Liste d'exercices

La question de cours de l'examen posera des questions parmi les suivantes.

E désigne un espace euclidien de dimension n, e une base quelconque, $G \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice de Gram du produit scalaire dans la base e (i.e. la matrice de la forme bilinéaire), $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E et f^* l'endomorphisme adjoint de f. On définit $A = M(f)_{e \to e}$ et $A^* = M(f^*)_{e \to e}$.

Exercice 1. Démontrer les assertions suivantes.

i. Soit $F \subset E$ un sous espace vectoriel, et $x = y + z \in E = F \oplus F^\perp$. Alors $||x - y'||^2 \geq ||x - y||^2$ pour tout $y' \in F$ avec égalité si et seulement si $y' = y$.

ii. On a $A^* = G^{-1}({}^tA)G$, et f est symétrique si et seulement si ${}^tAG = GA$.

iii. Les endomorphismes $f \circ f^*$ et $f^* \circ f$ sont symétriques et positifs. De plus $f \circ f^*$, resp. $f^* \circ f$, est défini si f^* est injectif, resp. f est injectif.

iv. f est orthogonale si et seulement si ${}^tAGA = G$.

v. f est orthogonale si et seulement si f envoie les bases orthonormées sur les bases orthonormées.

vi. Une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

vii. On note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $S_\theta \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. Alors $R_\theta R_\beta = R_{\theta+\beta}$ et $S_\theta S_\beta = R_{\theta-\beta}$.

Exercice 2. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (justifier)

i. Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$, alors $q(x) = \ell_1(x)\ell_2(x)$ définit une forme quadratique, et q est dégénérée.

ii. Soit q une forme quadratique sur E. La somme de deux vecteurs isotropes de q est un vecteur isotrope, et si $q(x) > 0$ et $q(y) > 0$ alors $q(x + y) > 0$.

iii. La signature de la forme quadratique $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$ de $\mathbb{R}^3$ est $(3, 0)$.