UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2013/2014** **Licence de Mathématiques** **Examen de Géométrie Différentielle (N1MA6011)** **Date : 06/05/2013 Heure : 14h00 Durée : 3h** Documents : Non autorisés. Calculette homologuée : autorisée Epreuve de Mr : Bessières. Sujet : 2 pages	Département DL Licence

Exercice 1 (Questions de cours)**.**

(a) Démontrer les relations de Frenet, satisfaites par une courbe bi-régulière de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par longueur d'arc.

(b) Soit M une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^n$ de dimension d et soit $a \in M$. Rappeler la définition et les propriétés de l'espace tangent à M en un point donné. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^d \to M$ une paramétrisation, justifier que $\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_d}\}$ est en chaque point une base de l'espace tangent.

(c) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une paramétrisation d'une surface Σ. Montrer que la matrice (g_{ij}) de la première forme fondamentale associée à f vérifie $(g_{ij})_{(u,v)} = {}^t J_{(u,v)} f \cdot J_{(u,v)} f$, où $J_{(u,v)} f$ est la matrice jacobienne de f. Montrer que pour tout domaine $D \subset \Sigma$, la quantité

$$\int_{f^{-1}(D)} \sqrt{\det(g_{ij})} du dv$$

est indépendante de la paramétrisation.

Exercice 2.

Soit $U = \mathbb{R} \times (0, 2)$ et $f : U \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(\theta, t) = (t\cos(\theta), t\sin(\theta), \theta)$.

(a) Rappeler la définition d'une paramétrisation et montrer que f paramétrise une surface $\Sigma = f(U)$.

(b) Déterminer l'espace tangent à Σ en $f(0, 1)$.

(c) Calculer l'endomorphisme de Weingarten de Σ.

(d) Donner courbures principales, courbure de Gauss et courbures moyennes de Σ.

(e) Montrer que $t \mapsto f(\theta, t)$ est une géodésique.

(f) Calculer première et seconde forme fondamentale. Vérifier que le résultat est cohérent avec celui de la question (c).

Exercice 3.
On considère $M_n(\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille n, identifié à $\mathbb{R}^{n^2}$. On note $S_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel constitué des matrices symétriques, aussi identifié à un espace $\mathbb{R}^p$. On définit $f : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ par $f(A) = {}^tAA$.

(a) Montrer que f est lisse de différentielle $d_Af : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ où

$$d_Af(X) = {}^tAX + {}^tXA$$

(b) Soit $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tAA = I_n\}$, l'ensemble des matrices orthogonales (I_n est la matrice identité). Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $X = \frac{1}{2}AS$, montrer que $d_Af(X) = S$. En déduire que $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$, de dimension à déterminer en fonction de n.

(c) Montrer que l'espace tangent à $O_n(\mathbb{R})$ en I_n est $\{X \in M_n(\mathbb{R}); {}^tX = -X\}$.

Exercice 4. Soit S une surface connexe de $\mathbb{R}^3$ dont tous les points sont des *ombilics*, c'est-à-dire que en tout point les deux courbures principales sont égales. On va montrer que S est une portion de plan ou une portion de sphère.

(a) Soit ϕ une paramétrisation de S par des variables (u, v). Montrer que $\frac{\partial \phi}{\partial u}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial v}$ sont directions principales et en déduire la matrice de l'endomorphisme de Weingarten dans la base $\{\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}\}$.

(b) Montrer que la courbure de Gauss est constante sur la surface. (Indication : calculer $\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \nu}{\partial v}$ et $\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \nu}{\partial u}$, où $\nu(u, v) = N \circ \phi(u, v)$, N l'application de Gauss).

(c) On suppose que cette constante est nulle. Montrer qu'alors la surface est incluse dans un plan.

(d) Si on suppose que cette constante K n'est pas nulle, montrer qu'alors la surface est incluse dans une sphère de rayon $1/K$.