université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2013/2014** **SESSION 2 PRINTEMPS** **Licence de Mathématiques** **Examen de Systèmes dynamiques (K1MA6021)** **Date : ? ?/06/2014 Heure : ? ?h00 Durée : 3h00** Documents : Non autorisés. Calculette homologuée : autorisée Epreuve de Mr : Bessières. Longueur du sujet : 2 pages	Département Licence

Exercice 1. (Autour du cours)

(1) Equation logistique.
  (a) Donner sa définition.
  (b) Quels sont ses points d'équilibre et quel est leur nature ?
  (c) Tracer le portrait de phase des solutions.

(2) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$, et V_1, V_2 deux vecteurs propres associés.
  (a) Démontrer que $\{V_1, V_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
  (b) Soit $V \in \mathbb{R}^2$. Exprimer la solution de ($X' = AX$, $X(0) = V$), en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, V_1, V_2$ et des coordonnées de V dans la base $\{V_1, V_2\}$. On justifiera la réponse.
  (c) On suppose que $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Tracer le portrait de phase des solutions.

Exercice 2. On consid l'ation $y' = y - y^2$.

(a) Justifier sans calcul que pour toute donnée initiale $0 < y_0 < 1$, elle admet une unique solution $y(t)$ définie sur $\mathbb{R}$ telle que $y(0) = y_0$.
(b) Calculer $y(t)$ en fonction de y_0.
(c) On suppose que $y_0 = 0.1$. Sur quel intervalle aura t'on $y(t) \geq 0.9$?

Exercice 3. Pour chacune des matrices $M = A, B, C, D, E$ suivantes,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

on considère le système différentiel $X' = MX$. Pour chaque matrice, dessinez soigneusement le portrait de phase du système (on précisera les axes) et déterminez les vecteurs V pour lesquels, lorsque $X(0) = V$, $X(t)$ tend vers 0 quand $t \to \infty$.

Exercice 4. On considère des systèmes différentiels dans $\mathbb{R}^3$:

(1) Déterminer la solution générale du système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y+z \\ y' & = & z \\ z' & = & 0 \end{array}\right.$$

de deux manières différententes :

(a) à l'aide d'exponentielles de matrice,

(b) en résolvant les équations une par une.

(2) Mêmes questions pour le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -2x \\ y' & = & x-2y \\ z' & = & y-2z \end{array}\right.$$

Exercice 5. On considère le système différentiel

$$(S) = \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -2x^3 - y^4 \\ y' & = & -y^3 - x^4 \end{array}\right.$$

(a) Calculer le linéarisé du système en (x, y) puis en $(0, 0)$. Que peut-on en déduire quand au comportement des solutions de (S) au voisinage de $(0, 0)$?

(b) Montrer que, dans un voisinage de $(0, 0)$, la fonction $V(x, y) = x^2 + y^2$ est une fonction de Lyapounov stricte. Que peut-on en déduire quand au comportement des solutions de (S) au voisinage de $(0, 0)$?