

	ANNEE UNIVERSITAIRE 2012/2013 SESSION 1 PRINTEMPS Licence de Mathématiques Examen de Géométrie Différentielle (N1MA6011) Date : 30/04/2013 Heure : 14 h Durée : 3h00 Documents : Non autorisés. Calculatrice homologuée : autorisée Epreuve de Mr : Bessières. Sujet : 3 pages	
---	--	---

Exercice 1. Questions de cours

- (1) Soit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une submersion, $M = g^{-1}(0)$ et $a \in M$. Rappeler la définition de l'espace tangent vectoriel $T_a M$ à M en a ; quelle est sa dimension ? Démontrer que

$$T_a M = \nabla_a g^\perp,$$

où $\nabla_a g$ désigne le gradient de g en a .

- (2) Donner la définition d'une géodésique sur une surface $\subset \mathbb{R}^3$ et expliquer pourquoi elle est nécessairement paramétrée à vitesse constante. Montrer que les grands cercles de S^2 , paramétrés à vitesse constante, sont des géodésiques.

- (3) Soit (U, f) une paramétrisation d'une surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ telle que

$$(g_{ij})_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^2(u,v) \end{pmatrix}.$$

- (a) Exprimer la longueur de $c = f \circ x$, où $x(s) = (u(s), v(s))$ est définie sur $[0, 1]$, en fonction de u, v, h .
- (b) On suppose que $v(0) = v(1)$, montrer que le chemin le plus court de $c(0)$ à $c(1)$ est l'image par f de $t \mapsto ((1-t)u(0) + tu(1), v(0))$.

Exercice 2. On considère les deux équations ($a \neq 0, b \neq 0$)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= ax, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= by, \end{aligned}$$

- (a) Montrer que chacune définit une surface dans $\mathbb{R}^3$.
- (b) Montrer que ces surfaces s'intersectent orthogonalement (i.e. leurs plans tangents vectoriels en un point commun s'intersectent orthogonalement).

Exercice 3. Soit $c(s) = (\rho(s), 0, z(s)) \in \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée par longueur d'arc sur $[0, \ell]$, $\ell > 0$, plongée, telle que $\rho > 0$. Soit $U =]0, 2\pi[\times]0, \ell[$, on pose

$$f(u, s) = (\cos(u)\rho(s), \sin(u)\rho(s), z(s)), \quad (u, s) \in U.$$

(a) Montrer que f est une immersion.

On admet que (U, f) est la paramétrisation de $\Sigma = f(U)$ une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$.

(b) Calculer l'expression de la première forme fondamentale de Σ dans (U, f) ,

(c) Montrer que l'aire de Σ est

$$2\pi \int_0^\ell \rho(s) ds.$$

Exercice 4 (Courbes sur une surface). Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface, munie d'une application de Gauss $N : \Sigma \rightarrow S^2$. Soit $c : I \rightarrow \Sigma$ une courbe régulière paramétrée par longueur d'arc. On note L l'endomorphisme de Weingarten, défini en $p \in \Sigma$ par $L_p = -d_p N : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$, et II la seconde forme fondamentale. On note $N(s) = (N \circ c)(s)$ et $c' = \frac{dc}{ds}$.

Le repère de Darboux le long de c est le repère orthonormé direct $(E_1, E_2, E_3)(s)$ tel que

$$E_1 = c', \quad E_3 = N, \quad E_2 = E_3 \wedge E_1.$$

On appelle

$$\begin{aligned} k_g &= \langle E_1', E_2 \rangle && \text{la courbure géodésique} \\ k_N &= \langle E_1', E_3 \rangle && \text{la courbure normale} \\ t_g &= \langle E_3', E_2 \rangle && \text{la torsion géodésique} \end{aligned}$$

(1) (a) Démontrer les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & k_g & k_N \\ -k_g & 0 & -t_g \\ -k_N & t_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

(b) Montrer les relations

$$k_N = II(E_1, E_1) \quad \text{et} \quad t_g = -II(E_1, E_2).$$

(c) Dédurre de (a) et (b) que

- c est une géodésique si et seulement si $k_g \equiv 0$.
- $c'(s)$ est vecteur propre de $L_{c(s)}$ si et seulement si $t_g(s) = 0$.

(2) Soit (v_1, v_2) une base orthonormée de $T_{c(s)}\Sigma$ qui diagonalise $L_{c(s)}$, $k_1 \geq k_2$ ses valeurs propres, et θ l'angle de c' avec v_1 tel que $c' = \cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2$.

(a) Montrer que

$$k_N = k_1 \cos^2(\theta) + k_2 \sin^2(\theta). \quad (1)$$

En déduire que k_1 , resp. k_2 , est le maximum, resp. minimum, de k_N lorsque θ décrit $[0, 2\pi]$.

(b) Montrer que

$$t_g = (k_1 - k_2) \cos(\theta) \sin(\theta). \quad (2)$$

On suppose désormais c de courbure $k = \|c''\| > 0$. On note $(c', \vec{n}, \vec{\beta})$ le repère de Frenet le long de c , où $c'' = k\vec{n}$, et T la torsion usuelle définie par $\vec{\beta}' = T\vec{n}$.

(3) Montrer que si c est une géodésique, $T = t_g$.

(4) Soit α l'angle de $\vec{n}$ avec N , tel que $\vec{n} = \cos(\alpha)N + \sin(\alpha)E_2$. Montrer que

$$\frac{d\alpha}{ds} = T - t_g.$$

(on pourra écrire $\vec{n}$ et β en fonction de (E_2, E_3) et calculer $\langle \vec{n}', \beta \rangle$)

(5) Montrer que sont équivalents :

(i) $k_N(s) = 0$

(ii) le plan osculateur à c en $c(s)$ est égal au plan tangent $T_{c(s)}\Sigma$.

(iii) $k(s) = |k_g(s)|$.

(6) On suppose $k_N \equiv 0$ (on dit que c est *asymptotique*). On note K la courbure de Gauss de Σ .

(a) Justifier que $K \leq 0$ le long de c .

(b) Montrer que $T = t_g$ le long de c .

(c) Calculer l'expression de II dans la base (E_1, E_2) et en déduire que

$$T^2 = -K$$

le long de c .