce sont, à homéomorphisme près, les seules surfaces connexes compactes.

On démontrera ce théorème plus tard. Le plus dur sera en fait (1). En attendant, on peut déjà montrer :

Exercice 2.46 (à faire en TD). $P\#P \cong B$

On a vu que, sous certaines conditions, le quotient $M \to M/G$ d'une variété M donnait une variété $M/G = Y$ et un revêtement. Inversement, partant d'une variété Y, peut-on toujours l'écrire comme un quotient $Y = X/G$, où X est une variété, plus "simple" que Y ? Dans les exemples ($S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, $P^n(\mathbb{R}) = S^n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$), c'est le cas. Une demande raisonable est de chercher X avec "le moins d'identifications possibles", au sens qu'elle n'admet pas de revêtement non trivial (i.e. autre qu'elle même).

Cette construction existe : l'espace X s'appelle le revêtement universel de Y et le groupe G est, à isomorphisme près, le groupe fondamental de Y. C'est l'objet du prochaine chapitre. Le groupe G encode de manière algébrique les identifications à faire sur X pour obtenir Y. Il contient la "structure" de Y.

3 Groupe fondamental

3.1 Homotopies de chemins

On rappelle qu'étant donnés $x_0, x_1 \in X$ un espace topologique, un *arc* ou un *chemin* de x_0 à x_1 est $\gamma : [0,1] \to X$ continu tel que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$.

Définition 3.1 (Homotopies de chemins). Deux chemins α, β de x_0 à x_1 sont **homotopes** ($\alpha \sim \beta$) s'il existe $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ continu tel que $F(\cdot, 0) = \gamma(\cdot)$, $F(\cdot, 1) = \beta(\cdot)$ et pour tout $s \in [0,1]$, $F(\cdot, s)$ est un chemin de x_0 à x_1. L'application F est une *homotopie* entre α et β.

Lemme 3.2. L'homotopie définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins de x_0 à x_1.

`Preuve:` Si F est une homotopie entre α et β, $G(\cdot, s) = F(\cdot, 1-s)$ définit une homotopie de β à α. Si F est une homotopie entre α et β et G une homotopie entre β et γ, alors $H(\cdot, s) = F(\cdot, 2s)$ pour $s \in [0, 1/2]$ et $H(\cdot, s) = G(\cdot, 2(s-1/2))$ pour $s \in [1/2, 1]$ définit une homotopie de α à γ. C'est bien une application continue car recollement d'applications continues sur les fermés $[0,1] \times [0, 1/2]$ et $[0,1] \times [1/2, 1]$. Notons que $H(\cdot, 1/2) = \beta(\cdot)$. □

Définition 3.3 (Opérations sur les chemins)**.** - (Inverse) Si α est un chemin de x_0 à x_1 on définit le chemin *inverse* α^{-1} de x_1 à x_0 par $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$.

- (Produit) Si α est un chemin de x_0 à x_1 et β est un chemin de x_1 à x_2, on définit le chemin *produit* $\alpha\beta$ de x_0 à x_2 par

$$\alpha\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \beta(2(t-1/2)) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

C'est bien un chemin (continu) car recollement de 2 applications continues sur les fermés $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$. Notons que $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$.

Lemme 3.4. Les opérations sont compatibles avec la relation d'équivalence :

(1) Si $\alpha \sim \beta$, alors $\alpha^{-1} \sim \beta^{-1}$.

(2) Supposons que le produit $\alpha_0\beta_0$ soit défini. Si $\alpha_0 \sim \alpha_1$ et $\beta_0 \sim \beta_1$, alors $\alpha_0\beta_0 \sim \alpha_1\beta_1$.

`Preuve:`
(1) Si F est une homotopie entre α et β, $G(t, s) = F(1-t, s)$ définit une homotopie de α^{-1} à β^{-1}.
(2) Soit F une homotopie entre α_0 et α_1 et G une homotopie entre β_0 et β_1. En particulier $\alpha_1(1) = \alpha_0(1) = \beta_0(0) = \beta_1(0)$ donc $\alpha_1\beta_1$ est défini. De plus Alors

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & t \in [0, 1/2] \\ G(2(t-1/2), s) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

définit une homotopie de $\alpha_0\beta_0$ à $\alpha_1\beta_1$. □

On peut donc définir les opérations sur les classes d'équivalence de chemins : $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ et $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$.

Lemme 3.5. Le produit est associatif sur les classes d'équivalence de chemins, soit

$$(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma).$$

`Preuve:` On pose

$$H(t,s) = \begin{cases} \gamma(\frac{4t}{s+1}) & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ \beta(4t-s-1) & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ \gamma(\frac{4}{s+2}(t-\frac{s+2}{4}) & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

qui réalise une homotopie entre $(\alpha\beta)\gamma$ et $\alpha(\beta\gamma)$. □

EXERCICE 3.6. Soit γ un chemin de x à y, soit $t_1 \in]0,1[$ quelconque et $x_1 = \gamma(t_1)$. Reparamétrer de manière afffine la restriction de γ allant de x à x_1 un un chemin γ_1, et la restriction de γ allant de x_1 à y en un chemin γ_2. Montrer que $\gamma \sim \gamma_1\gamma_2$.

Pour tout $x \in X$, notons $e_x : [0,1] \to X$ le chemin constant $e_x(t) = x$ pour tout $t \in [0,1]$.

Lemme 3.7. Pour tout chemin α de x à y

(1) $[\alpha e_y] = [\alpha] = [e_x\alpha]$.
(2) $[\alpha][\alpha]^{-1} = [e_x]$.
(3) $[\alpha]^{-1}[\alpha] = [e_y]$.

`Preuve:` Exercice. □

On a donc presque une loi de groupe.

Définition 3.8. Un lacet basé en x est un chemin de x à x.

Sur l'ensemble des lacets basés en x, le produit est toujours défini.

Définition 3.9. On appelle **groupe fondamental** de X basé en $x \in X$ l'ensemble des classes d'équivalence de lacets basé en x, qu'on munit du produit de lacets. On le note $\Pi(X,x)$.

C'est un groupe. La lacet constant $[e_x]$ est le neutre. Ce groupe ne dépend pas vraiment de x (si X est connexe par arcs) :

Lemme 3.10. Si X est connexe par arcs, pour tout $x, y \in X$, $\Pi(X, x)$ est isomorphe à $\Pi(X, y)$.

`Preuve:` Fixons γ un chemin de x à y. On définit $\phi : \Pi(X, x) \to \Pi(X, y)$ par $[\alpha] \mapsto [\gamma^{-1}\alpha\gamma]$. C'est un morphisme de groupe :

$$\begin{aligned} \phi[\alpha\beta] &= [\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma] \\ &= [\gamma^{-1}\alpha\gamma\gamma^{-1}\beta\gamma] \\ &= [\gamma^{-1}\alpha\gamma][\gamma^{-1}\beta\gamma] \\ &= \phi[\alpha]\phi[\beta] \end{aligned}$$

Sa réciproque est $\psi \Pi(X, y) \to \Pi(X, x)$ par $[\alpha] \mapsto [\gamma\alpha\gamma^{-1}]$. En effet :

$$(\psi \circ \phi)[\alpha] = [\gamma][\phi[\alpha]][\gamma^{-1}] = [\gamma][\gamma^{-1}][\alpha][\gamma][\gamma^{-1}] = [\alpha].$$

□

Exemple 3.11. $\Pi(\mathbb{R}^n, 0) = \{e\}$. On verra que $\Pi(S^1) = \mathbb{Z}$, $\pi(S^n) = \{e\}$ si $n \geq 2$, $\Pi(P^n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $n \geq 2$...

Définition 3.12. On dit que X (connexe par arc) est *simplement connexe* si $\Pi(X) = \{e\}$.

Proposition 3.13. Sont équivalents :

(1) X est simplement connexe.

(2) Pour tout x, y dans X, les chemins de x à y sont tous homotopes.

(3) Toute application continue $f : S^1 \to X$ se prolonge continuement au disque D^2.

`Preuve:` (1) $\Rightarrow$ (2) Soit α, β deux chemins de x à y. Alors $\alpha\beta^{-1}$ est un lacet en x, donc $[e] = [\alpha\beta^{-1}] = [\alpha][\beta]^{-1}$, soit $[\alpha] = [\beta]$.
(2) $\Rightarrow$ (1) On prend $x = y$. Tout lacet en x est homotope au lacet constant.
(1) $\Rightarrow$ (3) Etant donné f on a un lacet $\alpha : [0, 1] \to X$ défini par $\alpha(t) = f(e^{2i\pi t}$. Soit $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ une homotopie de α au lacet constant $x = \alpha(0)$. Posons $F(se^{2i\pi t}) = H(t, 1 - s)$. C'est bien défini en 0 car pour tout t, $H(t, 1) = x_0$.
(3) $\Rightarrow$ (1) On pose $H(t, s) = F((s - 1)e^{2i\pi t})$. □

Proposition 3.14 (Petit Van Kampen). Soit $X = U_1 \cup U_2$ connexe tel que U_1 et U_2 sont ouverts simplement connexes, $U_1 \cap U_2$ est connexe par arc. Alors X est simplement connexe.

Cela permet de montrer en particulier que S^n est simplement connexe. C'est un cas particulier du théorème de Seifert-Van Kampen,, qui permettra de calculer le groupe fondamental de $U_1 \cup U_2$, en fonction des groupes fondamentaux de U_1 et U_2.

`Preuve:` Soit $x \in U_1 \cap U_2$, montrons que $\Pi(X, x)$ est trivial. Soit γ un lacet basé en x. Si γ est contenu dans U_1 ou dans U_2, la conclusion est immédiate. Supposons que ce ne soit pas le cas. On commence par montrer qu'un peut se donner une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ de $[0, 1]$ telle que pour chaque $i = 0, ..., N - 1$, $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ est contenu dans U_1 ou dans U_2. Pour cela observons que $\gamma^{-1}\{U_1\}$ et $\gamma^{-1}(U_2)$ sont deux ouverts de $[0, 1]$. Ils sont réunions d'intervalles, et l'ensemble de ces intervalles forme un recouvrement ouvert de $[0, 1]$. Par compacité, ce recouvrement admet un nombre de Lebesgue $\varepsilon > 0$ (tel que toute boule de rayon ε dans $[0, 1]$ est contenu dans un des intervalles du recouvrement). En particulier si $|t_{i+1} - t_i| < \varepsilon$, $[t_i, t_{i+1}]$ est contenu dans un des ces intervalles, et $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_1$ ou U_2. Notons γ_i la restriction de γ à $[t_i, t_{i+1}]$. On a

$$\gamma_0 \sim \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_N$$

chaque γ_i étant dans U_1 ou dans U_2. On peut supposer que si $\gamma_i \subset U_1$, $\gamma_{i+1} \not\subset U_1$ et de même avec U_2 (cela revient à supprimer t_{i+1} si $[t_i, t_{i+2}]$ a une image contenue dans U_1 ou dans U_2). Il s'ensuit que l'extremité de $\gamma(t_i) \in U_1 \cap U_2$ pour $i = 0, ..., N$. Pour chaque $i = 0, ..., N - 1$, donnons nous un chemin c_i de $\gamma(t_{i+1})$ à x contenu dans $U_1 \cap U_2$. On peut alors écrire

$$\gamma \sim \gamma_0 c_0 c_0^{-1} \gamma_1 c_1 c_1^{-1} \ldots c_{N-1} c_{N-1}^{-1} \gamma_N.$$

Chaque $c_{i-1}^{-1} \gamma_i c_i$ est un lacet basé en x, contenu dans U_1 ou dans U_2, donc homotopiquement trivial. Les chemins $\gamma_0 c_0$ et $c_{N-1}^{-1} \gamma_N$ sont égalements des lacets en x, contenus dans U_1 ou U_2 donc triviaux. Donc $[\gamma] = [e]$. $\square$

Ce résultat peut être généralisé à $X = \bigcup U_i$ si les U_i sont simplement connexes, $U_i \cap U_j$ est connexe par arcs pour tout i, j et il existe x appartenant à tous les U_i.

Proposition 3.15. $\Pi(X \times Y, (x, y)) = \Pi(X, x) \times \Pi(Y, y)$

Le produit direct $G \times H$ de deux groupes est l'ensemble des (g, h), où $g \in G$ et $h \in H$, muni de la loi $(g, h).(g', h') = (gg', hh')$.

Cours 9 : jeudi 21/03/13

3.2 Effet d'applications continues

Si $f : X \to Y$ est continue, elle induit un morphisme de groupe

$$\begin{array}{rcl} f_* : \Pi(X,x) & \to & \Pi(Y,y) \\ [\alpha] & \mapsto & [f \circ \alpha] \end{array}$$

(il est évident que $\alpha \sim \beta \Rightarrow f \circ \alpha \sim f \circ \beta$.)

Propriétés évidentes : si $g : Y \to Z$ est continue
- $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$
- $(id_X)_* = id_{\Pi(X,x)}$
- f homéomorphisme $\Rightarrow f_* : \Pi(X,x) \to \Pi(Y,y)$ est un isomorphisme.

Attention cependant, f injective n'implique pas f_* injective (inclure S^1 dans $\mathbb{R}^2$), et f surjective n'implique pas f_* surjective ($\mathbb{R} \to S^1$).

Définition 3.16. On dit que deux applications continues $f, g : X \to Y$ sont homotopes ($f \sim g$) s'il existe $H : X \times [0,1] \to Y$ tel que $H(\cdot, 0) = f(\cdot)$ et $H(\cdot, 1) = g(\cdot)$. Si $A \subset X$, on dit qu'elles sont homotopes relativement à A si de plus $H(\cdot, s)_{|A} = id_{|A}$ pour tout $s \in [0,1]$. En particulier $f = g$ sur A.

Lemme 3.17. Si $f \sim g$ relativement à $\{x\}$, $f_* = g_* : \Pi(X,x) \to \Pi(Y, f(x))$.

Définition 3.18. Soit $A \subset X$. On appelle **rétraction de X sur A** une application $r : X \to A$ continue telle que $r_{|A} = id_A$.

Si $i : A \to X$ est l'inclusion, alors $r \circ i$ est l'identité donc

$$(r \circ i)_* : \Pi(A, a) \to \Pi(X, a) \to \Pi(A, a)$$

est l'identité. Comme $(r \circ i)_* = r_* \circ i_*$, il vient que i_* est injectif et r_* surjectif.

Définition 3.19. On dit que $A \subset X$ est un **rétract par déformation de** X s'il existe une rétraction $r : X \to A$ homotope à l'identité relativement à A.

L'idée est qu'on peut déformer progressivement X en A. On dit que X se rétracte par déformation sur A.

Exemple 3.20. (1) Le cylindre se rétracte par déformation sur un cercle central.
(2) $\forall n \geq 2$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se rétracte par déformation sur S^{n-1} via

$$H(x, s) = x(1 - s) + x\frac{x}{\|x\|}.$$

Exercice 3.21. Montrer que le ruban de Moebius se rétracte par déformation sur un cercle.

Théorème 3.22. Si $A \subset X$ est un rétract par déformation de X alors l'inclusion $i : A \to X$ induit un isomorphisme

$$\Pi(A, a) \approx \Pi(X, a)$$

pour tout $a \in A$.

`Preuve:` On sait déjà que $r_* i_*$ est l'identité de $\Pi(A, a)$. Puisque $i \circ r$ est homotope à l'identité relativement à $a \in A$, $i_* r_*$ est l'identité de $\Pi(X, a)$, par 3.17. $\square$

On en déduit que le cylindre et le ruban de Moebius ont un groupe fondamental isomorphe à celui du cercle, i.e $\mathbb{Z}$; le groupe fondamental de $\mathbb{R}^2$ privé d'un point est aussi isomorphe à $\mathbb{Z}$, celui de $\mathbb{R}^n$ privé d'un point est trivial si $n \geq 3$.

On dit que l'espace X est *contractible* s'il se rétracte par déformation sur $\{x\} \subset X$ (ex : $\mathbb{R}^n$). Il est en particulier simplement connexe.

3.3 Homotopie et revêtement

On rappelle que $p : \tilde{X} \to X$ est un revêtement si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage U de x tel que sur chaque composante connexe C de $p^{-1}(U)$, $p : C \to U$ est un homéomorphisme.

Proposition 3.23 (Relevement des chemins). Soit $(\tilde{X}, p)$ un revêtement de X, $x \in X$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. On suppose que $\tilde{X}$ est séparé. Alors pour chaque chemin γ d'origine x, il existe un unique chemin $\tilde{\gamma}$ d'origine $\tilde{x}$ tel que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

`Preuve:` Appelons voisinage élémentaire tout $U \subset X$ tel que p soit un homéomorphisme en restriction à chaque composante connexe de $p^{-1}(U)$. Soit U_0 un voisinage élémentaire de x, $V_0 \subset p^{-1}(U_0)$ connexe contenant $\tilde{x}$. Si γ est contenu dans U_0, il suffit de poser $\tilde{\gamma} = p_{V_0}^{-1} \circ \gamma$. Pour le cas général soit $(U_i)_{i \in J}$ un recouvrement de $\gamma([0,1])$ par des voisinages élémentaires. Par compacité on peut supposer J fini et de plus se donner une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ de $[0,1]$ telle que chaque $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ soit contenu dans un voisinage élémentaire, qu'on peut appeler U_i. On relève γ sur $[0, t_1]$ grâce à $p_{|V_0}$. Ayant défini $\tilde{\gamma}$ sur $[0, t_i]$, on l'étend sur $[0, t_{i+1}]$ grâce à l'homéomorphisme $p_{|V_i} : V_i \to U_i$, où $V_i \subset p^{-1}(U_i)$ est connexe et contient $\tilde{\gamma}(t_i)$.

Le choix des U_i n'est pas unique. Montrons que $\tilde{\gamma}$ n'en dépend pas. On énonce un résultat d'unicité dans un cadre plus général que nécessaire ici. Il nous resservira plus tard.

Lemme 3.24. Soit $(\tilde{X}, p)$ un revêtement de X, séparé. Soit Y connexe et localement connexe par arc. Soit $f_0, f_1 : Y \to \tilde{X}$ tel que $p \circ f_0 = p \circ f_1$. Alors

$$A := \{y \in Y \mid f_0(y) = f_1(y)\} = \emptyset \text{ ou } Y.$$

Si on applique ceci à $\tilde{\gamma}, \tilde{\beta} : [0,1] \to \tilde{X}$ deux relevés de γ, on obtient $\tilde{\gamma} = \tilde{\beta}$ puisque $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x} = \tilde{\beta}(0)$.

`Preuve:` Supposons A non vide. Montrons que A est ouvert et fermé. Considérons

$$\begin{array}{rcl} F : Y & \to & \tilde{X} \times \tilde{X} \\ y & \mapsto & (f_0(y), f_1(y)) \end{array}$$

F est continu. Soit $D = \{(x,x) \mid x \in \tilde{X}\}$, alors D est fermé car $\tilde{X} \times \tilde{X}$ est séparé. Il s'ensuit que $A = F^{-1}(D)$ est fermé. Montrons que A est ouvert. Soit $y \in A$, $\tilde{x} = f_0(y) = f_1(y) \in \tilde{X}$ et $x = p(\tilde{x}) \in X$. Soit U un voisinage élémentaire contenant x, V un relevé de U contenant $\tilde{x}$. Par continuité de f_0 et f_1, il existe un voisinage W de y tel que $f_0(W) \subset V$ et $f_1(W) \subset V$. Comme $p \circ f_0 = p \circ f_1$, pour $z \in W$ $p \circ f_0(z) = p \circ f_1(z)$ implique que $f_0(z) = f_1(z)$. D'où $W \subset A$ et A est ouvert.

Q : à quoi sert la connexité locale par arc ? $\square$

$\square$

Maintenant qu'on sait relever des chemins, on veut relever des classes d'homotopie de chemins, i.e. montrer que deux chemins homotopes se relèvent en deux chemins homotopes.

Proposition 3.25 (Relèvement des homotopies)**.** Soit $(\tilde{X}, p)$ un revêtement de X, séparé. Soit $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ des chemins homotopes d'extrémités x_0, x_1 et $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ une homotopie de γ_0 à γ_1. Soit $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tel que $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Alors il existe une unique application continue $\tilde{F} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$ tel que $p \circ \tilde{F} = F$ et $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}_0$. En particulier, $\tilde{F}$ réalise une homotopie entre $\tilde{\gamma}_0$ et $\tilde{\gamma}_1$. En particulier les relevés $\tilde{\gamma}_0$ et $\tilde{\gamma}_1$ ont mêmes extrémités.

`Preuve:` On recouvre $F([0,1] \times [0,1])$ par des ouverts élémentaires $(U_i)_{i \in J}$, J fini et on se donne des subdivisions

$$\begin{aligned} 0 &= t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1 \\ 0 &= s_0 < s_1 < \ldots < s_N = 1 \end{aligned}$$

tel que chaque $F([t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}])$ soit contenu dans un ouvert U_k (on utilise pour cela un nombre de Lebesgue associé au reouvrement de $[0,1] \times [0,1]$ par les $F^{-1}(U_i)$)). On commence par définir $\tilde{F}$ sur $[0,1] \times [0, s_1]$ en procédant comme suit. Supposons que U_0 est un ouvert élémentaire contenant x_0. On définit $\tilde{F}$ sur $[0, t_1] \times [0, s_1]$ comme $p_{V_0}^{-1} \circ F$ où V_0 est le relevé de U_0 contenant $\tilde{x}_0$. Ayant défini $\tilde{F}$ sur $[0, t_i] \times [0, s_1]$, on l'étend sur $[0, t_{i+1}] \times [0, s_1]$ en utilisant le voisinage élémentaire contenant $F(t_i, s_1)$ et son relevé contenant $\tilde{F}(t_i, s_1)$.
Ayant défini $\tilde{F}$ sur $[0,1] \times [\circ, s_1]$, on procède de même sur $[0,1] \times [s_1, s_2]$ et on itère... L'unicité est assurée par le lemme 3.24. Notons que, par unicité du relevé : $\tilde{F}(\cdot, 0) = \tilde{\gamma}_0(\cdot)$, $\tilde{F}(\cdot, 1) = \tilde{\gamma}_1(\cdot)$ et $\tilde{F}(0, s) = \tilde{x}_0$ pour tout $x \in [0,1]$. Comme $p \circ \tilde{F}(1, s) = x_1$ pour tout $s \in [0,1]$, $s \mapsto \tilde{F}(1, s)$ est un relevé du chemin constant $\{x_1\}$, d'origine $\tilde{x}_1$. Par unicité il coincide avec le relevé constant $\{\tilde{x}_1\}$, i.e. $\tilde{F}(1, s) = \tilde{x}_1$ pour tout $s \in [0,1]$. C'est donc bien une homotopie de $\tilde{\gamma}_0$ à $\tilde{\gamma}_1$. $\square$

Cours 10 : jeudi 04/04/13

Obervons que les relévés, à partir d'un même point, de 2 lacets homotopes, sont deux chemins homotopes donc ayant même extrémités. Cela permet de distinguer des classes d'homotopie. Voyons une application.

Lemme 3.26. Le groupe fondamental de la figure 8 n'est pas abélien.

`Preuve:` La figure 8 est la bouquet X de deux cercles A et B ayant un point commun x_0. On construit un révêtement de X comme suit. Définissons $\tilde{X} \subset \mathbb{R}^2$ comme la réunion de l'axe $Ox = \mathbb{R} \times \{0\}$, de l'axe $O_y = \{0\} \times \mathbb{R}$, de cercles B_i de rayon $1/4$ intersectant Ox en $(i, 0)$, $\forall i \in \mathbb{Z}^*$ et des cercles A_j de rayon $1/4$ intersectant Oy en $(0, j)$, $\forall j \in \mathbb{Z}^*$. On définit $p : \tilde{X} \to X$ en enroulant Ox sur A, Oy sur B, les points entiers étant les seuls envoyés sur x_0, et en envoyant homéomorphiquement les A_i sur A et les B_i sur B. On peut se convaincre que c'est un revêtement. Considérons alors un lacet a d'origine x_0 faisant un tour de A et B faisant un tour de B. On affirme que

$$ab \not\sim ba.$$

En effet le relevé de $\tilde{ab}$ à partir de $(0, 0)$ a pour extrémité $(1, 0)$ (ou $(-1, 0)$ selon l'orientation de a choisie) alors que le relevé de $\tilde{ba}$ a pour extrémité $(0, 1)$ (ou $(0, -1)$). Il s'ensuit que $\tilde{ab}$ et $\tilde{ba}$ ne sont pas homotopes, donc ab et ba non plus d'après 3.25. □

Corollaire 3.27. Le groupe fondamental de $T^2 \times T^2$ n'est pas abélien.

`Preuve:` Soit $X = T^2 \# T^2 \subset \mathbb{R}^2$ et $A \subset X$ le bouquet de 2 cercles formés d'un grand cercle dans chaque T^2. On peut construire une rétraction $r : X \to A$. Comme noté après la définition 3.18, cela implique que $i_* : \Pi(A, x_0) \to \Pi(X, x_0)$ est injectif. Prenons 2 lacets a, b dans A ne commutant pas en homotopie, alors

$$i_*([a])i_*([b]) = i_*[ab] \neq i_*[ba] = i_*([b])i_*([a]).$$

□

Corollaire 3.28. Les espaces S^2, P^2, T^2, $T^2\#T^2$ sont homéomorphiquement distincts.

Théorème 3.29. Soit $\tilde{X}$ simplement connexe, G un groupe agissant sur $\tilde{X}$ de manière totalement discontinue et séparante, et $x \in X := \tilde{X}/G$. Alors $\Pi(X, x)$ est isomorphe à G.

`Preuve:` Notons $p : \tilde{X} \to \tilde{X}/G$ la projection. Fixons $\tilde{x} \in \tilde{X}$ tel que $p(\tilde{x}) = x$. On construit un morphisme $d : \Pi(X, x) \to G$. D'après 3.23, il se relève de manière unique à partir de $\tilde{x}$ en un chemin $\tilde{\gamma} \subset \tilde{X}$. D'après 3.25, l'extrémité $\tilde{\gamma}(1)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ (si $\gamma \sim \beta$, alors $\tilde{\gamma} \sim \tilde{\beta}$ donc ont même extrémité). Il s'ensuit que $[\gamma] \mapsto \tilde{\gamma}(1)$ est bien défini. Maintenant puisque $p(\tilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = x$, $\tilde{\gamma}(1)$ est équivalent à $\tilde{x}$, c'est-à-dire est dans l'orbite de $\tilde{x}$. Il existe donc $g \in G$ tel que $\tilde{\gamma}(1) = g\tilde{x}$. Puisque l'action est totalement discontinue, elle est sans point fixe donc g est unique (si $h\tilde{x} = g\tilde{x}$, alors $g^{-1}h\tilde{x} = \tilde{x}$). On définit donc d par $[\gamma] \mapsto$ l'unique $g \in G$ tel que $g\tilde{x} = \tilde{\gamma}(1)$. Vérifions que c'est un morphisme. Soit γ_1, γ_2 des lacets en x, $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ leur relevés à partir de $\tilde{x}$. Soit $g_1 = d([\gamma_1])$, i.e. $g_1\tilde{x} = \tilde{\gamma}_1(1)$. Observons que $g_1\tilde{\gamma}_2$ est un chemin d'origine $g_1\tilde{x} = \tilde{\gamma}_1(1)$ et d'extrémité $g_1\tilde{\gamma}_2(1) = g_1 g_2 \tilde{x}$. On voit que $\tilde{\gamma}_1 g_1 \tilde{\gamma}_2$ est le relevé du lacet $\gamma_1\gamma_2$, donc

$$\begin{aligned} d([\gamma_1\gamma_2])\tilde{x} &= \tilde{\gamma}_1 g_1 \tilde{\gamma}_2(1) \\ &= g_1 g_2 \tilde{x} \\ &= d([\gamma_1])d([\gamma_2])\tilde{x} \end{aligned}$$

Comme l'action est sans point fixe, on conclut $d([\gamma_1\gamma_2]) = d([\gamma_1])d([\gamma_2])$.

Pour construire la réciproque $G \to \Pi(X, x)$, étant donné $g \in G$, on prend un chemin c (quelconque) de $\tilde{x}$ à $g\tilde{x}$ alors $p \circ c$ est un lacet en x. Sa classe d'homotopie ne dépend pas de c ($\tilde{X}$ étant simplement connexe, les chemins de $\tilde{x}$ à $g\tilde{x}$ sont tous homotopes. On associe donc à g l'élément $[p \circ c] \in \Pi(X, x)$.

Il est assez clair que la composition de ces deux applications est l'identité. D'où l'isomorphisme $G \approx \Pi(X, x)$. □

Exemple 3.30. $\Pi(S^1) = \mathbb{Z}$, $\Pi(P^n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $n \geq 2$, $\pi(T^n) = \mathbb{Z}^n$, $\pi(K^2) = \mathbb{Z}$.

4 Classification des surfaces compactes

On commence la preuve du théorème 2.45 de classification des surfaces compactes et connexes. Les idées clés sont :

(1) Réaliser les surfaces comme quotient d'un polygone de $\mathbb{R}^2$ à $2n$-cotés par identification des cotés par paires

(2) Simplifier une telle présentation pour se ramener à une forme canonique

4.1 Quotients canoniques de polygones

On commence par décrire les briques fondamentales S^2, P^2, B^2 et T^2 comme des quotients $P/_\sim$, où $P \subset \mathbb{R}^2$ est (topologiquement) un disque fermé. On peut définir T^2, resp. K^2, comme quotient de RR^2 par $\mathbb{Z}^2$ pour les actions $(x, y) \mapsto (x + k, y + l)$, resp. $(x, y) \mapsto (x + k, (-1)^k y + l)$. La restriction de la relation d'équivalence au polygone $P = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ définit le même espace quotient. En effet, lorsque $Y = X/_\sim$ et $A \subset X$ est une partie telle que la projection $p : X \to X/_\sim$ est surjective restreinte à A, on a $Y \approx A/_\sim$.

On peut définir la relation d'équivalence sur P d'une autre manière en procédant comme suit. Labelisons d'une même lettre les cotés qu'on veut identifier (a les deux cotés verticaux de P, b les deux cotés horizontaux). Numérotons $p_0, p_1, \dots, p_4 = p_0$ les cotés consécutifs de P dans le sens horaire. Il existe exactement deux homéomorphismes linéaires entre le segment $[0, 1]$ et un coté donné $p_i p_{i+1}$: $H_+(t) = (1 - t)p_i + tp_{i+1}$ et $H_-(t) = H_+(1 - t)$. Munissons chaque coté de P d'une flêche, spécifiant une identification du coté avec $[0, 1]$ via H_+ si la flêche est orientée dans le sens horaire, via H_- sinon. Ces données (lettre attribuée au coté + orientation) sont décrites de manière non ambigue par le *symbole*, mot formé des lettres successives des cotés de P (lues dans le sens horaire à partir de p_0), munies de l'exposant -1 si la flêche correspondante est anti-horaire. Par exemple :

$$\text{Tore : } aba^{-1}b^{-1} \qquad \text{Bouteille de Klein } abab^{-1}.$$

On définit la relation d'équivalence sur P de la manière suivante :

- tout point intérieur à P n'est équivalent qu'à lui même.
- les points de deux cotés ayant même lettre sont équivalents si identifiés au même point de $[0, 1]$

On peut vérifier (exercice) que la relation d'équivalence ainsi définie coincide avec celle définie plus haut. L'espace projectif P^2 est

$$P^2 \approx S^2/(x \sim -x) \approx S^2_+/(x \sim -x) \approx \bar{D}/(x \sim -x \, sur \, \partial \bar{D})$$

où $D = D_{\mathbb{R}^2}(0, 1)$, $\bar{D} = \overline{D_{\mathbb{R}^2}(0, 1)}$. On décide que $P = \bar{D}$ est un polygone à 2 cotés, qu'on appelle 2-gone, définis par les sommets $p_0 = (1, 0) = e^{i0}$, $p_1 = (-1, 0) = e^{i\pi}$, $p_2 = p_0$ (par exemple). L'identification de $[0, 1]$ avec le coté $p_i p_{i+1}$ se fait via $t \mapsto p_i e^{-\pi t}$ (dans le sens horaire). Le symbole du projectif est alors aa.

De même la sphère peut être obtenue en quotientant le disque $P = \bar{D}$ à l'aide du symbole aa^{-1} (la relation d'équivalence est $(x, y) \sim (-x, y)$ sur ∂P, et on construit facilement $f : P \to S^2$ continue, donc fermée entre ces deux compacts, qui passe au quotient en un homéomorphisme $\bar{f} : D/\sim \to S^2$).

Exercice 4.1. Montrer que P^2, resp. S^2, sont quotients d'un polygone à 4 cotés, avec les symboles $aabb^{-1}$, resp. $aa^{-1}bb^{-1}$.

Il est temps de généraliser.

Définition 4.2. Soit $n \geq 3$. On appelle **polygone** à n cotés (n-gone) l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^2$ de n points distincts du cercle S^1. Ces points sont les **sommets** du polygone et les segments joignant deux point successifs ses **cotés**.

Définition 4.3. Soit $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ un ensemble. On appelle **symbole** de longueur k l'expression

$$\sigma = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}$$

où $a_{i_j} \in \mathcal{A}$ et $\varepsilon_j \in \{-1, +1\}$ pour $j = 1, \dots, k$.

En général on omet l'exposant $+1$. On appelle *lettres* les éléments de $\mathcal{A}$. Etant donné σ un symbole de longueur $n \geq 2$, P un n-gone, p_0 un sommet de P, on associe au triplet (σ, P, p_0) une application

$$\{ \text{ cotés de } P\} \to \mathcal{A} \times \{-1, 1\},$$

qu'on appelle un *marquage*, qui associe au j-ème coté à partir de p_0 (dans le sens horaire) le couple $(a_{i_j}, \varepsilon_j) = (lettre, orientation)$. On numérote les sommets $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n = p_0$ dans le sens horaire.

Définition 4.4. Etant donné (σ, P, p_0), le marquage induit une relation d'équivalence $\sim$ sur P définie comme suit :

- tout point intérieur à P n'est équivalent qu'à lui même.
- Soit p_ip_{i+1} et p_jp_{j+1} deux cotés marqués la même lettre. On identifie, pour tout $t \in [0, 1]$,

  $$p_i + t(p_{i+1} - p_i) \text{ avec } p_j + t(p_{j+1} - p_j)$$

  si p_ip_{i+1} et p_jp_{j+1} ont même orientation,

  $$p_i + t(p_{i+1} - p_i) \text{ avec } p_{j+1} + t(p_j - p_{j+1})$$

  sinon.

On note $X(\sigma, P, p_0)$ l'espace topologique quotient $P/_\sim$. On vérifie sans peine que

$$X(\sigma, P, p_0) \approx X(\sigma, P', p'_0)$$

pour tout (P, p_0) et (P', p'_0) marqués par σ. On note $X(\sigma)$ la classe d'homéomorphie de $X(\sigma, P, p_0)$, elle ne dépend que de σ. Sans hypothèse supplémentaire, l'espace quotient $X(\sigma)$ n'est pas nécessairement une surface.

Définition 4.5. On dit qu'un symbole σ est **pair** si chaque lettre apparait exactement deux fois.

On dit alors que $X(\sigma)$ est obtenu comme quotient de polygone par identifications des cotés par paires.

Lemme 4.6. Si σ est pair, $X(\sigma)$ est une surface compacte et connexe.

`Preuve:` On veut montrer que tout $x \in X(\sigma)$ a un voisinage homéomorphe à une 2-boule. Considérons $x_1 \in P$ tel que $[x_1] = x$. Il y a 3 cas à considérer : x_1 est intérieur à P, sur un coté ou sur un sommet. Si $x_1 \in \mathrm{Int}P$ c'est évident car la projection $\pi : P \to P/_\sim$ est un homéomorphisme sur $\mathrm{Int}P$. Si x_1 est sur un coté de P, il existe un seul autre point x_2 équivalent à x_1, situé sur un autre coté. Soit $D_i = B(x_i, \varepsilon) \cap P$ pour $\varepsilon > 0$ petit. On peut trouver un homéomorphisme $h_1 : D_1 \to B(0, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et $h_2 : D_2 \to B(0, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R})$ tel que $h_1(y_1) = h_2(y_2)$ si $y_1 \sim y_2$. En passant au quotient l'application définie sur l'union disjointe de D_1 et D_2, on obtient un homéomorphisme d'un voisinage de x vers $B(0, \varepsilon)$. Si x_1 est sur un sommet il est équivalent à $x_2, \ldots, x_k$ des sommets. Les domaines $B(x_i\varepsilon) \cap P$ sont des secteurs angulaires, bordés par des cotés. Envoyons homéomorphiquement $B(x_1\varepsilon) \cap P$ sur le secteur angulaire $B(0, \varepsilon) \cap \{re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \theta_1\}$ (ne faisant pas nécessairement le même angle). Soit e_0 le coté envoyé sur re^{i0}. Soit e_1 e_1 le coté envoyé sur $re^{i\theta_1}$. Il est équivalent à un unique autre coté e'_1, et son orientation spécifie l'une des extrémités, un des $x_1, \ldots, x_p$, disons x_j. On envoie alors homéomorphiquement $B(x_j\varepsilon) \cap P$ sur $B(0, \varepsilon) \cap \{re^{i\theta} \mid 0 \leq r, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$, e'_1 ayant même image que e avec compatibilité par rapport aux équivalences. On itère. Un dernier secteur est envoyé sur $B(0, \varepsilon) \cap \{re^{i\theta} \mid 0 \leq r, \theta_k \leq \theta \leq 2\pi\}$ lorsque réapparait (nécessairement) le coté équivalent à e_0. En passant au quotient la collection des homéomorphismes entre les $B(x_j\varepsilon) \cap P$ et les $B(0, \varepsilon) \cap \{re^{i\theta} \mid 0 \leq r, \theta_i \leq \theta \leq \theta_{i+1}\}$, on obtient un homéomorphisme d'un voisinage de x sur $B(0\varepsilon)$.

□

On montrera plus tard la réciproque, beaucoup plus difficile :

Théorème 4.7. Toute surface compacte connexe est le quotient d'un polygone par identification des cotés par paires.

Cours 11 : jeudi 11/04/13

Voyons d'abord ce qu'on peut faire avec les surfaces $X(\sigma)$.

4.1.1 Symboles et somme connexe

On a la très jolie formule suivante :

Proposition 4.8. Soit σ_1, σ_2 deux symboles pairs sur des alphabets disjoints. Alors

$$X(\sigma_1\sigma_2) = X(\sigma_1)\#X(\sigma_2).$$

Traitons d'abord comme exemple la somme connexe $T^2\#T^2$ de 2 tores. On se donne $\sigma_1 = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}$, P_1 un 4-gone marqué par σ_1, et de même $\sigma_2 = a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$ et P_2 marqué par σ_2. Alors $P_i/_\sim \approx T^2$. Les seuls points à identifier dans P_i sont sur ∂P_i. Pour faire la somme connexe on doit enlever un disque ouvert à chaque T^2. On choisit le disque des disques ouverts $D_i \subset \mathrm{Int}P_i$ tels que $\bar{D}_i \cap \partial P_i$ est réduit à un sommet de P_i, $(P_i - D_i)/_\sim$ est tore privé d'un disque ouvert. Marquons c_i le bord de D_i. On obtient $T^2\#T^2$ en identifiant $c_1 \sim c_2$ (par un homéomorphisme quelconque). Maintenant considérons des 5-gones P_1' et P_2' marqués par $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}c$ et $c^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$. Alors

$$X(P_i') \approx (P_i - D_i)/_\sim$$

En effet on prend $f_i : P_i' \to P_i - D_i$ continue, fermée, surjective, envoyant c sur c_i, compatible avec les relations d'équivalence, et on factorise $p \circ f_i$ au quotient en $\bar{f}_i : X(P_i') \to P_i \sim$ un homéomorphisme. L'injectivité de $\bar{f}_i$ vient de ce que les 4 sommets sont équivalents donc les extrémités de c sont identifiées dans le quotient.

Considérons maintenant un 8-gone P marqué par

$$\sigma_1\sigma_2 = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}.$$

On affirme que $P/_\sim$ est homéomorphe à $T^2\#T^2$. En effet il existe un homéomorphisme de P sur $P_1' \coprod_{c\sim c^{-1}} P_2'$, compatible avec le marquage (factoriser l'application continue évidente de $P_1' \coprod P_2'$ sur P). On passe au quotient à l'arrivée puis on factorise au quotient au départ.

Démontrons la proposition 4.8.

Preuve: Soit $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$, la longueur de σ_i. Soit P_i un n_i-gone dont le quotient selon σ_i donnent $X(\sigma_i)$. Soit P_1' le $(n_i + 1)$-gone marqué par $\sigma_1' = \sigma_1 c$, P_2' le $(n_i + 1)\sigma_2' = c^{-1}\sigma_2$. Comme au dessus, $X(\sigma_i')$ est homéomorphe à $X(\sigma_i)$ privé d'un disque. On peut vérifier que p_n est équivalent à p_0 par la construction du lemme 4.6 : les cotés étant identifiés par paires sauf le coté $p_n p_0$, si on part de p_0 avec $e_0 = c$, l'itération doit s'arrêter en retrouvant le secteur de sommet p_n contenant c. On peut aussi dire qu'en collant un triangle marqué $c^1 x x^{-1}$ (une 2-boule fermée) le long de c, on a un symbole pair dont le quotient est une surface, le quotient de c bordant une 2-boule, c'est un cercle.

En identifiant P_1' et P_2' le long de c, on obtient un $(n_1 + n_2)$-gone P, qu'on munit du symbole $\sigma_1\sigma_2$ et on peut construire une application continue

$$P \to \left(P_1' \coprod P_2'\right)/_\sim \approx \left((P_1' - D_1) \coprod P_2' - D_2)\right)/_\sim$$

qui passe au quotient en l'homéomorphisme recherché. □

Corollaire 4.9. (1) Le tore à g anses est le quotient du symbole

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}.$$

(2) Une somme connexe de n espaces projectifs est le quotient du symbole

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n.$$

4.1.2 Simplification de symboles

Définition 4.10. On dit que deux symboles σ, σ' sont équivalents si $X(\sigma) = X(\sigma')$.

C'est évidement une relation d'équivalence.

Le but maintenant est de montrer qu'on peut simplifier un symbole, en restant dans la classe d'équivalence, pour le ramener à une forme canonique. Faisons la liste de simplifications de symboles ne changeant pas sa classe d'équivalence. Certaines manipulations sont triviales (elles ne changent évidément pas la classe d'équivalence du symbole)

- *Echange de lettre* (si σ_i ne contiennent ni a, ni b)

$$\sigma_1 a^\varepsilon \sigma_2 a^{\varepsilon'} \sigma_3 \sim \sigma_1 b^\varepsilon \sigma_2 b^{\varepsilon'} \sigma_3$$

- *Permutation d'orientation*

$$\sigma_1 a^\varepsilon \sigma_2 a^{\varepsilon'} \sigma_3 \sim \sigma_1 a^{-\varepsilon} \sigma_2 a^{-\varepsilon'} \sigma_3$$

- *Permutation circulaire*
$$a_{i_1}^{\varepsilon_1}a_{i_2}^{\varepsilon_2}\dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} \sim a_{i_2}^{\varepsilon_2}\dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}a_{i_1}^{\varepsilon_1}$$
- *Inversion*
$$a_{i_1}^{\varepsilon_1}a_{i_2}^{\varepsilon_2}\dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} \sim a_{i_k}^{-\varepsilon_k}\dots a_{i_2}^{-\varepsilon_2}a_{i_1}^{-\varepsilon_1}$$

Voyons maintenant des simplifications de symboles moins triviales.

Proposition 4.11. Soient σ, σ' deux symboles tel que $\sigma\sigma'$ soit pair non vide et ne contient pas a, alors

(1) (Simplication des aa^{-1})
$$\sigma aa^{-1}\sigma' \sim \sigma\sigma' \tag{11.1}$$
(2) (Regroupement des aa)
$$a\sigma a\sigma' \sim aa\sigma\sigma'^{-1} \tag{11.2}$$
(3)
$$aabbcc \sim aabcb^{-1}c^{-1} \tag{11.3}$$

Remarque 4.12. - Un cas particulier de (2) est $abab^{-1} \sim aabb$, soit
$$K^2 \approx P^2\#P^2 \tag{11.4}$$
- (3) se lit aussi
$$P^2\#P^2\#P^2 \approx P^2\#T^2 \tag{11.5}$$

`Preuve:` (1) Soit P est un polygone marqué par $\sigma aa^{-1}\sigma'$ et P' un polygone marqué par $\sigma\sigma'$. On se donne $f : P \to P'$ continue, linéaire sur les cotés, homéomorphisme de $P - \{a, a^{-1}\}$ sur $P' - f(a)$, envoyant les arêtes a et a^{-1} sur un même segment dans P', compatible avec les relations d'équivalence. Alors $p \circ f$ passe au quotient en un homéomorphisme $P/_\sim \to P'/_\sim$.

(2) Si σ ou σ' est vide c'est trivial, supposons qu'ils ne le sont pas. Soit P un polygone marqué $a\sigma a\sigma'$. Soit p_ip_{i+1} et p_jp_{j+1} les cotés (disjoints) marqués a. Découpons P le long d'un segment c joignant p_{i+1} à p_{j+1} en deux morceaux P_1 et P_2 (P_1 contenant p_i) et formons un polygone marqué P' en recollant la partie de P_1 et le symétrique de P_2 par rapport à p_jp_{j+1} le long de a. On peut vérifier que $P/_\sim$ est homéomorphe à $P'/_\sim$ à partir de l'application adéquate $P_1 \coprod P_2 \to P'$. On obtient
$$a\sigma a\sigma' \sim cc\sigma\sigma'^{-1} \sim aa\sigma\sigma'^{-1}.$$
(3) Montrons
$$aabcb^{-1}c^{-1} \sim aabcb^{-1}c \tag{11.6}$$
soit $P^2\#T^2 \approx P^2\#K^2$. Le résultat en découlera car $K^2 \approx P^2\#P^2$. On a
$$\begin{array}{rcl} aabcb^{-1}c^{-1} &=& aa(bc)(cb)^{-1} \\ &\sim& a(bc)a(cb) \quad \text{par (11.2)} \\ &\sim& cacbab \quad \text{(par permutation circulaire)} \\ &\sim& cca(bab)^{-1} \quad \text{par (11.2)} \\ &\sim& ccab^{-1}a^{-1}b^{-1} \sim aabcb^{-1}c. \quad \text{(échange de lettre et d'exposant)} \end{array}$$

□

On démontre maintenant un théorème de classification.

Théorème 4.13. Soit σ un symbole pair. Alors σ est équivalent à

(1) aa^{-1}, ou

(2) $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$, ou

(3) $a_1a_1a_2a_2\cdots a_na_n$.

En conséquence, $X(\sigma)$ est S^2, T_n ou une somme connexe de n espaces projectifs.

Ce n'est pas exactement la liste T_g, P_g, K_g qui apparait dans le (2) du théorème de classification 2.45 mais la remarque 4.12 nous y ramène facilement.

`Preuve:` On raisonne par récurrence sur la longueur de σ. Soit σ un mot. Si $|\sigma| = 2$ ou 4, la conclusion est vraie.
1er cas : σ contient une paire projective $a\dots a\dots$ (à équivalence près).
On suppose $\sigma \sim a\sigma_0a\sigma_1$. D'après (11.2),

$$\sigma \sim aa\sigma_0\sigma_1^{-1} = aa\sigma'$$

où $|\sigma'| = |\sigma| - 2$. On utilise l'hypothèse de récurrence.
Si $\sigma' \sim a_1a_1\dots a_ka_k$, alors $\sigma \sim aaa_1a_1\dots a_ka_k$.
Si $\sigma' \sim bb^{-1}$, OK.
Si $\sigma' \sim \sigma_1\dots\sigma_k$ avec $\sigma_i = a_ib_ia_i^{-1}b_i^{-1}$, on a par application successives de 11.3, en notant $\alpha_i = c_ic_i$,

$$\begin{aligned}
\sigma \sim aa\sigma' &= aa\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_k \\
&\sim \alpha_1\alpha_2\alpha_3\sigma_2\dots\sigma_k \\
&\sim \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\sigma_3\dots\sigma_k \\
&\sim \dots\dots \\
&\sim \alpha_1\dots\alpha_{2k+1}
\end{aligned}$$

Cours 12 : jeudi 18/04/13

Deuxième cas : σ ne contient pas de paire projective $a \dots a \dots$. Montrons que

$$\sigma \sim aba^{-1}b^{-1}w'$$

avec $|\sigma'| = |\sigma| - 4$, et la conclusion en découlera par récurrence.

Par hypothèse, chaque lettre e apparait sous la forme e et e^{-1}. On peut supposer qu'on a simplifié les aa^{-1}, donc $\sigma \sim a\sigma_0 a^{-1}\sigma_1$ où σ_0 est non vide. On a besoin de simplifier le symbole pour que le polygone associé n'ait qu'une classe de sommets. En effet un polygone peut avoir plusieurs classes d'équivalence de sommets, par exemple

$$\sigma = aa^{-1}fbb^1e^{-1}gcc^{-1}g^{-1}dd^{-1}e$$

en a 8. (Que vaut $X(\sigma)$?)

> **Lemme 4.14** (Réduction des classes de sommets)**.** Soit σ un symbole pair, alors $\sigma \sim \sigma'$ où $P(\sigma')$ n'a qu'une classe déquivalence de sommets.

`Preuve:` Par application de (11.1), on peut supposer que σ ne contient pas de aa^{-1}. Supposons que le polygone P de σ admette deux classes d'équivalence de sommets au moins, $[p]$ et $[q]$. Elles sont de cardinal ≥ 2 car la seule configuration où un sommet n'est équivalent qu'à lui même est le sommet milieu de aa^{-1}, ce qu'on a exclu. On peut supposer que $p = p_i$ et $q = p_{i+1}$ sont extrémités d'un coté (quitte à changer de classe d'équivalence), marqué par a (quitte à relabéliser). Soit b la lettre sur $rp = p_{i-1}p$. Alors $b \neq a$,, sinon $p \sim q$, et $b \neq a^{-1}$. Alors $p_{i-1}p$ est équivalent à un coté p_jp_{j+1} que pq. Découpons P le long du segment $c = rq$ et recollons rp sur p_jp_{j+1}. Alors le symbole correspondant est équivalent à σ, que la classe d'équivalence $[p]$ diminue d'une unité et celle de $[q]$ augmente d'une unité. On réitère la procédure ci-dessus (simplification éventuelle des dd^{-1} par(11.1)) + diminution de $[p]$ d'une unité et augmentation d'une autre classe d'une unité) jusqu'à la disparition de $[p]$. On réitère le tout tant qu'il reste plusieurs classes d'équivalence. □

On revient à la preuve du théorème. Montrons qu'il existe $b \in \sigma_0$, $b^{-1} \in \sigma_1$, i.e.

$$\sigma = a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1} \dots .$$

Si les cotés de P marqués par σ_0 sont stables pour la relation d'équivalence, ceux marqués par σ_1 aussi et les sommets de P ne sont pas tous équivalents. Il s'ensuit qu'un coté de P au moins dans σ_0 est équivalent à coté de P dans σ_1.

Lemme 4.15.

$$aAbBa^{-1}Cb^{-1}D \sim aba^{-1}b^{-1}DCBA$$

`Preuve:` En effet on découpe P le long d'un segment c joignant deux sommets initiaux de b et on recolle les deux morceaux le long de a en un polygone P'. On découpe à nouveau P' le long d'un segment d joignant deux extrémités opposés de c et on recolle les deux morceaux le long de b pour obtenir un polygone P'' équivalent à P. On obtient

$$\sigma \sim d^{-1}cdc^{-1}DCBA \sim aba^{-1}b^{-1}DCBA.$$

□

Ceci conclut la preuve du théorème 4.13. □

Il nous reste à montrer que toute surface compacte connexe s'écrit bien $X(\sigma)$ pour un symbole pair.

4.2 Triangulation des surfaces compactes.

4.2.1 Préliminaires

Définition 4.16. Une **triangulation** d'une surface S est la donnée d'une famille finie $\{T_1, \ldots, T_n\}$ de fermés recouvrant S et d'homéomorphismes $\phi_i : T_i' \to T_i$, où T_i' est un triangle de $\mathbb{R}^2$ (enveloppe convexe de 3 points non alignés). Les T_i sont appelés **triangles**, les images des sommets et cotés des T_i' sont appelés sommets et cotés de T_i. Il est requis qu'étant donné deux triangles distincts T_i et T_j,

- $T_i \cap T_j$ est vide, ou bien
- $T_i \cap T_j$ est un sommet, ou bien
- $T_j \cap T_j$ est coté entier de T_i et T_j.

Si $e = T_i \cap T_j$, on demande de plus que $\phi_j^{-1}\phi_i$ est linéaire entre $\phi_i^{-1}(e)$ et $\phi_j(e)$.

On utilisera aussi le terme *arêtes* pour désigner les cotés de la triangulation.

On admettra :

Théorème 4.17 (Rado)**.** Toute surface compacte admet une triangulation.

On aura besoin des précisions suivantes :

Lemme 4.18. Etant donné une triangulation d'une surface compacte

(1) Chaque arête est le coté de 2 triangles exactement.

(2) Soit p un sommet. Alors on peut numéroter les triangles contenant p dans un ordre cyclique $T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}, T_n = T_0$ tel que T_i et T_{i+1} ont un coté commun exactement.

`Preuve:` (1) Soit e une arête, par définition il existe un triangle T_i dont e est un coté. Montrons d'abord qu'il existe au moins un triangle $T_j \neq T_i$ ayant e comme coté. Commencons par le fait suivant :
Fait : Soit $T' \subset \mathbb{R}^2$, e un coté de T' et $a \in e$ intérieur à e. Alors a n'admet pas de voisinage dans T' homéomorphe à une 2-boule ouverte.
Preuve : Soit W un petit voisinage quelconque de a dans T', par exemple $W_\varepsilon = B_{T'}(a, \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$ petit. On voit facilement que $W - a$ est contractile donc simplement connexe. Supposons qu'il existe un voisinage U de a dans T', $h : U \to B = B_{\mathbb{R}^2}(0,1)$ un homéomophisme, a étant envoyé sur 0. Alors $V = h(W_\varepsilon)$ est un voisinage de 0 dans B_1. Soit $\delta > 0$ assez petit pour que $B_\delta = B(0,\delta) \subset V$. Considérons les inclusions $i : B_\delta - 0 \to B - 0$, $j : B_\delta - 0 \to V - 0$ et $k : V - 0 \to B - 0$. L'inclusion i est homotope à l'homéomorphisme $f(y) = \frac{y}{\delta}$ de $B_\delta - 0$ sur $B - 0$, et induit donc un isomorphisme $i_* : \Pi(B_\delta - 0) \to \Pi(B - 0)$. Puisque $i = kj$, $k_* j_*$ est un isomorphisme et en particulier $k_* : \Pi(V - 0) \to \Pi(B - 0)$ est surjectif. Puisque $V - 0$ est simplement connexe et $B - 0$ ne l'est pas, c'est une contradiction, terminant la preuve du fait.
Soit maintenant x intérieur au coté e de T_i. Soit W un voisinage de x dans S homéomorphe à une 2-boule. Alors W n'est pas contenu dans T_i, sinon son image réciproque par ϕ_i serait un voisinage dans T'_i d'un point intérieur d'un coté, contredisant le fait. Il s'ensuit que tout voisinage W de x dans S intersecte $S - T_i$. Puisque la triangulation recouvre S il existe $T_j \neq T_i$ adhérent à x. Par définition d'une triangulation, T_i et T_j ont le coté e en commun.
Prouvons maintenant qu'il y a au plus un triangle T_j. Cela découle de l'assertion suivante :
Fait : Soit A la réunion de k triangles dans $\mathbb{R}^3$ d'intersection une arête commune e. Soit x un point intérieur à e. Si $k \geq 3$, x n'a pas de voisinage dans A homéomorphe à une 2-boule.
(Schéma de preuve : De même tout voisinage épointé de a dans A se rétracte par déformation sur $\partial A = 2$ lacets ayant une origine commune, dont le groupe fondamental est le groupe libre à deux éléments $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Comme une 2-boule épointée est de groupe fondamental $\mathbb{Z}$, aucun voisinage de A n'est homéomorphe à une 2-boule.)
(2) Soit p un sommet. Disons que 2 triangles T_i et T_j de sommets p sont *équivalents* si $T_i = T_j$ ou bien s'il existe une suite de triangles de sommets p, de premier terme T_i et de dernier terme T_j tel que 2 triangles consécutifs ont un coté en commun exactement. Si il y a plus d'une classe d'équivalence, soit A la réunion des triangles d'une classe d'équivalence et B la réunion des triangles des autres classes. Les ensembles A et B sont fermés non vides et s'intersectent seulement en p (s'il y a un autre point x, il y a un coté dans l'intersection). On conclut que tout voisinage W de p dans S assez petit (donc contenu dans $A \cup B$) est tel que $W - p$ est non connexe. Or S

est une surface donc p admet des voisinages arbitrairement petits homéomorphes à des 2-boules, en particulier $W - p$ est connexe. □

4.2.2 Preuve du théorème 4.7

`Preuve:` On se donne une triangulation de S, fournie par le théorème 4.17.

Etape 1. On peut numéroter les triangles de la triangulation $T_1, \ldots, T_n$ de sorte que chaque T_i, $2 \leq i \leq n$ admet un coté en commun e_i avec un des triangles $T_1, \ldots, T_{i-1}$.

En effet on choisit un triangle T_1 quelconque, puis un triangle T_2 ayant un coté commun qu'on appelle e_2 avec T_1, puis T_3 ayant un coté commun avec T_1 ou T_2 et ainsi de suite. Supposons qu'on ne puisse itérer la procédure après $\{T_1, \ldots, T_k\}$, avec $k < n =$ nombre de triangles de la triangulation. Alors $\{T_{k+1}, \ldots, T_n\}$ est disjointe de $\{T_1, \ldots, T_k\}$. En effet s'il y a un point commun c'est un sommet et le lemme 4.18(2) appliqué en ce sommet implique qu'il y a des cotés communs entre les triangles $T_1, \ldots, T_k$ et les triangles $T_{k+1}, \ldots, T_n$. Il s'ensuit que la réunion des $T_1, \ldots, T_k$ et la réunion des $T_{k+1}, \ldots, T_n$ partitionne S en deux fermés disjoints non vides, ce qui est contraire à l'hypothèse de connexité de S.

On peut supposer que les $T'_i \subset \mathbb{R}^2$ sont deux à deux disjoints. On forme la réunion $T' = \bigcup_i T'_i$ et on définit $\phi : T' \to S$ continue, fermée, surjective en posant $\phi = \phi_i$ sur ϕ'_i. Il est clair que l'espace quotient $T'/_{\phi}$ est homéomorphe à S (où $x \sim y$ si $\phi(x) = \phi(y)$). Observons que pour chaque arête e de la triangulation de S, $\phi^{-1}(e)$ est constituée de 2 arêtes exactement appartenant à 2 triangles distincts T'_i et T'_j. Notons E la réunion des arêtes $e_2, \ldots, e_n$. On obtient un polygone en n'identifiant dans T' que les arêtes envoyées sur E :

Etape 2. Soit $\sim_E$ la relation d'équivalence sur T' définie par $x \sim_E x$ et $x \sim_E y$ si $\phi(x) = \phi(y) \in E$. Alors $T'/ \sim_E$ est homéomorphe à un disque fermé.

On a besoin du lemme suivant dont on laisse la preuve en exercice :

> **Lemme 4.19.** Soit X_1, X_2 homéomorphes à la 2-boule unité fermée B, $f_i : X_i \to B$ un homéomorphisme, $i = 1, 2$. Soit $e \subset \partial B$ homéomorphe au segment $[0, 1]$. Soit X l'espace quotient obtenu de l'union disjointe $X_1 \coprod X_2$ en identifiant $x_1 \in X_1$ avec $x_2 \in X_2$ si $f_1(x_1) = f_2(x_2) \in e$. Alors X est homéomorphe à la 2-boule unité fermée.

L'espace topologique $T'/ \sim_E$ peut-être obtenu en faisant les idenfications correspondant aux arêtes $e_2, e_3, \ldots, e_n$ une après l'autre. Plus précisément soit Y_i l'espace obtenu en identifiant dans $T'_1 \cup \ldots T'_i$ les paires d'arêtes correspondant (par la restriction de ϕ) à $e_2, \ldots, e_i$. Notons

$\bar{\phi}_i : Y_i \to S$ l'application obtenue en passant au quotient la restriction de ϕ à $T'_1 \cup \dots T'_i$. Alors Y_{i+1} est homéomorphe au quotient de l'union disjointe de Y_i et T'_{i+1} par l'identification de $\bar{\phi}_i^{-1}(e_{i+1})$ et de $\phi^{-1}(e_{i+1})$. Chaque triangle T'_i étant homéomorphe à une 2-boule fermée et un coté étant homéomorphe à un intervalle, il suit du lemme et d'une récurrence que chaque Y_i est homéomorphe à une 2-boule fermée. D'où $T'/\sim_E = Y_n$ est homéomorphe à un disque fermé.

Il est clair que les arêtes de T' non identifiées passent au quotient comme le bord de $T'/\sim_E$ et le munissent d'une structure de polygone, notons le P. Ces arêtes sont en nombre pair, à identifier par paires. Leur identification donne un quotient $P/\sim$ homéomorphe à S. □

4.3 Caractéristique d'Euler

Pour montrer que les surfaces du théorème 2.45 sont deux à deux non homéomorphes, on pourrait utiliser le groupe fondamental et la notion d'orientabilité d'une surface (le tore et la bouteille de Klein ont même groupe fondamental, le tore est orientable, la bouteille de Klein ne l'est pas). Comme cela demanderait des développements et que le temps nous manque, on va utiliser la caractéristique d'Euler et l'orientabilité, ce qui est plus rapide.

Définition 4.20. Soit M une surface compacte munie d'une triangulation $\{T_1, \dots, T_n\}$. Notons

$$\begin{aligned} v &= \text{nombre de sommets de } M \\ e &= \text{nombre d'arêtes de } M \\ t &= \text{nombre de triangles de } M \end{aligned}$$

Alors

$$\chi(M) = v - e + t$$

est la *caractéristique d'Euler* de M

(On peut montrer que la caractéristique d'Euler ne dépend pas de la triangulation). Deux surfaces homéomorphes ont la même caractéristisque d'Euler. On peut facilement calculer que

$$\chi(S^2) = 2, \chi(P^2) = 1, \chi(T^2) = 0 = \chi(K^2)$$

Proposition 4.21. Soit M_1, M_2 deux surfaces compactes, alors

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$$

On en déduit la caractéristique d'Euler de toutes les surfaces :

Théorème 4.22. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

Surface	*Caractéristique d'Euler*
Sphère	2
Somme connexe de n tores	$2-2n$
Somme connexe de n projectifs	$2-n$
Somme connexe d'un projectif et de n tores	$1-2n$
Somme connexe d'une bouteille de Klein et de n tores	$-2n$

Pour distinguer T^2 de K^2, on utilise l'orientabilité :

Définition 4.23. Une variété M est *orientable* si elle admet un atlas (U_i, ϕ_i) où les changements de cartes sont tous positifs, i.e. le déterminant des matrices jacobiennes des $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ sont positifs.

Cela revient à pouvoir choisir des bases orthonormées dans chaque carte, compatible par les changements de carte. Si la surface est plongée dans $\mathbb{R}^3$, cela implique qu'on peut définir une normale unitaire (l'application de Gauss) globalement sur la surface (c'est même équivalent). Il s'ensuit que le ruban de Moebius n'est pas orientable (on voit très bien que lorsque la normale fait un tour du ruban elle change de signe). Puisque la bouteille de Klein contient un ruban de Moebius, elle n'est pas orientable non plus. On peut se convaincre ensuite qu'une somme connexe d'une surface orientable et d'une surface non orientable n'est pas orientable. La somme connexe de la bouteille de Klein et de n tores n'est donc pas orientable.

En conclusion :

Théorème 4.24. Deux surfaces compactes sont homéomorphes si et seulement si leurs caractéristiques d'Euler sont égales et si elles sont toutes deux orientables ou toutes deux non orientables.