université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2014/2015** **Parcours :** Licence de Mathématiques **UE :** Géométrie Différentielle (N1MA6011) **Date :** 25/04/2016 **Heure :** 14h00 **Durée :** 3h00 **Documents :** Non autorisés. **Calculette :** autorisée **Epreuve de Mr :** Bessières. **Sujet :** 3 pages	**Collège ST**

Exercice 1 (Questions de cours)**.**

(1) Soit (J, g) une courbe de $\mathbb{R}^2$ paramétrée par longueur d'arc, $\theta : J \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ telle que $g' = e^{i\theta}$. Rappeler et démontrer la relation entre θ et la courbure algébrique de g.

(2) Soit (U, f) une paramétrisation d'une surface $S \subset \mathbb{R}^3$, et $G = (g_{ij})$ la première forme fondamentale de S dans (U, f). Soit $\phi : V \to U$ un difféomorphisme. Montrer que la première forme fondamentale de S dans $(V, f \circ \phi)$, est donnée en $x \in V$ par la matrice $({}^t J_x\phi) G_{\phi(x)} J_x\phi$, où $J_x\phi$ est la matrice jacobienne de ϕ en x.

(3) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

(a) Rappeler les définitions de formes différentielles exactes, resp. fermées, sur U.

(b) Démontrer en considérant la forme $\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ que ces notions ne coincident pas toujours.

(c) Sous quelle hypothèse topologique supplémentaire sur U ces notions coincident ?

Exercice 2. On considère la courbe $t \in \mathbb{R} \to f(t) = (a\cos(t), b\sin(t)) \in \mathbb{R}^2$, où $0 < a < b$.

(1) Montrer que f est régulière.

(2) Calculer la courbure algébrique $k(t)$ de f.

(3) Montrer qu'il existe exactement 4 points (modulo 2π) où $k'(t) = 0$. Dessinez-les.

Exercice 3 (Surfaces de révolution localement plates)**.** On considère une fonction $\rho : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ strictement positive et C^∞. On définit $f : \mathbb{R} \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ par

$$f(\theta, z) = (\cos(\theta)\rho(z), \sin(\theta)\rho(z), z).$$

On pose $U = \mathbb{R} \times]-1, 1[$ et $S = f(U)$.

(1) Montrer que $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - \rho^2(z) = 0 \text{ et } -1 < z < 1\}$.

(2) Montrer que S est une surface C^∞.

Dans la suite, on admet que f restreinte à $U_{\theta_0} =]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[\times]-1, 1[$ est une paramétrisation sur son image, pour tout $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

(3) Calculer la première forme fondamentale de S dans (U_{θ_0}, f).

(4) En déduire que l'aire de S vaut $2\pi \int_{-1}^{1} \rho(t)\sqrt{1 + \rho'(t)^2}\, dt$.

(5) Calculer l'endomorphisme de Weingarten de S.

(6) En déduire que la courbure de Gauss est nulle si et seulement si $\rho'' = 0$. En déduire une condition nécessaire sur ρ pour que S soit localement isométrique à $\mathbb{R}^2$.

(7) On suppose que $\rho'' = 0$, i.e. $\rho(z) = az + b$ pour certains réels a, b.

(a) Dessiner S (distinguer les cas $a = 0$, $a \neq 0$).

(b) On effectue le changement de variable local

$$(\theta, z) = \phi(\beta, r) := \left(\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\beta,\ \frac{1}{a}\left[\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} r - b \right] \right).$$

Montrer que la première forme fondamentale de S pour la paramétrisation locale $f \circ \phi$ est

$$\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) On effectue un nouveau changement de variable $(\beta, r) = \psi(x, y)$, tel que $x = r\cos(\beta)$ et $y = r\sin(\beta)$. Montrer que la première forme fondamentale de S pour la paramétrisation locale $f \circ \phi \circ \psi$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Que peut-on en conclure quant à la géométrie de S ?

Exercice 4 (Variation de courbes)**.** Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface C^∞ paramétrée par $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$. On rappelle que la longueur d'une courbe $c : [0, \ell] \to S$ est $L(c) = \int_0^\ell \langle c'(t), c'(t) \rangle^{1/2}\, dt$. Une *variation de* c est une famille $(c_s)_{s \in]-\epsilon, \epsilon[}$, de courbes tracées sur S, c'est-à-dire que pour chaque s,

$$c_s : t \in [0, \ell] \to c_s(t) \in S$$

est une courbe sur S, qui satisfait les 3 propriétés suivantes :

— $c_0 = c$.

— pour tout s, $c_s(0) = c(0)$ et $c_s(\ell) = c(\ell)$ (les extrémités sont celles de c).

— $(s, t) \mapsto c_s(t)$ est C^∞.

On se propose de montrer que :

$$(*) \qquad \frac{d}{ds}_{|s=0} L(c_s) = 0 \text{ pour toute variation } (c_s) \text{ de } c \quad \Longleftrightarrow \quad c \text{ est une géodésique.}$$

On rappelle que c est une géodésique si $c''_T = 0$, où c''_T est le projeté orthogonal de c'' sur l'espace tangent.

Soit $c : [0, \ell] \to S$ paramétrée par longueur d'arc et (c_s) une variation de c. On note $\frac{\partial c_s}{\partial s}$ la dérivée partielle par rapport à s. C'est aussi le vecteur vitesse de la courbe $s \mapsto c_s(t)$ (à t fixé).

(1) Montrer que $\frac{\partial c_s}{\partial s}_{|s=0}(t) \in T_{c(t)}S$ et que $\frac{\partial c_s}{\partial s}_{|s=0}(0) = 0 = \frac{\partial c_s}{\partial s}_{|s=0}(\ell)$. Montrer que

$$\langle \frac{\partial c_s}{\partial s}_{|s=0}, c'' \rangle = \langle \frac{\partial c_s}{\partial s}_{|s=0}, c''_T \rangle.$$

(2) Montrer que

$$\frac{d}{ds}_{|s=0} L(c_s) = -\int_0^\ell \langle \frac{\partial c_s(t)}{\partial s}_{|s=0}, c''(t)\rangle \, dt.$$

(*Question difficile hors barême (Bonus). Indication : dériver* $\int_0^\ell \langle c_s'(t), c_s'(t)\rangle^{1/2} \, dt$ *sous l'intégrale, utiliser le lemme de Schwarz, le fait que* c *est paramétrée par longueur d'arc...*)

(3) En déduire l'implication $\Longleftarrow$ de $(*)$.

(4) On note $X : [0,\ell] \to \mathbb{R}^3$ l'application $X(t) = \alpha(t) c_T''(t)$, où $\alpha : [0,\ell] \to \mathbb{R}$ est C^∞ et vérifie $\alpha(0) = 0 = \alpha(\ell)$.

(a) Justifier qu'il existe deux fonctions $a(t)$, $b(t)$ C^∞ uniques telles que

$$X(t) = a(t)\frac{\partial f}{\partial u} + b(t)\frac{\partial f}{\partial v}.$$

(b) On écrit c sous la forme $c(t) = f(u(t), v(t))$, pour des fonctions $u(t), v(t)$ de classe C^∞, et on pose pour s voisin de 0,

$$c_s(t) := f(u(t) + sa(t), v(t) + sb(t)).$$

i) Montrer que (c_s) est une variation de c.

ii) Montrer que $\frac{\partial c_s}{\partial s}_{|s=0} = X$

(5) On choisit α strictement positive sur $]0,\ell[$. Déduire de (2) l'implication $\Longrightarrow$ de $(*)$.

(6) En déduire que si $L(\gamma) \geq L(c)$ pour toute courbe $\gamma : [0,\ell] \to S$ joignant $c(0)$ à $c(L)$, alors c est une géodésique.