

	ANNEE UNIVERSITAIRE 2014/2015 Parcours : Licence de Mathématiques UE : Géométrie Différentielle (N1MA6011) Date : 18/06/2015 Heure : 14h00 Durée : 3h00 Documents : Non autorisés. Calculatrice : autorisée Epreuve de Mr : Bessières. Sujet : 2 pages	Collège ST
---	--	--

Exercice 1 (Question de cours).

- 1) Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ une courbe lisse régulière. Définir et calculer la courbure algébrique de γ en un point $p = \gamma(t)$.
- 2) Soit $f = f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ lisse.
 - (a) Exprimer df à l'aide de dx, dy, dz .
 - (b) vérifier par le calcul que $d(df) = 0$.

Exercice 2.

On note $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sphère unité centrée en 0 et $N = (0, 0, 1) \in S^2$ son pôle nord. Soit $\pi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la projection stéréographique, qui associe à $X = (x, y, z) \in S^2 \setminus \{N\}$ l'intersection de la droite (NX) avec le plan $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

- 1) Montrer que

$$\pi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

Indication : déterminer $\lambda > 0$ tel que $\pi(X) = N + \lambda \overrightarrow{NX} = (\lambda x, \lambda y, 0)$.

- 2) Montrer que π admet pour réciproque $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ définie par

$$\sigma(u, v) = \frac{1}{u^2 + v^2 + 1} (2u, 2v, u^2 + v^2 - 1)$$

- 3) Montrer que σ est un plongement (immersion + homéomorphisme sur l'image) de $\mathbb{R}^2$ sur $S^2 \setminus \{N\}$.
- 4) Montrer que la première forme fondamentale de σ est

$$(g_{ij})_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{(u^2+v^2+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(u^2+v^2+1)^2} \end{pmatrix}$$

- 5) Calculer la longueur pour g de tout demi-rayon infini $[0, +\infty[\ni t \mapsto (ta, tb) \in \mathbb{R}^2$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Peut-on prévoir le résultat ?

Exercice 3 (Surface de révolution).

On considère une courbe lisse γ contenue dans le plan Oxz de $\mathbb{R}^3$ et donnée par $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) = (f(t), 0, g(t)).$$

On suppose que γ est régulière, est un homéomorphisme sur son image et que $f(t) > 0$ sur $]a, b[$. On définit par rotation de γ autour de l'axe z un ensemble S , dont tout point s'écrit donc

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos(v), f(u) \sin(v), g(u)),$$

où $a < u < b$ et $v \in \mathbb{R}$.

- 1) Si f est constant, quelle figure représente S ? Même question si γ est un cercle.
- 2) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma : U =]a, b[\times]\alpha, \alpha + 2\pi[\rightarrow S$ est un plongement.
- 3) Montrer que la première forme fondamentale de σ sur U est

$$(g_{ij})_{(u,v)} = \begin{pmatrix} f'^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}$$

- 4) (a) Donner une base du plan tangent à S en un point $\sigma(u, v)$.
 (b) Montrer que si γ est paramétrée par longueur d'arc, toute courbe de la forme $t \mapsto \sigma(t, v)$ est une géodésique.
 (c) Montrer que $t \mapsto \sigma(u, t)$ est une géodésique si et seulement si $f'(u) = 0$.
- 5) On suppose que γ est paramétrée par longueur d'arc.
 (a) Calculer l'endomorphisme de Weingarten de σ .
 (b) En déduire que la courbure de Gauss de S satisfait $K = -\frac{f''}{f}$.

Exercice 4. Soit α la 1-forme différentielle dans $\mathbb{R}^3$

$$\alpha = ydx - xdy + dz$$

- 1) La forme α est-elle fermée?
- 2) Soit $u(x, y, z)$ et $v(x, y, z)$ des fonctions de classe C^1 . Trouver les conditions (C) portant sur les dérivées partielles de u et de v pour que

$$\alpha - vdu$$

soit fermée. (Indication : calculer la dérivée extérieure de $\alpha - vdu$, l'exprimer dans une base)

- 3) Montrer que sous les conditions (C), les fonctions u et v sont indépendantes de z .
- 4) Donner un exemple de fonctions u et v tel que $\alpha - vdu$ soit fermée.