UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2012/2013** **SESSION 1 PRINTEMPS** **Licence de Mathématiques** **Examen de Systèmes dynamiques (K1MA6021)** **Date : 02/05/2013 Heure : 8h30 Durée : 3h00** Documents : Non autorisés. Calculette homologuée : autorisée Epreuve de Mr : Bessières. Longueur du sujet : 2 pages	Département Licence

Exercice 1 (Autour du cours). (1) Enoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour l'équation différentielle $x' = f(x)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; donner un exemple d'équation différentielle où il n'y a pas unicité des solutions.

(2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $X' = AX$ est un espace vectoriel, de dimension n.

(3) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.
   (a) Donner la définition de la matrice e^A. Si $AB = BA$, que vaut e^{A+B} ?
   (b) Calculer l'exponentielle des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(4) Donner la définition d'un point d'équilibre hyperbolique d'un système $X' = f(X)$; un point d'équilibre hyperbolique peut-il être stable sans être asymptotiquement stable ? Justifier la réponse.

(5) Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et X une solution de $X' = f(X)$ définie sur un intervalle maximal $]\alpha, a[$, avec $a < \infty$. Que peut-on dire du comportement de $X(t)$ lorsque $t \to a$? Enoncer précisément le résultat et illustrer le par un exemple.

(6) Donner la définition d'une fonction de Lyapounov.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$x' = ax - bx^2 - c, \tag{1}$$

où a, b, c sont des paramètres réels > 0. C'est une modification de la loi logistique où le terme $-c$ peut réprésenter un prélèvement ou une récolte, de valeur constante, effectuée sur la population.

(1) Montrer que si l'on pose $y = \frac{b}{a}x$ et $h = \frac{b}{a}c$, l'équation (1) équivaut à

$$y' = ay(1-y) - h, \tag{2}$$

(2) Déterminez les valeurs de h, en fonction de a, pour lesquelles l'équation (2) a 2 points d'équilibres, 1 point d'équilibre ou 0 point d'équilibre. Tracer la ligne de phase dans chaque situation.

On suppose désormais que (2) a deux points d'équilibre $\alpha < \beta$ et que $y(0) > \alpha$.

(3) Montrer que $y(t)$ est monotone et bornée pour $t \geq 0$. En déduire que $y(t)$ est définie sur $[0, +\infty[$ et converge vers β quand $t \to \infty$.

(4) Montrer que $y(t)$ satisfait la relation

$$\frac{y-\beta}{y-\alpha}(t) = \frac{y-\beta}{y-\alpha}(0)e^{(\beta-\alpha)t} \tag{3}$$

(on pourra partir de $y' = -(y-\alpha)(y-\beta)$)

(5) Déduire de (3) une expression de $y(t)$.

Exercice 3. On considère les matrices

$$i) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad ii) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$iii) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad iv) \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour chaque système $X' = AX$ associé,

i. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A (éventuellement complexes).
ii. Déterminez la matrice P telle que $P^{-1}AP$ l'une des matrices soit de Jordan.
iii. Déterminez le portrait de phase de $Y' = P^{-1}APY$ puis de $X' = AX$, en précisant soigneusement les axes utilisés.

Exercice 4. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer les solutions réelles maximales du système différentiel $Y' = AY$. Tracer rapidement le portrait de phase du système. Quelle est la nature du point d'équilibre $(0,0)$ pour A ?

Soit $F(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2^2, -2x_2 + x_1^3)$. On considère le système différentiel $Y' = F(Y)$.

(2) Montrer que $(0,0)$ est un point d'équilibre du système et écrire le système linéarisé correspondant. Que peut-on en déduire quand à la stabilité de $(0,0)$ pour le système $Y' = f(Y)$? Enconcer clairement le résultat utilisé.

Soit $B \in M_2(\mathbb{R})$ la matrice définie par $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) Déterminer les solutions réelles maximales du système différentiel $Y' = BY$. Tracer rapidement le portrait de phase du système. Quelle est la nature du point d'équilibre $(0,0)$ pour

A ?

Soit $G(x_1, x_2) = (-x_2 - x_1 x_2^2 - x_1^3, x_1 - x_2 x_1^2 - x_2^3)$. On considère le système différentiel $Y' = G(Y)$.

(4) (a) Montrer que $(0, 0)$ est un point d'équilibre du système et écrire le système linéarisé correspondant.

(b) A l'aide de la fonction $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, étudier la stabilité de $(0, 0)$ pour G.