UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2013/2014** **SESSION 1 PRINTEMPS** **Licence de Mathématiques** **Examen de Systèmes dynamiques (K1MA6021)** **Date : 06/05/2014 Heure : 14h00 Durée : 3h00** Documents : Non autorisés. Calculette homologuée : autorisée Epreuve de Mr : Bessières. Longueur du sujet : 2 pages	Département Licence

Exercice 1 (Autour du cours). (1) Donner la définition d'un système différentiel linéaire et énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour un tel système.

(2) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice admettant $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ une valeur complexe non réelle ($b \neq 0$) et $W \in \mathbb{C}^2$ un vecteur propre associé. Montrer que $Z(t) = e^{\lambda t}W$ est solution du système $X' = AX$ et en déduire deux solutions réelles du système.

(3) Donner la définition d'un point stationaire asymptotiquement stable. Donner une condition nécessaire pour qu'un point stationnaire d'un système différentiel soit asymptotiquement stable.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$x' = ax - bx^2 + c, \tag{1}$$

où a, b, c sont des paramètres réels > 0.

(1) C'est une modification de la loi logistique. Que peut représenter le terme $+c$?

(2) Montrer que si l'on pose $y = \frac{b}{a}x$ et $h = \frac{b}{a}c$, l'équation (1) équivaut à

$$y' = ay(1 - y) + h, \tag{2}$$

(3) Montrer que l'équation (2) a exactement 2 points stationnaires $\alpha < 0 < \beta$.

(4) Déterminer le signe de y' en fonction de y.

(5) Soit (J, y) une solution maximale de l'équation (2) telle que $y(0) > \alpha$. Justifier que $y(t)$ tend vers β quand $t \to \infty$.
($\textit{Indication : distinguer les cas } y(0) < \beta \textit{ et } y(0) > \beta \textit{ et montrer que } y(t) < \beta, \textit{ resp. } y(t) > \beta$)

Exercice 3. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer les solutions du système différentiel $X' = AX$ et tracer soigneusement son portrait de phase. Quelle est la nature du point stationnaire $(0,0)$?

Soit $F(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2^2 + x_2, -x_1 + 3x_2 + x_1^3)$. On considère le système différentiel $X' = F(X)$.

(2) Montrer que $(0,0)$ est un point stationnaire du système $X' = F(X)$ et écrire le système linéarisé correspondant. Que peux-t'on en déduire quand à la stabilité de $(0,0)$ pour le système $Y' = F(Y)$ et quand au comportement des solutions au voisinage de $(0,0)$?

Exercice 4. On considère le système différentiel

$$(S) = \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 2y(z-1) \\ y' & = & -x(z-1) \\ z' & = & -z^3 \end{array} \right.$$

(1) Montrer que $0 = (0,0,0)$ est l'unique point stationnaire du système (S).

(2) Calculer la matrice jacobienne de $F(x,y,z) = (2y(z-1), -x(z-1), -z^3)$ et vérifier qu'en 0 elle est égale à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Déterminer les valeurs propres de A.

(4) Tracer soigneusement le portrait de phase du système $X' = AX$.

(5) Que peut-on en conclure qu'en à la stabilité du point 0 pour le système $X' = AX$? pour le système (S) ?

On considère la fonction $V(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, où $a, b, c > 0$.

(6) Déterminer des paramètres a, b, c tels que si $(x(t), y(t, z(t))$ est solution de (S), alors

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t), z(t)) \leq 0$$

pour tout t.

(7) En remarquant que $\sqrt{V}$ est une norme, que peut-on en déduire qu'en à la stabilité du point 0 pour le système (S) ?