UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2013/2014** **SESSION 1 PRINTEMPS** **Licence de Mathématiques** **Examen de Géométrie et Topologie (N1MA6014)** **Date : 06/05/2014 Heure : 8h30 Durée : 3h00** Documents : Non autorisés. Calculette homologuée : autorisée Epreuve de Mr : Bessières. Longueur du sujet : 2 pages	Département Licence

Exercice 1.
Justifier succintement que

(a) $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ ne sont pas homéomorphes si $n > 1$.

(b) $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$ ne sont pas homéomorphes si $n > 2$.

Exercice 2.
Déterminer les groupes fondamentaux de

(a) $\mathbb{R}^3$ privé d'une droite,

(b) l'union de 2 copies de S^2 avec un point en commun,

(c) S^2 privé de 2 points.

Exercice 3.
Si σ est un symbole pair, $X(\sigma)$ désigne la classe d'homéomorphie des surfaces obtenues en quotientant un polygone selon la relation définie par le symbole.

(a) Soit $aBa^{-1}C$ un symbole pair, où B et C sont des symboles pairs de support disjoint. Montrer que $X(aBa^{-1}C) = X(BC)$.

(b) Soit σ un symbole pair de longueur 10 où chaque lettre apparait une fois avec l'indice $+1$ et une fois avec l'indice -1. Déterminer toutes les surfaces $X(\sigma)$ possibles.

(c) Déterminer les surfaces correspondant aux symboles suivants

i) $aba^{-1}cb^{-1}c^{-1}$

ii) $abcacb$

iii) $abca^{-1}bc$

iv) $abcdabcd$

Exercice 4.
Soit X, Y deux espaces topologiques avec X séparé. Soit $p : X \to Y$ continue ouverte avec $k \in \mathbb{N}^*$ un entier tel que $p^{-1}(y)$ a k éléments pour tout $y \in Y$. Montrer que p est un revêtement.

Exercice 5.

(a) On définit une relation d'équivalence sur $X = \mathbb{R}^2$ par

$$(x, y) \sim (x', y') \text{ si } x + y^3 = x' + y'^3.$$

Soit X_* l'espace quotient. A quel espace familier est-il homéomorphe ? (indication : considérer $f(x, y) = x + y^3$).

(b) Même question pour la relation

$$(x, y) \sim (x', y') \text{ si } x^2 + 2y^2 = x'^2 + 2y'^2.$$

Exercice 6.
Soit X un espace topologique et $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie non vide. Soit $h : A \to X$ continue, $a \in A$ et $x_0 = h(a) \in X$. On suppose que h s'étend en $H : \mathbb{R}^n \to X$ continue. Montrer que h_* est le morphisme trivial, c'est-à-dire qui envoie tout le groupe fondamental $\Pi_1(A, a)$ sur l'élément identité de $\Pi_1(X, x_0)$.

Exercice 7 (Preuve de d'Alembert-Gauss)**.** Soit $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ un polynome sur $\mathbb{C}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. On se propose de montrer que P admet une racine. Raisonnant par contradiction, on suppose que $P(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

(a) Montrer que $h : S^1 \times]0, 1[\to S^1$ définie par $h(z, t) = \dfrac{P(z\frac{1-t}{t})}{|P(z\frac{1-t}{t})|}$ s'étend en $H : S^1 \times [0, 1] \to S^1$ continue.

(b) Evaluer $H(\cdot, 0)$ et $H(\cdot, 1)$ et conclure.