université de BORDEAUX

ANNEE UNIVERSITAIRE 2013/2014

Licence de Mathématiques
Session 2 de Géométrie Différentielle (N1MA6011)

Date : ? ?/06/2014 **Heure : ? ?h00** **Durée : 3h**

Documents : Non autorisés. Calculette homologuée : autorisée

Epreuve de Mr : Bessières. Sujet : 2 pages

Département D L Licence

Exercice 1. Autour du cours.

(1) Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un arc géométrique régulier de classe C^1. Montrer qu'il existe un paramétrage de A par longueur d'arc (on rappellera la définition).

(2) Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension d, représentée au voisinage U d'un point $a \in M$ comme un graphe :

$$U \cap M = \{(x, f(x)) \mid x \in V\},$$

où V est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f : V \to \mathbb{R}^{n-d}$ une application.

(a) Montrer que $F(x) = (x, f(x))$ définit un paramétrage de M au voisinage de a (on rappellera la définition).

(b) Montrer que $G(x, y) = y - f(x)$ définit une submersion de $V \times \mathbb{R}^{n-d}$ dans $\mathbb{R}^{n-d}$ telle que $M \cap U = G^{-1}(0)$.

(3) Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface, $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ une paramétrisation. On note $\nu(u, v) = \frac{\partial_u \phi \wedge \partial_v \phi}{|\partial_u \phi \wedge \partial_v \phi|}$ et N l'application de Gauss telle que $N \circ \phi = \nu$. Montrer que

$$\langle \partial_u \nu, \partial_v \phi \rangle = \langle \partial_v \nu, \partial_u \phi \rangle$$

et en déduire que l'endomorphisme de Weingarten $-dN : T\Sigma \to T\Sigma$ est symétrique.

Exercice 2.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la courbe d'équation

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, \ z = \cos(t)$$

(a) La courbe f est-elle paramétrée par longueur d'arc ?

(b) Calculer la courbure de f en un point $f(t)$.

(c) Donner le trièdre de Frenet de cette courbe en un point $f(t)$.

(d) Calculer la torsion de f en un point $f(t)$. Aurait-on pu prévoir cette valeur sans calcul ?

(e) Esquisser l'image de la courbe, et du repère de Frenet au point $f(0)$.

Exercice 3. Soit $U = \mathbb{R}\times]0, 2\pi[$ et $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\phi(t, \theta) = (\cosh t \cos\theta, \cosh t \sin\theta, \sinh t)$$

(a) Montrer que ϕ est la paramétrisation d'une surface lisse S.

(b) Prouver que $\phi(U) \subset f^{-1}(1)$ où $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$.

(c) A-t-on $\phi(U) = f^{-1}(1)$?

(d) Tracer $\phi(U)$.

(e) Trouver l'espace tangent à S en $\phi(0, \pi)$. Tracer $\partial_t\phi$ et $\partial_\theta\phi$ en ce point.

Exercice 4. Soit Σ une sous-variété *compacte* de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$ ne contenant pas 0. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on pose $S_c = f^{-1}(\{c\})$.

(a) Pour tout $c > 0$, identifier S_c.

(b) Montrer que $f_{|\Sigma}$, la restriction de f à Σ, admet un minimum et un maximum.

(c) Soit x_0 un point de Σ tel que $f(x_0)$ est extremum local de $f_{|\Sigma}$. Montrer que $T_{x_0}\Sigma = T_{x_0}S_{f(x_0)}$. En déduire que x_0 est perpendiculaire a $T_{x_0}\Sigma$.

(d) Soient $\rho > 0$ et $x_0 \in \Sigma$ tels que $f(x_0) = \rho^2 = max_{x\in\Sigma} f(x)$.

(e) Montrer que $(x_0 + T_{x_0}\Sigma) \cap \Sigma$ (l'intersection de Σ avec le plan affine tangent en x_0 à Σ) est réduite à $\{x_0\}$. Que peut-on en déduire concernant la courbure de Gauss de Σ en x_0 ?

(f) Soit $\gamma :]-1, 1[\to \Sigma$ une courbe lisse telle que $\gamma(0) = x_0$ et $||\gamma'(0)|| = 1$. Montrer que

$$f \circ \gamma(t) = \rho^2 + t^2 \left(1 + \langle \gamma''(0), x_0 \rangle\right) + o(t^2).$$

En déduire que $\langle \gamma''(0), x_0 \rangle \leq -1$.

(g) Soit II_{x_0} la seconde forme fondamentale de Σ au point x_0. Montrer que

$$|II_{x_0}(\gamma'(0), \gamma'(0))| \geq 1/\rho,$$

(on pourra remarquer que la normale unitaire à Σ en x_0 est égale à $\pm\frac{1}{\rho}x_0$).

(h) Montrer que la courbure de Gauss de Σ au point x_0 est supérieure où égale à $1/\rho^2$.