université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2013/2014** **SESSION 2 PRINTEMPS** **Licence de Mathématiques** **Examen de Géométrie et Topologie (N1MA6014)** **Date : ? ?/06/2014 Heure : ? ?h ? ? Durée : 3h00** Documents : Non autorisés. Calculette homologuée : autorisée Epreuve de Mr : Bessières. Longueur du sujet : 2 pages		Département DL Licence

Exercice 1.

Soit X, Y des espaces topologiques, soit $p : X \to Y$ une application *surjective*. On dit que p est une application **quotient** si, pour toute partie U de Y, U est ouvert dans Y si et seulement si $p^{-1}(U)$ est ouvert dans X.

(1) Montrer que p est une application quotient si, pour toute partie A de Y, A est fermé dans Y si et seulement si $p^{-1}(A)$ est fermé dans X. (on pourra établir la formule $f^{-1}(Y-B) = X - f^{-1}(B)$).

(2) Montrer qu'une application $f : X \to Y$, continue surjective, qui est ouverte ou fermée, est une application quotient.

(3) Soit $\pi_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la projection sur la première coordonnée. Montrer que π_1 est une application quotient, ouverte mais pas fermée (on pourra considérer la partie $C = \{(x,y) \mid xy = 1\}$).

(4) Soit $f : [0,1] \cup [2,3] \to [0,2]$ définie par $f(x) = x$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = x - 1$ si $x \in [2,3]$. Montrer que f est une application quotient, fermée mais pas ouverte.

(5) On dit qu'une partie $A \subset X$ est **saturée** (par rapport à $p : X \to Y$) si elle contient tout ensemble $p^{-1}(\{y\})$ qu'elle intersecte. Montrer que p est une application quotient si et seulement si p est continue et envoie tout ouvert saturé de X sur un ouvert de Y (ou tout fermé saturé de X sur un fermé de Y).

(6) Soit $C' = \{(x,y) \mid xy = 1\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $q : C' \to \mathbb{R}$ la restriction de π_1 à C'. Montrer que q est continue, surjective mais n'est pas une application quotient.

(7) Soit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ ou } y = 0\}$ et $q : B \to \mathbb{R}$ la restriction de π_1 à B. Montrer que q est une application quotient, ni ouverte ni fermée.

(8) Soit $f : X \to Y$ continue et $g : Y \to X$ continue telle que $f \circ g$ est l'application identité de Y. Montrer que f est une application quotient.

(9) Soit $A \subset X$, $r : X \to A$ une rétraction. Montrer que r est une application quotient.

(10) On suppose que p est une application quotient et soit $f : X \to Z$ telle que $p(x) = p(x') \Rightarrow f(x) = f(x')$.

 (a) Montrer qu'il existe une unique application $\bar{f} : Y \to Z$ telle que $f = \bar{f} \circ p$.

 (b) Montrer que $\bar{f}$ est continue si et seulement si f est continue.

Exercice 2. Quelles sont les surfaces définies par les symboles suivants :

(a) $abacb^{-1}c^{-1}$

(b) $abca^{-1}cb$

(c) $abbca^{-1}ddc^{-1}$

(d) $abcda^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}$

(e) $abcda^{-1}c^{-1}b^{-1}d^{-1}$

(f) $aabcdc^{-1}b^{-1}d^{-1}$

(g) $abcdabdc$

(h) $abcdabcd$.

Exercice 3. Calculer le groupe fondamental des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants (on commencera par les dessiner) :

(a) $\{x \mid ||x|| > 1\}$

(b) $\{x \mid ||x|| \geq 1\}$

(c) $\{x \mid ||x|| < 1\}$

(d) $S^1 \cup \mathbb{R}^+ \times \{0\}$

(e) $S^1 \cup \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

(f) $\mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$.

Exercice 4. Soit $p : E \to B$ un revêtement, soit $p(e_0) = p_0$.

(a) Montrer que le morphisme
$$p_* : \Pi_1(E, e_0) \longrightarrow \Pi_1(B, b_0)$$
est injectif.

On note $H = p_*(\Pi_1(E, e_0)) \subset \Pi_1(B, b_0)$ le sous-groupe image.

(b) Soit γ un lacet de B en b_0. Montrer que $[\gamma] \in H$ si et seulement si γ se relève en un lacet de E en e_0.