Liste d'exercices n^o 1
(formes bilinéaires, formes quadratiques)

Dans toute la suite, $\mathbf{k}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ des réels ou le corps $\mathbf{C}$ des complexes.

Exercice 1

Les applications ϕ suivantes sont-elles bilinéaires ? Symétriques ?
1. Sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$: $\phi(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$,
2. Sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$: $\phi(x, y) = x_1x_2 + y_1y_2$,
3. Sur $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$: $\phi(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$,
4. Sur $\mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X]$: $\phi(P, Q) = P'(1)Q(0) + P'(0)Q(1)$,
5. Sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}) \times \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$: $\phi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(1 - x)\, dx$,
6. Sur $M_n(\mathbf{R}) \times M_n(\mathbf{R})$: $\phi(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$.

Exercice 2

Soit V un $\mathbf{k}$-espace vectoriel.

1. Soit $\alpha : V \times V \to \mathbf{k}$ une forme bilinéaire qui s'annule sur la diagonale, c'est-à-dire sur tous les couples de la forme (x, x) $(x \in V)$. Prouver que α est antisymétrique ($\alpha(y, x) = -\alpha(x, y)$ pour tout $(x, y) \in V^2$). Que peut-on dire de deux formes bilinéaires b_1 et b_2 sur V qui coïncident sur la diagonale de $V \times V$?

2. Soit $\mathcal{B}(V)$ (resp. $\mathcal{S}(V)$) l'espace des formes bilinéaires (resp. bilinéaires symétriques) sur V. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}(V)$ des formes bilinéaires antisymétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(V)$. Prouver que l'on a une somme directe $\mathcal{B}(V) = \mathcal{S}(V) \oplus \mathcal{A}(V)$. En déduire la dimension de $\mathcal{A}(V)$ quand V est de dimension finie.

Exercice 3

1. Soit V un $\mathbf{k}$-espace vectoriel. Les applications $q : V \to \mathbf{k}$ suivantes sont-elles des formes quadratiques ? Si oui donner la forme polaire associée.
1-a. $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^3$ $(V = \mathbf{R}^2, \mathbf{k} = \mathbf{R})$,
1-b. $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_3$ $(V = \mathbf{R}^3, \mathbf{k} = \mathbf{R})$,
1-c. $q(z_1, z_2, z_3) = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$ $(V = \mathbf{C}^3, \mathbf{k} = \mathbf{C})$,
1-d. $q(z_1, z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2$ $(V = \mathbf{C}^2, \mathbf{k} = \mathbf{C})$,
1-e. $q(A) = \det(A)$ $(V = M_n(\mathbf{k}))$.

2. Soit $P \in \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme. Établir une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction polynôme associée à P soit une forme quadratique sur $\mathbf{k}^n$.

Exercice 4

Soit V un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $\ell \in V^* = \mathcal{L}(V, \mathbf{k})$. Pour $(x, y) \in V^2$ on pose $b(x, y) = \ell(x)\ell(y)$. Vérifier que b est bilinéaire symétrique et déterminer son noyau et son rang.

Exercice 5

Soient ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ définies pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ par
$\ell_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 4x_2 + x_3$,
$\ell_2(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3$,
$\ell_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2$.

Montrer que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base de $(\mathbf{R}^3)^*$ et déterminer sa base duale.

Exercice 6

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n $(n \in \mathbf{N})$.

1. Montrer que la famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$ et déterminer sa base duale.

2. Montrer que la famille $(1, X+1, (X+1)^2)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$ et déterminer sa base duale.

Exercice 7

Soit la forme bilinéaire $\phi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$\phi(x,y) = x_1y_1 - \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{3}{2}x_1y_2 - x_2y_2.$$

1. Écrire la représentation matricielle de ϕ dans la base canonique. ϕ est-elle symétrique ? Décomposer ϕ en somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire anti-symétrique.

2. Écrire la forme quadratique q associée à ϕ. Est-elle positive ? Définie ? Dessiner son cône isotrope.

3. Écrire la forme polaire de q. L'a-t-on déjà vue ? Quel est son rang ? Est-elle dégénérée ?

Exercice 8

On considère sur $V = \mathbf{R}^2$ la forme quadratique $q(x) = (x_1 - x_2)^2$. On note (e_1, e_2) la base canonique et on pose $u_1 = e_1, u_2 = e_1 + e_2$.
Donner la forme polaire ϕ de q et calculer sa représentation dans (u_1, u_2)
(a) par substitution des coordonnées,
(b) en utilisant la formule du changement de base.
Qu'a de particulier la nouvelle base ?

Exercice 9

On considère sur $V = \mathbf{R}^3$ la forme quadratique $q(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$.

1. Est-elle positive ? Définie ?

2. Déterminer la forme polaire ϕ de q et donner la représentation matricielle de ϕ dans la base canonique. Quel est son rang ? Son noyau ? Est-elle dégénérée ?

3. Déterminer un changement de variables tel que la matrice de ϕ soit diagonale dans la base associée. Effectuer le changement de bases de deux manières différentes.

Exercice 10

Sur $V = M_n(\mathbf{k})$ on considère la forme bilinéaire $t(x,y) = \mathrm{Tr}(xy)$ $((x,y) \in V^2)$. Montrer que la famille des matrices élémentaires $\mathcal{E} = (E_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ [définies par $E_{i,j} = (\delta_{\alpha,i}\delta_{\beta,j})_{1 \le \alpha,\beta \le n}$] forme une base de V et déterminer la matrice de t dans la base $\mathcal{E}$.

Exercice 11

Soit $V = \mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\le n$. On considère la forme bilinéaire sur V définie par $\phi(P,Q) = P(1)Q(1)$.

1. ϕ est-elle symétrique ? Positive ? Définie ? Déterminer le noyau et le rang de ϕ.

2. Donner la représentation matricielle de ϕ dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$, puis dans la base $(1, X-1, (X-1)^2, \cdots, (X-1)^n)$ (on vérifiera que ce sont des bases de $\mathbf{R}_n[X]$). Vérifier le rang et le noyau.

3. Soit q la forme quadratique de ϕ. Quel est le cône isotrope de q ? Cela s'explique-t-il ?

Exercice 12

Soit $E = C([0,1], \mathbf{R})$ l'espace vectoriel formé des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. Soit $w : [0,1] \to \mathbf{R}$ continue. On pose

$$\phi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)w^2(t)\ dt$$

1. Vérifier que ϕ est bilinéaire. Est-elle positive ? Définie ?

2. Montrer que ϕ est définie, si on suppose que w s'annule en un nombre fini de points. La condition est-elle nécessaire ?

3. Soit $F = \mathbf{R}[X]$ le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes. ϕ est-elle définie sur F, si on suppose que w n'est pas identiquement nulle (mais peut avoir une infinité de zéros) ?

Exercice 13

Sur $V = \mathbf{R}_n[X]$, on considère

$$q(P) = \int_0^1 P(t)P'(t)\ dt$$

1. Montrer que q est une forme quadratique, qui peut s'écrire comme une différence de carrés de formes linéaires indépendantes.

2. Calculer le noyau, le rang et le cône isotrope de q.

3. Déterminer une base orthogonale pour la forme polaire de q.

Exercice 14

Sur $V = M_n(\mathbf{R})$ on considère la forme bilinéaire $\phi(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$.

1. Quel est le noyau de ϕ ?

2. On note I_n la matrice identité. Quel est son orthogonal pour ϕ ?

Exercice 15

Sur $E = M_2(\mathbf{R})$ on considère la forme quadratique $q(A) = \det(A)$ (voir exercice 3).

1. Donner la forme polaire de ϕ.

2. Déterminer le rang et le cône isotrope de q.

3. Déterminer l'orthogonal $F^\perp$ pour ϕ de $F = \{A \in M_2(\mathbf{R}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$. A-t-on $E = F \oplus F^\perp$?

Exercice 16

Soient E un espace vectoriel et F, G des sous-espaces vectoriels de E. Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E. Montrer que l'orthogonal pour ϕ satisfait les relations suivantes :

1. $(F + G)^\perp = (F^\perp) \cap (G^\perp)$.

2. $(F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp \supset F^\perp \cap G^\perp$. Donner un exemple où l'égalité n'est pas réalisée.