ANNEE UNIVERSITAIRE 2012/2013
SESSION 1 PRINTEMPS
Licence de Mathématiques
Examen de Géométrie et Topologie (N1MA6014)
Date : 29/04/2013 **Heure : 14 h** **Durée : 3h00**
Documents : Non autorisés. Calculette homologuée : autorisée
Epreuve de Mr : Bessières. Longueur du sujet : 2 pages

Exercice 1. Un espace topologique X est dit contractible si l'application identité $i_X : X \to X$ est homotope à une application constante.

(a) Montrer que $[0,1]$ et $\mathbb{R}$ sont contractibles.

(b) Montrer qu'un espace contractible est connexe par arcs.

(c) Montrer que si Y est contractible, pour tout X, l'ensemble $[X,Y]$ des classes d'homotopies d'application de X dans Y n'a qu'un élément.

(d) Montrer que si X est contractible et Y connexe par arcs, $[X,Y]$ n'a qu'un élément.

Exercice 2. Soit $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^2 \setminus 0$ défini par $(s,t) \mapsto (t\cos(2\pi s), t\sin(2\pi s))$.

(a) Montrer que p est un revêtement.

(b) Trouver les relèvements des chemins suivants (définis pour $t \in [0,1]$) :

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (2-t, 0), \\ \beta(t) &= ((1+t)\cos(2\pi t), (1+t)\sin(2\pi t)), \\ \gamma &= \alpha\beta. \end{aligned}$$

(c) Que peut-on on déduire sur la classe d'homotopie de γ ?

Exercice 3. Soit $p : E \to B$ un revêtement, E, B connexe par arcs.

(a) Montrer que si B est simplement connexe, p est un homéomorphisme.

(b) Supposons que $p^{-1}(b_0)$ ait k éléments pour un certain $b_0 \in B$. Montrer que $p^{-1}(b)$ a k éléments pour tout $b \in B$.

Exercice 4. On considère les applications $g, h : S^1 \to S^1$ définies par $g(z) = z^n$ et $h(z) = 1/z^n$ (S^1 étant considéré dans $\mathbb{C}$). Calculer les morphismes induits g_*, h_* de $\Pi(S^1, x_0)$ dans lui-même. (On pourra utiliser le fait que $p(t) = e^{2i\pi t} : \mathbb{R} \to S^1$ est un revêtement).

Exercice 5. Soit x_0, x_1 deux points d'un espace X connexe par arcs. Etant donné α un chemin de x_0 à x_1, on définit

$$\hat{\alpha} : \Pi(X, x_0) \to \Pi(X, x_1), \quad [\gamma] \mapsto [\alpha^{-1}\gamma\alpha].$$

(a) Montrer que $\hat{\alpha}$ est bien défini et est un isomorphisme.

(b) Montrer que $\Pi(X, x_0)$ est abélien si et seulement si pour tous α, β chemins de x_0 à x_1, $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.

Exercice 6. Quelles sont les surfaces définies par les symboles suivants :

(a) $abacb^{-1}c^{-1}$

(b) $abca^{-1}cb$

(c) $abbca^{-1}ddc^{-1}$

(d) $abcda^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}$

(e) $abcda^{-1}c^{-1}b^{-1}d^{-1}$

(f) $aabcdc^{-1}b^{-1}d^{-1}$

(g) $abcdabdc$

(h) $abcdabcd.$