	ANNEE UNIVERSITAIRE 2014/2015	
université de BORDEAUX	**Parcours :** Licence de Mathématiques **UE :** Géométrie Différentielle (N1MA6011) **Date :** 4/05/2015 **Heure :** 14h00 **Durée :** 3h00 **Documents :** Non autorisés. **Calculette :** autorisée **Epreuve de Mr :** Bessières. **Sujet :** 2 pages	**Collège ST**

Exercice 1 (Question de cours)**.**

1) (a) Définir submersion et immersion.

   (b) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lisse. Montrer que $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ définie par $g(x, y) = y - f(x)$ est une submersion. Montrer que $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ définie par $h(x) = (x, f(x))$ est une immersion.

2) Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface lisse.

   (a) Définir la seconde forme fondamentale II de Σ.

   (b) Montrer que la courbure K d'une courbe régulière $c \subset \Sigma$ paramétrée par longueur d'arc satisfait
$$K \geq |II(c', c')|$$

3) Soit T un k-tenseur sur un espace vectoriel E et σ une permutation de $\{1, \ldots, k\}$. On note ${}^\sigma T$ le k-tenseur défini par
$${}^\sigma T(v_1, \ldots, v_k) = T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$$
Montrer que ${}^{\sigma \circ \alpha} T = {}^\sigma({}^\alpha T)$. En déduire que T est alterné si et seulement si ${}^\sigma T = \varepsilon(\sigma) T$ pour toute permutation σ. ($\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature).

Exercice 2.

Soit $\alpha \in \Omega(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ définie par $\alpha(x, y) = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2)$.

(1) Vérifier que α est fermée.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière de classe C^2 paramétrée par longueur d'arc.

(2) Expliciter $\gamma'^* \alpha$ sous la forme $f(t)dt$ ($t \in I$). Interpréter géométriquement la fonction $|f|$.

(3) À partir du cas où $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ ($t \in \mathbb{R}$), prouver que α n'est pas exacte.

(4) On considère la carte polaire
$$\Phi :]0, \infty[\times] - \pi, \pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus (] - \infty, 0] \times \{0\}), \quad \Phi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$
Exprimer $\Phi^*(\alpha)$.

Exercice 3.
Soit $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ une courbe lisse, régulière, paramétrée par longueur d'arc, injective. On note U l'ouvert $]-1,1[\times\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ et on définit

$$h : U \to \mathbb{R}^3, \quad h(u,v) = (\gamma(u), v).$$

1) Montrer que h est un plongement (indication : montrer que γ est un homéomorphisme de l'intervalle fermé $[-1,1]$ sur son image). On note $\Sigma = h(U)$ la surface paramétrée par h.
2) Donner une base du plan tangent en un point quelconque. Montrer que toute courbe dans Σ de la forme
$$t \mapsto h(at+b, ct+d), \qquad (a,b,c,d \in \mathbb{R})$$
est une géodésique.
3) Démontrer que toute géodésique de Σ est de cette forme (on pourra écrire une géodésique $c(t) = h(u(t), v(t))$ et montrer que $u'' = v'' = 0$).
4) Donner une autre preuve de 3) sans calculs, en utilisant un résultat du cours.
5) Calculer la première forme fondamentale de Σ. Est-ce cohérent avec la question précédente ?
6) Calculer l'endomorphisme de Weingarten de Σ (on prendra l'application de Gauss orientée comme $\partial_u h \wedge \partial_v h$). Peut-on interpréter les courbures principales comme des courbures de courbes de Σ ?

Exercice 4. On se propose de montrer un théorème d'Archimède : *Si une sphère S^2 est placée dans un cylindre vertical de rayon 1, la projection horizontale radiale (de centre l'axe z) de S^2 sur le cylindre préserve l'aire.*

On paramètre une partie de S^2 par $h_1 : V \to U_1 \subset S^2$, où $V =]0,\pi[\times]0,2\pi[\subset \mathbb{R}^2$ et

$$h_1(u,v) = (\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), \cos(u)).$$

On note p la projection horizontale radiale d'axe z qui envoie (x,y,z), où $(x,y) \neq (0,0)$, sur l'unique $(\lambda x, \lambda y, z) \in S^1 \times \mathbb{R}$ tel que $\lambda > 0$.

1) (a) Calculer p.
   (b) Montrer que p est un homéomorphisme de $S^2 \setminus \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$ sur $S^1\times]-1,1[=: C$ (on pourra déterminer p^{-1} entre ces espaces).
   (c) Montrer que $U_2 := p(U_1)$ est le complémentaire dans C de la droite $\{x=1, y=0\}$.
2) On pose $h_2 = p \circ h_1 : V \to U_2 \subset C$. Montrer que
$$h_2(u,v) = (\cos(v), \sin(v), \cos(u))$$
et que h_2 est une paramétrisation de U_2 (on admet que h_1 est une paramétrisation de U_1).
3) Calculer les premières formes fondamentales des paramétrisations h_1 et h_2.
4) En déduire que p préserve l'aire des domaines $\subset U_1$ (c'est-à-dire $Aire(A) = Aire(p(A))$ si $A \subset U_1$). Conclure.