

# MATHÉMATIQUES

---

## Conjecture de Poincaré : la preuve de R. Hamilton et G. Perelman

Laurent Bessières<sup>1</sup>

---

*L'objectif de ce texte est de présenter la preuve de la conjecture de Poincaré proposée par Grisha Perelman, suivant les idées et méthodes de la théorie du flot de Ricci, développée précédemment par Richard Hamilton. On explique au lecteur la théorie du flot de manière non exhaustive mais, j'espère, suffisamment complète pour comprendre le schéma et les ressorts de la preuve de la conjecture. La présentation suit grosso-modo l'histoire des différentes étapes de la théorie du flot de Ricci.*

### 1. Introduction

Dans ce chapitre, on présente brièvement l'histoire de la théorie du flot de Ricci et le schéma de preuve de la conjecture de Poincaré. On tentera dans les chapitres suivants de raconter les épisodes les plus marquants. La conjecture de Poincaré, formulée en 1904 dans [24], s'énonce aujourd'hui de la manière suivante. Rappelons qu'une variété  $M$  est simplement connexe si tout lacet continu  $S^1 \rightarrow M$  est continûment déformable en un point.

**Conjecture 1.1** (Poincaré, 1904). *Soit  $M$  une variété compacte de dimension 3, simplement connexe, alors  $M$  est homéomorphe à la sphère  $S^3$ .*

Cette question, à l'origine purement topologique, s'est révélée extraordinairement difficile et a stimulé les recherches sur la classification des variétés de dimension 3. Depuis les années 70, beaucoup de progrès ont été faits dans la compréhension des liens entre la topologie d'une variété et les géométries qu'elle peut porter. Le Graal poursuivi par les mathématiciens de ce domaine est la conjecture de géométrisation, qui affirme que toute variété compacte de dimension 3 admet une décomposition canonique en morceaux fondamentaux admettant une métrique homogène, c'est-à-dire une métrique telle que deux points quelconques ont des voisinages isométriques (voir l'article de M. Anderson [1] dans un précédent numéro de la Gazette et celui de John Milnor [22]). En dimension 3, il n'y a que 8 métriques homogènes et parmi elles, 3 de courbure sectionnelle constante. Pour les lecteurs peu familiers de la géométrie riemannienne, rappelons que si  $M$  est munie d'une métrique riemannienne  $g$ , c'est-à-dire de la donnée en chaque point  $x$  de  $M$  d'un produit scalaire  $g_x$  sur l'espace tangent  $T_x M$ , on associe à chaque

---

<sup>1</sup> Institut Fourier, Université Joseph Fourier, 38402 Saint-Martin d'Hères. E-mail : laurent.bessieres@uif-grenoble.fr

plan vectoriel  $P$  de  $T_x M$  un nombre  $K(P)$  qu'on appelle *courbure sectionnelle* de  $P$ . La notion de courbure sectionnelle généralise la courbure de Gauss des surfaces plongées dans  $\mathbb{R}^3$ . On reviendra sur les diverses notions de courbure et leur signification géométrique au début de la section 2. Le point fondamental est qu'un espace où la courbure sectionnelle est constante, c'est-à-dire  $K = -1, 0$  ou  $1$  si on normalise, est localement isométrique à l'espace hyperbolique, à l'espace euclidien ou à la sphère ronde. Si de plus l'espace est supposé simplement connexe, on a une isométrie globale. On peut donc reformuler la conjecture de Poincaré comme un problème géométrique :

**Conjecture 1.2.** *Soit  $M$  une variété compacte, de dimension 3, simplement connexe, alors  $M$  peut être munie d'une métrique de courbure sectionnelle constante strictement positive.*

On attend la même conclusion sous l'hypothèse de finitude du groupe fondamental et on appelle cela la conjecture d'elliptisation. C'est un cas particulier de la conjecture de géométrisation.

Maintenant, pour munir une variété de la métrique la plus jolie, une idée naturelle et qui peut sembler naïve au premier abord consiste à partir d'une métrique quelconque et à la déformer pour lui donner le plus possible de symétrie ou d'homogénéité. Suivant cette idée, en 1982, Richard Hamilton [13] a introduit l'équation du flot de Ricci

$$(1) \quad \frac{\partial g}{\partial t} = -2 \operatorname{Ric}_{g(t)},$$

où  $g(t)$  est une famille de métriques riemanniennes sur une variété donnée et  $\operatorname{Ric}_g$  la courbure de Ricci associée à la métrique  $g$ . Cette courbure contient moins d'information que la courbure sectionnelle en général, mais autant en dimension 3. C'est une forme bilinéaire symétrique sur chaque espace tangent, donc de même nature que la métrique. L'équation (1) fait donc sens. En coordonnées on peut voir que c'est une équation du type équation de la chaleur. Son but est d'homogénéiser les courbures. On peut vérifier facilement que les métriques de courbure de Ricci constante — c'est-à-dire de valeurs propres égales et constantes sur la variété soit  $\operatorname{Ric}_g = \lambda g$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  — évoluent homothétiquement le long de ce flot (voir l'exemple 2.1 page 9). On revient dans la section 2 sur d'autres motivations de cette équation. Énonçons brièvement ce qu'Hamilton a pu faire avec ce flot et ce qu'il aurait aimé pouvoir faire. Dans [13] Hamilton démontre l'existence de solutions de l'équation (1) (appelées flots de Ricci) en temps petit pour toute donnée initiale. Ensuite il établit pour l'opérateur de courbure  $\operatorname{Rm}$  :

- une version algébrique des courbures sectionnelles ;
- une équation d'évolution de la forme  $\frac{\partial \operatorname{Rm}}{\partial t} = \Delta \operatorname{Rm} + Q(\operatorname{Rm})$  où  $Q$  est une expression quadratique.

En utilisant des principes du maximum, il montre que la positivité de la courbure de Ricci est préservée par le flot en dimension 3, et celle de l'opérateur de courbure l'est en toute dimension. De plus, la courbure scalaire — une fonction sur la variété qu'on obtient en diagonalisant  $\operatorname{Ric}_g(x)$  dans une base orthonormée de  $g_x$  et en sommant les valeurs propres — a un minimum croissant en toute dimension. En général, la courbure a tendance à tendre (on dira exploser) vers  $+\infty$  en au moins un point. Si la courbure de Ricci est strictement positive, la courbure scalaire explose en tout

point à la même vitesse. Il faut imaginer une sphère un peu cabossée s'écrasant sur un point. Le fait crucial est alors que la métrique s'arrondit : le pincement des valeurs propres de la courbure de Ricci s'améliore lorsque la courbure grandit. En dilatant convenablement les métriques  $g(t)$ , on peut montrer qu'elles convergent vers une métrique de courbure sectionnelle constante strictement positive sur la variété. La variété est donc difféomorphe à un quotient de  $S^3$  par un groupe fini d'isométries. C'est le résultat le plus spectaculaire de [13] et un premier pas vers la conjecture de Poincaré. On reviendra sur ce résultat dans la section 2.

En général, le comportement du flot est plus sauvage. Par exemple la courbure peut exploser sur une partie de la variété et rester bornée ailleurs, ou exploser partout mais à des vitesses différentes. On dit que le flot rencontre une singularité. L'exemple le plus naturel est celui où un morceau de la variété de forme cylindrique  $S^2 \times I$  s'écrase sur un segment (voir l'exemple 3.1 page 12). Pour comprendre la formation d'une singularité, on fait des zooms sur la zone où la courbure tend vers  $+\infty$ . Plus précisément, on dilate l'espace pour que la courbure reste bornée et simultanément on ralentit l'écoulement du temps et on le réinitialise à zéro. On appelle cela une dilatation parabolique. Chaque dilatation parabolique produit un nouveau flot dont le passé est de plus en plus long et où la courbure est bornée. Une idée naturelle est de passer à la limite dans cette suite de flots, de classifier les flots limites et d'en déduire la géométrie du flot peu de temps avant l'explosion. Hamilton a développé dans [16] un théorème de compacité adéquat sur les espaces de flots de Ricci, en fait une version pour les flots des théorèmes de convergence riemannienne à la Gromov. Cependant, une hypothèse cruciale pour appliquer ce résultat est une minoration du rayon d'injectivité. Le rayon d'injectivité en un point est le supremum des rayons  $r > 0$  pour lesquels l'application exponentielle  $\exp_x : B(0, r) \subset T_x M \rightarrow B(x, r)$  est un difféomorphisme. On a besoin d'une estimée de la forme  $\text{inj}(x)^2 |\text{Rm}_x| \geq \delta > 0$  sur le flot. Le rayon d'injectivité peut tendre vers zéro mais pas trop vite relativement à la courbure. En dilatant — l'expression  $\text{inj}^2 |\text{Rm}_x|$  étant invariante — on obtient une métrique de géométrie bornée. Un des obstacles majeurs au programme d'Hamilton est qu'il ne peut obtenir cette estimée en toute généralité. Supposons cet obstacle franchi. On peut montrer que les flots limites alors construits sont de courbure sectionnelle positive ou nulle, bornée, et ont un passé infini. Un outil important pour cela est le théorème de pincement de Hamilton-Ivey [14][18], qui permet de minorer la partie négative de la courbure sectionnelle par une fonction de la courbure scalaire. Nous verrons ce résultat dans la section 3. Une large part de la classification de ces flots limites est faite dans [15], modulo l'hypothèse sur le rayon d'injectivité. Pour poursuivre le flot malgré les singularités, on peut envisager de décomposer la variété en morceaux et de poursuivre le flot sur chaque composante. La technique, déjà utilisée par Hamilton pour certaines variétés de dimension 4, consisterait à opérer des chirurgies juste avant l'explosion de la courbure en coupant le long de sphères  $S^2 \subset M$ . On jette les morceaux de grande courbure - il faut contrôler leur topologie - puis on relance le flot sur les morceaux restant (en rebouchant les trous en collant des boules), jusqu'à la prochaine singularité (voir pages 26 et 26 pour une image). Un problème est de montrer que les singularités n'apparaissent pas de plus en plus vite, s'accumulant en temps fini. Il faut aussi savoir que les seules singularités qui arrivent sont opérables, c'est-à-dire sont de type cylindre sphérique. Enfin il

faut contrôler la topologie lors des chirurgies. L'espoir d'Hamilton était d'obtenir après un nombre fini de chirurgies un flot sans singularités qui converge (s'il est correctement dilaté) sur chaque morceau.

En 2002 et 2003, Grisha Perelman a déposé sur le serveur ArXiv trois papiers [25], [26], [27] qui, s'ils sont corrects, réalisent à peu près le programme d'Hamilton, prouvant entre autre la conjecture de Poincaré et la conjecture de géométrisation. Dans [25], Perelman résout complètement la question des singularités. Pour cela, il introduit de nouvelles fonctionnelles géométriques qui permettent de voir le flot de Ricci comme un flot de gradient. La croissance de ces fonctionnelles le long du flot permet alors de contrôler certaines quantités géométriques. En particulier on obtient un résultat de non effondrement local du volume des boules avec comme corollaire la minoration du rayon d'injectivité invoquée plus haut. Ce contrôle passe à la limite et amène Perelman à considérer une classe particulière de solutions du flot qu'il appelle les  $\kappa$ -solutions (prononcer *kappa*-solutions). Perelman donne la classification complète des  $\kappa$ -solutions de dimension 3, obtenant des modèles pour toutes les singularités. Le point culminant de [25] est le théorème des voisinages canoniques qui décrit la géométrie des flots de Ricci de dimension 3 aux points de grande courbure scalaire. Mentionnons que [25] contient un certain nombre de résultats valables en toute dimension et intéressants en soi. Cette connaissance précise de la géométrie aux points de grande courbure permet de faire des chirurgies de manière contrôlée. Dans [26], Perelman démontre qu'on peut poursuivre ce flot avec chirurgie indéfiniment, et ce pour toute donnée initiale normalisée sur une variété compacte de dimension 3. Un argument simple de diminution du volume montre qu'il n'y a qu'un nombre fini de chirurgies sur chaque intervalle de temps fini. Par contre, elles peuvent se poursuivre pendant un temps infini. La variété peut devenir non connexe et certaines composantes peuvent disparaître lors des chirurgies, on dit qu'elles s'éteignent. Le point clé est que grâce au théorème des voisinages canoniques la topologie de ces composantes est connue. Il s'agit de quotients de la sphère  $S^3$ , de produits  $S^2 \times S^1$ , d'espaces projectifs  $\mathbb{R}P^3$  ou de sommes connexes d'espaces projectifs, comme on le verra dans la section 5. Il peut même arriver que toutes les composantes de la variété s'éteignent en temps fini. Si la variété de départ est simplement connexe, on sait alors qu'il n'y a que des sphères et que la variété initiale est difféomorphe à la sphère  $S^3$ . C'est la stratégie développée dans [27], où l'extinction du flot avec chirurgie en temps fini est prouvée grâce à l'annulation d'un invariant géométrique ad hoc. Une version de cette méthode, techniquement plus simple, est développée par Tobias Colding et William Minicozzi dans [5]. Ils montrent que la largeur de la variété, une quantité géométrique calculée à l'aide d'un balayage par des sphères  $S^2$ , décroît jusqu'à zéro en temps fini le long d'un flot de Ricci lisse. On peut en déduire l'extinction en temps fini pour le flot avec chirurgie. La fin de [26] traite la situation contraire, l'évolution du flot avec chirurgie en temps infini et la géométrisation de la variété. Nous n'aborderons pas cette question.

Les articles de Perelman sont difficiles à lire et leur vérification pas encore terminée, notamment en ce qui concerne l'étude en temps long du flot avec chirurgie. Néanmoins il ne semble pas y avoir de doute sur l'existence du flot avec chirurgie en temps infini. On peut trouver de nombreux détails et compléments de preuve dans les notes de Bruce Kleiner et John Lott [20]. À ce jour, mon humble avis

est que la conjecture de Poincaré est prouvée. Le lecteur peut trouver des notes informelles sur le flot de Ricci et les travaux de Hamilton et Perelman dans [1], [11], [23], [7].

Ce texte est organisé comme suit. Dans le chapitre 2, on introduit le flot de Ricci et les équations d'évolution des courbures. On explique comment des principes du maximum permettent de contrôler les courbures et d'obtenir la classification des variétés de courbure de Ricci strictement positive. Le chapitre 3 est consacré aux singularités. On introduit les suites de dilatations paraboliques et on présente brièvement les fonctionnelles utilisées par Perelman pour prouver le théorème de non effondrement local. On donne la classification des  $\kappa$ -solutions (les flots limites) et on termine par le théorème des voisinages canoniques. Dans le chapitre 4, on utilise les résultats précédents pour décrire le flot de Ricci au moment crucial d'une singularité. On définit la chirurgie puis le flot avec chirurgie. Dans le chapitre 5 on explique l'argument de Colding et Minicozzi prouvant l'extinction du flot en temps fini et qui conclut la preuve de la conjecture de Poincaré.

Mes remerciements vont à J. Bertrand et Luc Rozoy, dont les remarques sur la première version de ce texte m'ont beaucoup aidé. Je remercie B. Leeb, J. Iliotakis et tout le groupe de Munich, dont les notes de groupe de travail m'ont été très utiles pour améliorer ma compréhension des articles de Perelman. Je remercie également M. Boileau et Sylvain Maillot pour les échanges fructueux à l'école d'été de Trieste et à d'autres occasions. Je tiens à remercier chaleureusement A. Parreau pour sa lecture attentive des pré-versions de ce texte et ses conseils qui m'ont beaucoup inspiré. Enfin je remercie chaleureusement mon collègue et néanmoins ami G. Besson pour tout le travail effectué ensemble ces deux dernières années.

Dans tout ce texte, sauf précision contraire, les variétés sont supposées connexes et orientées. Les variétés compactes sont toujours supposées sans bord. Les variétés, métriques, fonctions etc. sont  $C^\infty$ .

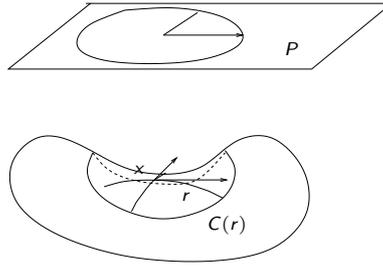
La lettre  $M$  désigne une variété de dimension  $n$ ,  $x$  un point de  $M$ ,  $g$  une métrique riemannienne sur  $M$  et  $g(t)$  une famille de métriques riemanniennes pour  $t \in (a, b)$ . Les courbures, normes, etc., dépendent du temps  $t$ .

## 2. Le flot de Ricci

Avant de décrire le flot, on va passer en revue les diverses notions de courbure. En effet, on va naviguer dans ce texte entre à peu près toutes les courbures et une partie de l'étude du flot de Ricci consiste à comprendre comment les unes contrôlent les autres.

### Les courbures

De manière générale, la courbure mesure le défaut infinitésimal de la métrique à être le produit scalaire de  $\mathbb{R}^n$ . Par exemple les *courbures sectionnelles* associent à chaque plan vectoriel  $P \subset T_x M$  un nombre  $K(P)$ , qu'on calcule comme suit. On considère le cercle  $C(r)$  de centre  $x$  de rayon  $r$  tangent à  $P$ .



Alors la longueur du cercle est

$$\ell(C(r)) = 2\pi r \left( 1 - \frac{K(P)}{6} r^2 + o(r^2) \right)$$

et  $K(P)$  mesure donc le défaut infinitésimal au périmètre euclidien. L'objet qui apparaît naturellement dans le flot sur la courbure est la *courbure de Ricci*, qui est une forme bilinéaire symétrique sur chaque espace tangent, on la notera  $\text{Ric}$ . La valeur de  $\text{Ric}(v, v)_x$  se calcule en traçant les courbures sectionnelles des plans vectoriels de  $T_x M$  contenant  $v$ , c'est-à-dire  $\text{Ric}(v, v)_x = \sum_{i=1}^{n-1} K(P_{ve_i})$  où  $(e_i)$  est une base orthonormée de  $v^\perp$ . Géométriquement, elle mesure un défaut d'aire sur des petites sphères dans la direction  $v$ .

La courbure la plus simple est la *courbure scalaire*, qui est une fonction sur la variété et qu'on notera  $R$ . En un point donné, c'est la trace par rapport à  $g_x$  de la courbure de Ricci sur  $T_x M$ , c'est-à-dire  $R(x) = \sum_{i=1}^n \text{Ric}(e_i, e_i)_x = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} K(P_{e_i e_j})$  où  $(e_i)$  est une base orthonormée de  $T_x M$ . Elle mesure un défaut dans le volume des petites boules centrées en  $x$ .

On utilisera aussi dans ce texte un objet plus sophistiqué, l'opérateur de courbure qu'on notera  $\text{Rm}$  (pour Riemann). Pour chaque point  $x$ ,  $\text{Rm}_x$  est un endomorphisme symétrique agissant sur l'espace des deux formes alternées de  $T_x M$ . Sa donnée est équivalente à celles des courbures sectionnelles et il apparaît naturellement lorsque l'on étudie les équations d'évolution des courbures. La normalisation choisie par Hamilton fait que ses valeurs propres sont les doubles des courbures sectionnelles en dimension 3. En coordonnées locales, toutes les courbures ont des expressions polynomiales en les coefficients de  $g$ ,  $\partial g$  et  $\partial^2 g$ .

Résumons la hiérarchie des courbures : les courbures sectionnelles (ou l'opérateur de courbure) déterminent la courbure de Ricci qui détermine la courbure scalaire. En dimension 3 la courbure de Ricci détermine toutes les courbures sectionnelles. Ainsi  $K(P_{e_1 e_2}) = (\text{Ric}(e_1, e_1) + \text{Ric}(e_2, e_2) - \text{Ric}(e_3, e_3))/2$ . En particulier une métrique est de courbure de Ricci constante, c'est-à-dire proportionnelle à la métrique, si et seulement si les courbures sectionnelles sont constantes sur la variété. L'un des intérêts majeurs du flot de Ricci en dimension 3 est qu'il permet de contrôler toutes les courbures à partir de la courbure scalaire. Heuristiquement, le flot homogénéise les courbure de Ricci donc un contrôle sur la moyenne implique un contrôle sur la courbure elle-même.

Pour plus de détails, les lecteurs curieux peuvent se reporter à [10] ou au stratosphérique [2].

**Le flot de Ricci**

On cherche à munir  $M$  d'une métrique optimale. La méthode proposée par Hamilton est inspirée des idées de Eells et Sampson [9]. On part d'une métrique quelconque et on cherche à la régulariser au moyen d'une équation de la chaleur. Idéalement on souhaite minimiser une fonctionnelle géométrique sur l'espace des métriques, l'équation d'évolution étant décrite par l'opposé du champ de vecteur gradient de la fonctionnelle. Le candidat naturel est l'intégrale  $\int_M R$  de la courbure scalaire, la fonctionnelle dite de Hilbert-Einstein. Ses points critiques (sur l'espace des métriques de volume 1) sont les métriques de courbure de Ricci constante, i.e.  $\text{Ric}_g = \lambda g$  (on les appelle métriques d'Einstein). Cependant l'équation associée à son gradient n'admet pas de solutions en général. L'idée d'Hamilton a été de modifier cette équation. On n'obtient pas un flot de gradient mais il y a existence de solutions.

On dit que  $g(t)$  est un flot de Ricci sur  $[0, T[$  si elle satisfait à l'équation d'évolution :

$$(2) \quad \frac{\partial g}{\partial t} = -2 \text{Ric}_{g(t)} .$$

En fait l'équation qui correspond à la stratégie ci-dessus est celle dite du flot de Ricci normalisé :  $\frac{\partial g}{\partial t} = -2(\text{Ric} - \frac{r}{n}g)$ , où  $r$  est la moyenne de la courbure scalaire. Les deux équations sont équivalentes - on passe de l'une à l'autre par une dilatation sur l'espace et le temps. La deuxième est de volume constant et plus pratique pour les problèmes de convergence. Ses point fixes sont les métriques de courbure de Ricci constante, qui évoluent par homothétie pour l'équation (2). L'équation du flot de Ricci est plus agréable pour les questions d'évolution des courbures. La constante 2 qui apparaît dans (2) est choisie arbitrairement pour un confort dans les calculs ; on peut la modifier par une homothétie sur le temps. Dans des coordonnées locales harmoniques, l'équation (2) se met sous la forme

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = \Delta g_{ij} + Q_{ij}(g, \partial g)$$

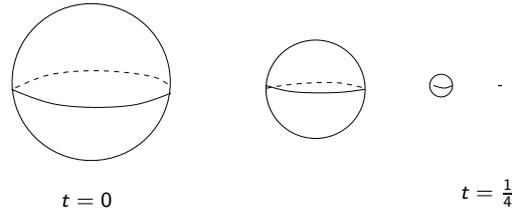
où  $\Delta$  est le laplacien (dépendant de  $t$ ) sur les fonctions et  $Q$  un terme quadratique en  $g$  et les dérivées premières de  $g$ . Ainsi (2) devient une équation aux dérivées partielles parabolique du type **réaction-diffusion**.

**Exemple 2.1.** Soit  $(S^3, g)$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^4$  munie de la métrique induite. On considère la famille  $g(t) = r^2(t)g$  avec  $r(0) = 1$  et  $r(t) > 0$ . La courbure sectionnelle de  $r^2g$  vaut  $\frac{1}{r^2}$ . La courbure de Ricci dans une direction  $v \in T_x S^3$  s'obtient en traçant les courbures sectionnelles sur les plans vectoriels de  $T_x S^3$  contenant  $v$  soit

$$\text{Ric}_{r^2g} = \frac{2}{r^2} r^2 g = 2g .$$

L'équation (2) donne  $r^2(t) = 1 - 4t$  et le dessin est celui-ci (explosion en temps fini) :

Epreuve Gazette  
date : 3/10/2005



Plus généralement, si  $\text{Ric}_g = \lambda \cdot g$  ( $g$  d'Einstein) alors l'homothétie  $g(t) = (1 - 2\lambda t)g$  est une solution du flot de Ricci, défini sur  $[0, \infty)$  si  $\lambda \leq 0$ , sur  $[0, \frac{1}{2\lambda})$  sinon. Sur  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , le flot est constant sur le facteur  $\mathbb{R}$  alors que la sphère  $\mathbb{S}^2$  s'écrase comme ci-dessus.

Le choix de l'équation (2) est justifié par le

**Théorème 2.1** ([13]). *Supposons  $M$  compacte. Il existe un unique flot de Ricci  $g(t)$  avec donnée initiale  $g$  défini sur un intervalle maximal  $[0, T)$ ,  $0 < T \leq \infty$ . De plus  $T < \infty$  si et seulement si le maximum des valeurs absolues des courbures sectionnelles tend vers l'infini quand  $t \rightarrow T$ .*

Le temps  $T$  est appelé un temps *singulier* s'il est fini. Pour montrer ce théorème, on établit d'abord l'existence et l'unicité d'une solution en temps petit pour toute donnée initiale lisse (voir Hamilton [13] et aussi De Turck [8] pour une simplification). On peut voir en intégrant (2) que tant que la courbure de Ricci reste bornée, on a

$$C^{-1}g(0) \leq g(t) \leq Cg(0).$$

Pour poursuivre le flot il suffit de s'assurer que la métrique reste lisse. Cela est pourvu par l'effet régularisant du flot qui permet de contrôler les dérivées à tous les ordres des courbures si on les contrôle à l'ordre zéro (pour les détails voir [5, th.6.45]). Pour contrôler les courbures on écrit leurs équations d'évolution et on utilise des principes du maximum. On va voir un aperçu de ces techniques dans le chapitre suivant.

### Équations d'évolution des courbures et principes du maximum

Commençons par l'équation la plus simple, celle de la courbure scalaire :

$$(4) \quad \frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + 2|\text{Ric}|^2$$

où toutes les quantités dépendent de  $t$ . C'est une E.D.P de type réaction-diffusion, le Laplacien régularisant la solution (diffusion) et le terme non linéaire ayant tendance à la faire exploser (réaction). En un point où la courbure scalaire  $R(x, t)$  de  $g(t)$  atteint son minimum sur  $M$ , le Laplacien  $\Delta R$  est positif (c'est la trace des dérivés secondes). On déduit de (4) que  $\frac{\partial R}{\partial t} \geq 0$  en  $x$  et, intuitivement, que le minimum de la courbure scalaire croît. Si de plus on utilise l'inégalité  $|\text{Ric}|^2 \geq \frac{R^2}{n}$ , on obtient  $\frac{\partial R}{\partial t} \geq \frac{2R^2}{n}$  et on peut penser que le minimum doit croître assez vite. Pour en donner une justification rigoureuse on utilise un principe du maximum. Expliquons cela en détail. Le principe du maximum permet de comparer la solution de l'E.D.P et une solution de l'équation différentielle ne comportant que le

terme de réaction, qui représente la situation extrême. En voici un énoncé (voir [5, th.4.2]) : soit  $F$  une fonction lisse sur  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe des fonctions  $u$  sur  $M \times [0, T)$  et  $\varphi$  sur  $[0, T)$  satisfaisant

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq \Delta_{g(t)} u + F(u) \quad \text{et} \quad \varphi' = F(\varphi).$$

Si  $u \geq \varphi$  au temps  $t = 0$  alors  $u \geq \varphi$  sur  $[0, T)$ .

En appliquant ceci à  $u = R$  et  $F = 0$ , puis  $F(s) = \frac{2s^2}{n}$ , on obtient que le minimum  $R_{min}(t)$  de la courbure scalaire croît puis que si  $R_{min}(0) > 0$  alors

$$(5) \quad R_{min}(t) \geq \frac{n/2}{t_0 - t}$$

où  $t_0 = \frac{n}{2R_{min}(0)}$ . On en déduit d'abord qu'en un temps singulier, au moins une courbure sectionnelle tend vers  $+\infty$ . C'est le premier signe d'une préférence du flot de Ricci pour les courbures positives. Ensuite, (5) montre que ce temps singulier arrive avant  $t_0$  si la courbure scalaire est strictement positive en  $t = 0$ . À priori, il se pourrait qu'en un point certaines courbures sectionnelles tendent vers  $+\infty$ , d'autres vers  $-\infty$  ou restent bornées.

Pour avoir plus d'informations, on travaille sur l'opérateur de courbure, qui satisfait à une équation d'évolution semblable,

$$(6) \quad \frac{\partial Rm}{\partial t} = \Delta Rm + Q(Rm).$$

Ici le Laplacien est la trace de la dérivée covariante seconde et  $Q$  est une expression quadratique. En dimension 3 la courbure de Ricci détermine l'opérateur de courbure et satisfait à une équation du même type. Un principe du maximum pour les tenseurs (voir Hamilton [13]) permet alors de montrer que la positivité de l'opérateur de courbure est préservée en toute dimension et celle de la courbure de Ricci l'est en dimension 3. En cas de courbure strictement positive, un raffinement de ces techniques permet d'obtenir le premier résultat frappant, qu'on présente dans le chapitre suivant.

### Quand la courbure de Ricci est strictement positive

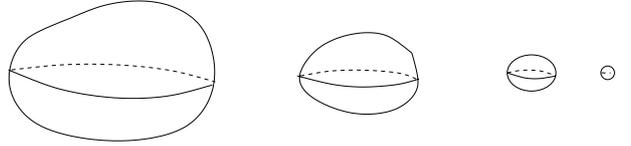
On suppose  $M$  compacte de dimension 3 et  $g(0)$  de courbure de Ricci strictement positive. Alors la courbure de Ricci de  $g(t)$  reste strictement positive et on a en tout point le pincement (voir [13, ch.10])

$$(7) \quad \frac{|\text{Ric} - \frac{R}{3}g|}{R} \leq \frac{\alpha}{R^\beta}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Ceci signifie que si la courbure scalaire  $R(x, t)$  tend vers  $+\infty$ , l'écart relatif en  $x$  de la courbure de Ricci  $\text{Ric}_{g(t)}$  à sa moyenne  $\frac{R}{3}g(t)$  tend vers 0. Maintenant, en contrôlant le gradient de la courbure scalaire, Hamilton montre que celle-ci explose en tout point au même temps  $T$  et que le ratio du maximum et du minimum des courbures scalaires sur  $M$  tend vers 1. Hamilton montre alors que la famille  $\tilde{g}(t) = \text{vol}(g(t))^{-2/3}g(t)$  (renormalisation de volume constant) converge vers une métrique de courbure sectionnelle constante d'où le

Epreuve CMI  
date : 3/10/2015

**Théorème 2.2** (Space form theorem [13]). *Si  $M$  possède une métrique de courbure de Ricci strictement positive, alors  $M$  peut être munie d'une métrique de courbure sectionnelle constante positive.*



**Remarque 2.1.**

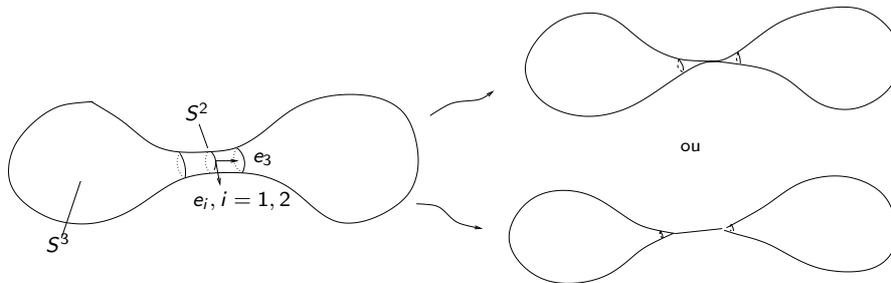
i. En particulier  $M$  est le quotient de la sphère  $\mathbb{S}^3$  par un groupe fini d'isométries. Une telle variété est dite **sphérique**. C'est le théorème fondateur de toute la théorie et le premier pas vers la conjecture de Poincaré.

ii. R. Hamilton a montré (voir [14]) que sous l'hypothèse de positivité de la courbure de Ricci,  $M$  est difféomorphe à un quotient de  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^3$  par un sous groupe discret d'isométries dans leur métrique standard. La preuve repose sur un principe du maximum fort et un théorème de décomposition.

### 3. Formation des singularités

La morale de ce qui précède est qu'en courbure positive les choses se passent bien : la positivité de la courbure scalaire est toujours préservée, celle de la courbure de Ricci l'est en dimension 3 ; dans le dernier cas une normalisation du flot converge et la topologie de la variété est connue. La situation est radicalement différente sans la positivité de la courbure de Ricci. En particulier la courbure peut exploser sur une partie de la variété et rester bornée ailleurs.

**Exemple 3.1.** *Considérons le flot  $(\mathbb{S}^3, g(t))$  ayant l'allure suivante :*



En  $t = 0$ , sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  centrale, les courbures sectionnelles des plans  $P_{e_1e_3}$  et  $P_{e_2e_3}$  orthogonaux à  $\mathbb{S}^2$  sont faiblement négatives alors que la courbure sectionnelle du plan  $P_{e_1e_2}$  tangent à  $\mathbb{S}^2$  est très positive. Donc  $\text{Ric}(e_1, e_1) = K(P_{e_1e_2}) + K(P_{e_1e_3}) \gg 0$  et  $\text{Ric}(e_2, e_2) = K(P_{e_1e_2}) + K(P_{e_2e_3}) \gg 0$  alors que  $\text{Ric}(e_3, e_3) = K(P_{e_1e_3}) + K(P_{e_2e_3})$  est faiblement négative. Quand le flot évolue la variété est contractée très fortement dans les directions  $e_1, e_2$  et  $K(P_{e_1e_2}) \rightarrow \infty$  alors qu'elle est faiblement dilatée dans la direction  $e_3$ .

Observons que c'est encore la partie positive de la courbure qui explose. En un sens c'est toujours le cas. Une variante des résultats précédents, le théorème de pincement de Hamilton-Ivey, montre que pour un flot de Ricci de dimension 3, la partie négative de l'opérateur de courbure  $Rm$  est contrôlée par la courbure scalaire  $R$ . De plus elle est négligeable comparée à la courbure scalaire lorsque celle-ci explose. Précisément :

**Théorème 3.1** (pincement de Hamilton-Ivey [14],[18]). *Il existe une fonction croissante  $\Phi : [-1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$  vérifiant  $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r)/r = 0$  avec la propriété suivante. Si  $R \geq -1$  et  $Rm \geq -\Phi(R)$  en  $t = 0$ , alors pour tout  $t$  dans  $[0, T)$  on a*

$$(8) \quad Rm \geq -\Phi(R).$$

Il faut comprendre l'inégalité comme une minoration des valeurs propres de l'opérateur de courbure (donc des courbures sectionnelles). Deux remarques : 1) la condition au temps  $t = 0$  n'est pas restrictive puisqu'on peut toujours la réaliser en dilatant la métrique initiale,  $R$  tendant vers 0 et  $\varphi(R)$  vers 1. On peut également la supprimer en adaptant  $\varphi$  à la condition initiale. 2) La courbure scalaire contrôle, donc toutes les courbures. En effet si on appelle  $\lambda \geq \mu \geq \nu$  les valeurs propres de l'opérateur de courbure, les valeurs propres de la courbure de Ricci sont  $(\lambda + \mu)/2$ ,  $(\lambda + \nu)/2$ ,  $(\mu + \nu)/2$  et la courbure scalaire vaut  $\lambda + \mu + \nu$ . D'où les inégalités

$$(9) \quad R + 2\varphi(R) \geq \lambda \geq \mu \geq \nu \geq -\varphi(R).$$

En particulier la courbure de Ricci (ou l'opérateur de courbure) explose en un point si et seulement si la courbure scalaire explose. Maintenant, en un point où la courbure scalaire  $R(x, t)$  est très grande on a

$$(10) \quad \frac{Rm}{R} \geq \frac{-\Phi(R)}{R} \geq -\varepsilon.$$

Si on dilate  $g(t)$  pour que  $R(x, t) = 1$ , le terme de gauche étant invariant par dilatation de la métrique, l'opérateur de courbure devient presque positif :  $Rm(x, t) \geq -\varepsilon$ . C'est en ce sens « faible » que le flot préfère les courbures positives. Dans l'étape suivante, on va regarder de plus près ce qui se passe en ces points.

### Étude des singularités : la technique du zoom

Cette technique a été mise en œuvre par Hamilton dans [15] et [16]. Le but est de décrire la géométrie au voisinage des points de grande courbure. L'idée est de faire des zooms sur une suite de points de courbure tendant vers l'infini et de passer à la limite. Si on peut montrer l'existence de limites, qui seront des flots de Ricci avec des propriétés particulières, on obtient des modèles pour la géométrie des singularités. Un des points de blocage du programme d'Hamilton concerne l'existence de la limite, qu'il ne peut montrer en général. Cette question est complètement résolue par Perelman.

On précise l'idée d'un zoom en définissant une *dilatation parabolique*. On se donne un point  $x_0$  de  $M$ , un temps  $t_0$  dans  $[0, T)$  et un réel  $Q > 0$  (en général

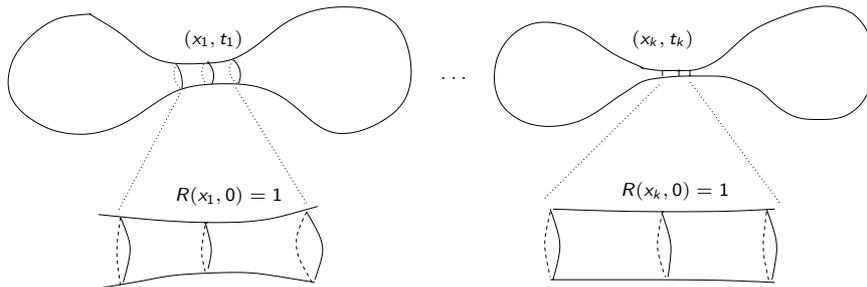
$Q = R(x_0, t_0)$  est très grand). On appelle dilatation parabolique en  $(x_0, t_0)$  de rapport  $Q$  le flot de Ricci sur  $M$  d'équation

$$g_0(t) = Q \cdot g\left(t_0 + \frac{t}{Q}\right),$$

pour  $t$  dans  $[-t_0 Q, (T - t_0)Q]$ .

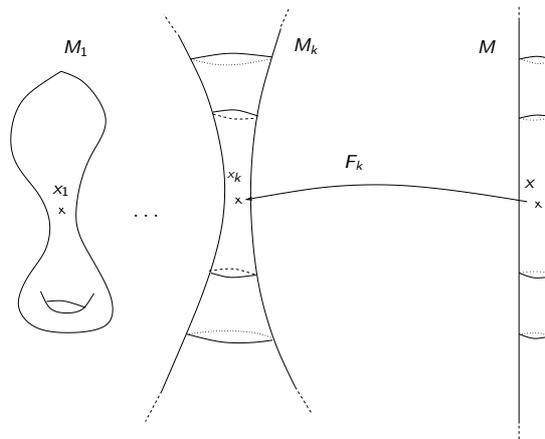
On laisse le lecteur vérifier que c'est bien un flot de Ricci. Cette transformation dilate les distances d'un facteur  $\sqrt{Q}$  donc rapetisse la courbure scalaire d'un facteur  $\frac{1}{Q}$ . Pour que  $g_0(t)$  soit un flot de Ricci, le temps est ralenti d'un facteur  $Q$  et donc l'intervalle de vie est dilaté du même facteur. Dans la nouvelle solution le point base est ramené au temps  $t = 0$  par le décalage de  $t_0$ .

Supposons maintenant que  $T$  soit un temps singulier. On suppose aussi que la variété est de dimension 3 et satisfait au pincement de Hamilton-Ivey (9). On prend une suite de points  $(x_k, t_k)$  dont la courbure scalaire  $Q_k := R(x_k, t_k)$  tend vers  $+\infty$ . On se place dans la situation la plus simple : on suppose que la courbure scalaire est partout inférieure à  $Q_k$  pour les temps précédant  $t_k$ . En un sens, on considère une suite maximale. On appelle  $g_k(t)$  la dilatation parabolique en  $(x_k, t_k)$  de rapport  $Q_k$ . Si on note  $R_k(x, t)$  la courbure scalaire de  $g_k(t)$  en  $x$ , les dilatations paraboliques correspondent à des renormalisations où  $R_k(x_k, 0) = 1$ . Maintenant la courbure scalaire est partout inférieure à 1 pour les temps négatifs. De plus le pincement de Hamilton-Ivey et la dilatation impliquent que l'opérateur de courbure est borné et presque positif sur les intervalles de vie négatifs  $[-t_k Q_k, 0]$  qui convergent vers  $(-\infty, 0]$ .



On voudrait faire converger notre suite de zooms, c'est-à-dire la suite de flots de Ricci pointés  $(M, g_k(t), (x_k, 0))$ . Avant de dire ce qu'on entend par là, faisons une petite digression sur la convergence des variétés riemanniennes.

Cette théorie a été développée par M. Gromov dans le fameux petit livre vert [11] (qui a doublé depuis sa première parution). On dit qu'une suite de variétés riemanniennes  $(M_k, g_k)$  converge au sens  $C^p$  vers une variété riemannienne  $(M, g)$  s'il existe des difféomorphismes  $F_k$  de  $M$  sur  $M_k$  tels que la métrique  $F_k^* g_k$  induite par  $F_k$  sur  $M$  converge vers  $g$  en norme  $C^p$ . Si la convergence est assez régulière, le volume, le diamètre, les courbures, etc. convergent. On dira que deux variétés sont  $\varepsilon$ -proches s'il y a un difféomorphisme  $(1 + \varepsilon)$ -bilipschitz de l'une sur l'autre. Lorsqu'on travaille avec des variétés non compactes, ou compactes mais sans contrôle du diamètre, on considère la convergence pointée. On dit qu'une suite de variétés riemanniennes pointées  $(M_k, g_k, x_k)$  converge vers une variété riemannienne pointée  $(M, g, x)$  si pour tout  $r > 0$ , les boules  $B_{g_k}(x_k, r)$  convergent vers  $B_g(x, r)$ . Cette fois-ci, la limite n'est pas forcément difféomorphe aux  $M_k$ .



On a alors le théorème de compacité suivant [11, 8.28] : soit  $(M_k, g_k, x_k)$  une suite de variétés riemanniennes pointées. On suppose qu'il existe des constantes  $V > 0$  et pour tout  $r > 0$ ,  $K(r) > 0$  telles que pour tout  $k$ ,

- 1) les valeurs absolues des courbures sectionnelles de  $M_k$  sont bornées par  $K(r)$  sur la boule  $B(x_k, r)$  ;
- 2) le rayon d'injectivité en  $x_k$  est minoré par  $V$ .

Alors il existe une sous-suite convergente au sens  $C^2$  vers une variété riemannienne pointée  $(M, g, x)$ ,  $g$  de classe  $C^1$ .

Remarquons que, grâce au théorème de Cheeger [4], la minoration du rayon d'injectivité est équivalente à une minoration du volume de la boule centrée en  $x_k$  et de rayon, disons, 1. L'effondrement d'une sphère sur un point ou d'un tore plat sur un cercle donne une bonne idée de ce qui se passe si on affaiblit les hypothèses. L'idée de la preuve est la suivante. Par des théorèmes classiques de comparaison, on contrôle le volume (ou le rayon d'injectivité) sur toute boule centrée en  $x_k$ . On peut alors contrôler dans une boule le nombre des cartes qui définissent la variété ainsi que les recollements entre ces cartes. La suite est une succession d'applications du théorème d'Ascoli doublée d'un procédé diagonal. On peut augmenter la régularité de la convergence si on a des estimées supplémentaires sur la courbure, ce qui est toujours le cas avec un flot de Ricci. En pratique les convergences seront  $C^p$  pour tout  $p$  donc très fortes. En particulier les courbures convergent à tous les ordres. Nous sommes maintenant prêts pour définir la convergence d'une suite de flots de Ricci pointés. On note  $B(x, t, r)$  la boule centrée en  $x$  de rayon  $r$  dans la métrique  $g(t)$ .

Fixons un intervalle  $(a, b)$  tel que  $-\infty \leq a < 0 \leq b \leq \infty$ . Soit  $(M_k, g_k(t), x_k)$  une suite de flots de Ricci pointés sur  $(a, b)$ . On dit que cette suite converge vers le flot de Ricci pointé  $(M, g(t), x)$  s'il existe pour tout  $k$  des plongements  $F_k$  de  $B(x, 0, k)$  dans  $M_k$  envoyant  $x$  sur  $x_k$  tels que la suite de métriques  $F_k^* g_k(t)$  converge vers  $g(t)$  au sens  $C^\infty$  uniformément sur les compacts de  $M \times (a, b)$ .

Bien sûr on peut faire dépendre les intervalles  $(a, b)$  de  $k$ , à condition que leur intersection contienne un intervalle. Le théorème de compacité adéquat suivant est démontré par Hamilton dans [16]. On note  $B(x, t, r)$  la boule centrée en  $x$  de rayon  $r$  dans la métrique  $g(t)$ .

Epreuve GaZC/1  
date : 3/10/2005

**Théorème 3.2.** *Si une suite de flots de Ricci pointés  $(M_k, g_k(t), x_k)$  comme ci-dessus vérifie :*

- 1) *pour tout  $r > 0$  et tout  $t$  dans  $(a, b)$ , les valeurs absolues des courbures sectionnelles de  $g_k(t)$  sont bornées sur  $B(x_k, t, r)$  par une constante  $K(r, t)$ ,*
- 2) *le rayon d'injectivité en  $x_k$  pour  $g(0)$  est minoré par une constante  $V > 0$ ,*  
*alors il existe une sous-suite convergente au sens vers un flot de Ricci pointé  $(M, g(t), x)$  défini sur  $(a, b)$ .*

Comme au-dessus, on peut remplacer la condition 2) par une minoration du volume de la boule unité de  $g(0)$  centrée en  $x_k$ . Il est temps de revenir à notre suite de zooms  $(M, g_k(t), (x_k, 0))$ . Elle satisfait à l'hypothèse sur la courbure sur les intervalles de temps négatifs  $[-t_k Q_k, 0]$  puisqu'on a tout fait pour cela. Supposons un instant que la condition sur le rayon d'injectivité soit satisfaite. Par le théorème de compacité 3.2, on peut extraire une suite convergeant vers un flot défini sur  $M_\infty \times (-\infty, 0]$ . Une telle solution est dite ancienne. De plus le flot limite a un opérateur de courbure borné et non nul puisque  $R(x_\infty, 0) = 1$ , positif ou nul par passage à la limite dans le pincement de Hamilton-Ivey. Ces conditions sont très fortes et permettent d'envisager la classification de ces solutions du flot. Une bonne part de ce travail est faite par Hamilton (voir [15]) modulo la condition sur le rayon d'injectivité.

Le premier apport frappant de G. Perelman dans [25] est d'établir que cette hypothèse est toujours satisfaite si l'explosion de la courbure a lieu en temps fini. C'est le théorème dit de non-effondrement local, qu'on décrit dans le chapitre suivant. Une deuxième question est de savoir ce qui se passe si on zoome sur des points où la courbure est grande mais pas maximale. Dans ce cas il est beaucoup plus dur de construire une limite. C'est ce que fait Perelman dans le théorème 12.1 de [25], dit des voisinages canoniques (4.4 dans ce texte).

#### 4. Non effondrement local

Expliquons brièvement de quoi il s'agit. Intuitivement, une famille de variétés riemanniennes s'effondre si elle s'approche d'un espace de dimension inférieure, comme par exemple une famille de cylindres qui s'écrase sur une droite. Plus précisément, on demande que le rayon d'injectivité (ou le volume de la boule unité) tende vers zéro en tout point, la courbure étant bornée par, disons, 1 — une condition naturelle si on ne veut pas tout effondrer en contractant la métrique. Pour une variété riemannienne  $(M, g)$  fixe, on parlera d'effondrement relatif à une échelle donnée. Moralement, un cylindre vu de très loin est proche d'une droite, mais vu de très près il est proche d'un plan. Dit autrement, une boule de très grand rayon dans le cylindre ramenée à un rayon 1 par dilatation est proche d'un segment, alors qu'une boule de petit rayon ramenée à un rayon 1 est (proche d') un disque euclidien. Pour définir l'effondrement local, on se donne donc un réel  $\rho > 0$  (l'échelle) et on considère les rayons  $r \leq \rho$ . On dit qu'une boule  $B(x, r)$  est admissible si  $|Rm| \leq r^{-2}$  sur  $B(x, r)$ , soit après dilatation  $|Rm| \leq 1$  sur la boule unité. Si on écrit  $r \leq \frac{1}{\sqrt{|Rm|}}$ , cela revient à se donner aussi une « échelle de la courbure » en plus de l'échelle  $\rho$ . Pour quantifier l'effondrement on se donne un nombre  $\kappa > 0$  et on travaille avec le volume des boules plutôt que le rayon d'injectivité, qui sera plus accessible par des méthodes de flot. On dit qu'une métrique  $g$  est  $\kappa$ -effondrée

à l'échelle  $\rho$  s'il existe une boule admissible  $B(x, r)$  de rayon  $r \leq \rho$  telle que  $r^{-n} \text{vol}(B(x, r)) < \kappa$ . Après dilatation, cela revient à comparer le volume de la boule unité à  $\kappa$  (ou le rayon d'injectivité en  $x$  à une fonction de  $\kappa$ ). Sinon on dira qu'elle est  $\kappa$ -non effondrée à l'échelle  $\rho$ , c'est-à-dire que  $r^{-n} \text{vol}(B(x, r)) \geq \kappa$  pour toute boule admissible de rayon  $r \leq \rho$ . On choisit toujours la constante  $\kappa$  inférieure à la valeur euclidienne de  $r^{-n} \text{vol}(B(x, r))$ , qui est la limite quand  $r \rightarrow 0$  de cette quantité pour toute métrique. Ainsi, pour tout  $\kappa > 0$  raisonnable, le cylindre est  $\kappa$ -effondré à grande échelle mais  $\kappa$ -non effondré à petite échelle. Une sphère ronde et le cylindre sphérique  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  sont  $\kappa$ -non effondrés à toute échelle, même quand la sphère est très petite. Une version du théorème de non-effondrement local affirme alors (voir [25] chapitre 4) :

**Théorème 4.1.** *Supposons  $M$  compacte, munie d'un flot de Ricci  $g(t)$  défini sur  $[0, T)$ ,  $T$  fini. Alors il existe une constante  $\kappa > 0$  telle que  $g(t)$  est  $\kappa$ -non-effondrée à l'échelle  $\sqrt{T}$  pour tout temps  $t < T$ .*

Dans ce qui suit on décrit les techniques mises en œuvre dans la preuve et grossièrement l'idée de celle-ci. On a dit que le flot de Ricci n'est pas un flot de gradient. Le premier apport de Perelman est de montrer qu'il l'est à difféomorphisme près. Plus précisément, soit  $(M, g)$  une variété riemannienne et  $f$  une fonction  $C^\infty$  sur  $M$ , on définit la fonctionnelle

$$(11) \quad \mathcal{F}(g, f) = \int_M (R + |\nabla f|^2) e^{-f} d\text{vol}.$$

On obtient une fonctionnelle géométrique  $\mathcal{F}$ , définie sur  $\mathcal{M} \times C^\infty(M)$ , où  $\mathcal{M}$  est l'ensemble des métriques riemanniennes de  $M$ .

On restreint cette fonctionnelle au sous-espace de  $\text{Met}(M) \times C^\infty(M)$  formé des couples  $(g, f)$  tels que la forme volume  $e^{-f} d\text{vol}$  est constante, égale à une forme volume fixée  $dm$ . L'équation du champ de vecteur gradient de la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  conduit alors au système

$$(12) \quad \frac{\partial g}{\partial t} = -2(\text{Ric} + D^2 f), \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -\Delta f - R,$$

où toutes les quantités dépendent de  $g(t)$ . L'idée est de perturber une solution  $(g(t), f(t))$  du système (12) pour se débarrasser du terme  $D^2 f$  et obtenir une solution  $\tilde{g}(t)$  du flot de Ricci. Un résultat classique de géométrie riemannienne dit que si on déforme une métrique  $g$  par un flot de difféomorphismes  $\varphi_s$  tel que  $\frac{d}{ds} \varphi_s = \nabla f$ ,  $f$  étant une fonction, on a  $\frac{d}{ds} (\varphi_s^* g) = 2D^2 f$ . Maintenant, une solution de (12) étant donnée, on peut définir une famille de difféomorphismes  $\varphi_t$  telles que  $\frac{d}{dt} \varphi = \nabla f$  pour tout temps  $t$ . Alors le couple formé de  $\tilde{g}(t) = \varphi_t^* g(t)$  et  $\tilde{f}(t) = f(t) \circ \varphi_t$  vérifie le système

$$(13) \quad \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} = -2 \text{Ric}, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = -\Delta \tilde{f} - R + |\nabla \tilde{f}|^2,$$

où tout dépend de  $\tilde{g}(t)$ . Le premier membre est alors une solution du flot de Ricci. L'opération inverse est possible, c'est-à-dire une solution du système (13) donne par perturbation une solution du système (12). Le lecteur soupçonneux aura peut-être remarqué que le deuxième membre est une équation de la chaleur rétrograde qui n'a pas de solution en général. Il se demandera à juste titre si on ne raisonne

Epreuve G2015  
date : 3/10/2015

pas sur l'ensemble vide. L'astuce est la suivante. En présence d'un flot de Ricci, qu'on notera  $\tilde{g}(t)$ , sur  $[0, T]$ , on résout la deuxième équation de (13) dans le sens rétrograde, en partant d'une donnée initiale  $\tilde{f}(T)$ , ce qui revient à fixer la forme volume  $dm$  au temps  $T$ . Pour cette solution  $(\tilde{g}(t), \tilde{f}(t))$  du système (13) sur  $[0, T]$ , la fonction  $\mathcal{F}(\tilde{g}(t), \tilde{f}(t))$  est égale à  $\mathcal{F}(g(t), f(t))$  et croissante, dans le bon sens. C'est démoniaque.

Pour montrer le non effondrement local, Perelman utilise ce même procédé avec une fonctionnelle plus sophistiquée, la fonctionnelle « entropie ». Pour idée, en voici la formule

$$W(g, f, \tau) = \int [\tau(R + |\nabla f|^2 + f - n)] (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-f} dvol,$$

où  $\tau > 0$ . En choisissant au temps  $t < \infty$  une fonction  $f$  approchant la fonction indicatrice d'une boule admissible  $B(x, r)$ , il peut contrôler l'expression  $r^{-n} vol(B)$  par la quantité  $W(g, f, r^2)$ . La croissance de la fonctionnelle le long d'un flot  $(g(t), f(t), \tau(t))$  permet alors de contrôler cette quantité en fonction de  $g(0)$  et de  $t$ .

Revenons au flot  $(M^3, g(t))$  et à la suite de zooms considérée au chapitre précédent. Si le temps d'explosion  $T$  de la courbure est fini, les métriques  $g(t)$  sont  $\kappa$ -non effondrées à l'échelle  $\sqrt{T}$ . Les zooms  $g_k(t)$  sont également  $\kappa$ -non effondrés, à l'échelle  $\sqrt{Q_k} \sqrt{T}$ . On a alors une minoration du rayon d'injectivité de  $g_k(0)$  en  $x_k$  et le théorème de compacité s'applique. Quitte à extraire on peut passer à la limite et on obtient un flot de Ricci  $\kappa$ -non-effondré à toute échelle. Dans l'épisode suivant, on classe les flots pouvant apparaître de cette manière.

### $\kappa$ -solutions de dimension 3

On a montré dans les deux chapitres précédents comment construire la limite d'une certaine suite de zooms. Les propriétés que vérifie la limite - c'est une solution définie sur  $(-\infty, 0]$ , d'opérateur de courbure positif borné non nul,  $\kappa$ -non-effondrée à toute échelle - définissent un ensemble de flots de Ricci que Perelman appelle les  $\kappa$ -solutions. Par exemple  $\mathbb{S}^3$  et  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  avec leur flots canoniques sont des  $\kappa$ -solutions mais pas  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  (quand  $t \rightarrow -\infty$ , le facteur  $\mathbb{S}^1$  est très petit relativement au  $\mathbb{S}^2$ ). Le but de cette section est de donner la classification complète des  $\kappa$ -solutions de dimension 3, ce qui correspond au chapitre 11 de [25] et 1.5 de [26]. La liste est remarquablement courte :

**Théorème 4.2.** *Une  $\kappa$ -solution de dimension 3 est isométrique à*

- A.  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  muni de son flot standard,
- B.  $\mathbb{B}^3$  ou  $\mathbb{RP}^3 - \overline{\mathbb{B}^3}$ , munis d'un flot de courbure strictement positive,
- C.  $\mathbb{S}^3/\Gamma$ , ou  $\Gamma$  est un sous-groupe fini d'isométries de la sphère ronde, muni d'un flot de courbure strictement positive.

Pour décrire la géométrie locale des  $\kappa$ -solutions, Perelman utilise la terminologie suivante. Soit  $\varepsilon > 0$ , on dit qu'une boule  $B(x, t, \frac{t}{\varepsilon})$  est un  $\varepsilon$ -cou si après une dilatation de facteur  $r^{-2}$ , elle est  $\varepsilon$ -proche de  $\mathbb{S}^2 \times (-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon})$  muni de sa métrique canonique de courbure scalaire 1 (voir dessin page 19, les rayons sont des ordres de grandeur). Nécessairement,  $r$  est de l'ordre de  $\frac{1}{\sqrt{R(x,t)}}$ . On appellera  $\varepsilon$ -capuchon

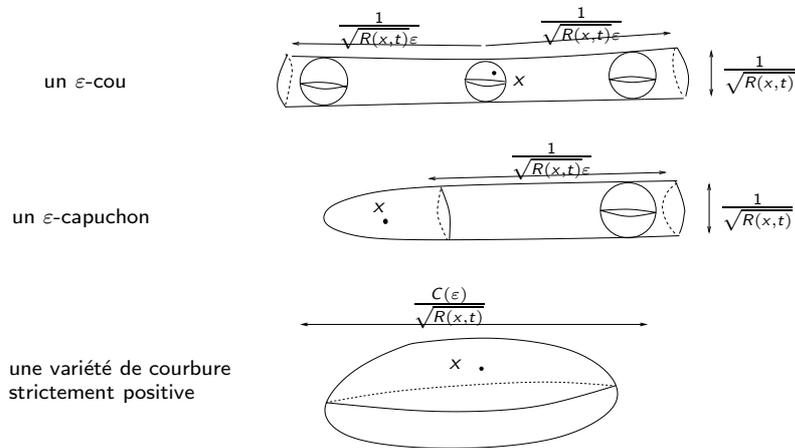
une métrique de courbure strictement positive bornée sur  $\mathbb{B}^3$  ou sur  $\mathbb{RP}^3 - \overline{\mathbb{B}^3}$  telle que tout point en dehors d'un compact est dans un  $\varepsilon$ -cou. Même si la courbure des  $\kappa$ -solutions est variable, la géométrie est contrôlée de manière universelle :

**Théorème 4.3.** *Il existe  $\kappa_0 > 0$  et une constante universelle  $\eta > 0$  telle que toute  $\kappa$ -solution de dimension 3 est soit une  $\kappa_0$ -solution soit un quotient de la sphère ronde. De plus les oscillations de la courbure scalaire sont contrôlées par*

$$(14) \quad |\nabla R| \leq \eta R^{\frac{3}{2}}, \quad \left| \frac{\partial R}{\partial t} \right| \leq \eta R^2.$$

De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit, il existe une constante  $C(\varepsilon) > 0$  telle que pour tout  $t$ , tout point  $x$  admet un voisinage  $B$  de diamètre inférieur à  $\frac{C(\varepsilon)}{\sqrt{R(x,t)}}$ , qui est soit

- i) un  $\varepsilon$ -cou,
- ii) un  $\varepsilon$ -capuchon,
- iii) une variété compacte de courbure sectionnelle strictement positive.



**Remarque 4.1.**

1) On appellera voisinage canonique de tels voisinages. Dans le deuxième cas, on contrôle la taille de la partie non cylindrique. Dans le dernier cas, le voisinage contient toute la variété, qui est difféomorphe à une variété sphérique d'après 2.2. On a de plus des estimées sur le minimum de la courbure sectionnelle.

2) On peut choisir  $\varepsilon > 0$  de manière universelle avec la propriété suivante. Si on met bout à bout un nombre fini de  $\varepsilon$ -cous, la réunion est difféomorphe à  $\mathbb{S}^2 \times I$  ou  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ . Si chaque côté d'une réunion d' $\varepsilon$ -cous est bouché par un  $\varepsilon$ -capuchon, la réunion est difféomorphe à  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{RP}^3$  ou une somme connexe de deux  $\mathbb{RP}^3$ . Le point clé est qu'un recollement le long de sphères  $\mathbb{S}^2$  est trivial. (Voir dessin page 25.)

Ce texte est trop réduit pour présenter la preuve de ces théorèmes. Mentionnons seulement quelques idées frappantes et des exemples d'utilisation. Tout d'abord on a un théorème de compacité qui dit : l'ensemble des  $\kappa$ -solutions  $(M, g(t), x)$  de

Epreuve Coûte  
date : 3/10/2015

dimension 3 telles que  $R(x, 0) = 1$  est compact. Ce résultat est stupéfiant car on ne contrôle la courbure a priori qu'en un seul point. D'autre part, pour toute  $\kappa$ -solution  $(M, g(t))$  et toute suite  $t_k \rightarrow -\infty$ , Perelman démontre l'existence d'une suite  $(M, g_k(t), x_k)$ , où  $g_k(t) = \frac{1}{-t_k} g(t_k - t_k t)$ , ayant une limite  $(M_{-\infty}, g_{-\infty}(t), x_{-\infty})$  quand  $k \rightarrow \infty$ . Intuitivement c'est le germe en  $-\infty$  de la  $\kappa$ -solution et Perelman appelle cela un *soliton asymptotique*. En dimension 3 c'est aussi une  $\kappa$ -solution mais elle a des propriétés supplémentaires d'autosimilarité. Ainsi  $g_{-\infty}(t)$  évolue selon l'équation

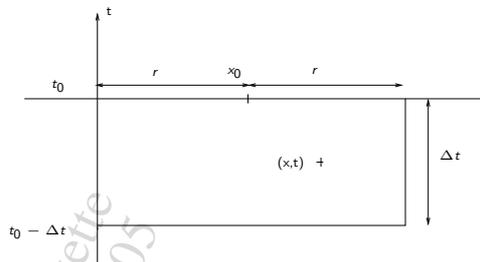
$$g_{-\infty}(t) = \alpha(t) \varphi_t^* g(0),$$

où  $\alpha(t) > 0$  et  $\varphi_t$  est un difféomorphisme de  $M_{-\infty}$ . Perelman l'utilise pour classer les  $\kappa$ -solutions. Donnons un exemple. Considérons une  $\kappa$ -solution compacte, donc de courbure strictement positive par les travaux d'Hamilton. Supposons que son soliton asymptotique soit compact. Il est donc muni d'un flot de courbure strictement positive qui évolue vers la métrique ronde et le pincement des courbures s'améliore. Par autosimilarité, la courbure est constante et les métriques  $g_{-\infty}(t)$  sont rondes. Mais  $g_{-\infty}(0)$  est proche de  $g(t_k)$  (à dilatation près) lorsque  $t_k$  est très négatif donc  $g(t_k)$  est arbitrairement proche d'une métrique ronde lorsque  $t_k \rightarrow -\infty$ . Ce n'est possible que si  $g(t)$  est le flot rond, puisque le flot s'arrondit.

### Théorème des voisinages canoniques

Dans les précédents chapitres, on a classifié des modèles de singularité, c'est-à-dire les flots de Ricci pouvant apparaître comme limite des zooms de courbure maximale. Il reste à voir que ces flots, c'est-à-dire les  $\kappa$ -solutions listées en 4.3, suffisent à décrire tous les points de grande courbure du flot de Ricci. C'est précisément ce que dit le théorème des voisinages canoniques, le résultat majeur de [25]. Essentiellement, ce résultat dit que si le flot a vécu assez longtemps, tout point de grande courbure scalaire a un voisinage en temps et en espace proche d'un même voisinage d'une  $\kappa$ -solution. Ce résultat est crucial car pour contrôler la topologie lors des chirurgies, on aura besoin de voir *tous* les points de grande courbure. On donne une version édulcorée du théorème pour éviter beaucoup de technique. On va supposer la métrique initiale normalisée pour que le flot vive une seconde au moins et obéisse au pincement de Hamilton-Ivey (8). On appelle voisinage parabolique en  $(x_0, t_0)$  de rayons  $r$  et  $\Delta t > 0$ , l'ensemble

$$\begin{aligned} P(x_0, t_0, r, \Delta t) &= \{(x, t), d_{t_0}(x, x_0) \leq r, t_0 - \Delta t \leq t \leq t_0\} \\ &= B(x_0, t_0, r) \times [t_0 - \delta t, t_0]. \end{aligned}$$



C'est un bout de flot dans le passé d'une boule.

**Théorème 4.4.** [25, th. 12.1] *Pour tout  $\varepsilon, \kappa > 0$ , il existe une constante universelle  $r_0 > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $(M^3, g(t))$  un flot de Ricci sur une variété compacte de dimension 3, défini sur  $[0, T]$ ,  $T > 1$ . On suppose que  $g(t)$  est  $\kappa$ -non effondrée à l'échelle  $r_0$ . Si  $(x_0, t_0)$  est un point tel que  $t_0 \geq 1$  et  $Q_0 := R(x_0, t_0) \geq r_0^{-2}$ , alors le voisinage parabolique  $P(x_0, t_0, \frac{1}{\varepsilon\sqrt{Q_0}}, -\frac{1}{\varepsilon Q_0})$  est  $\varepsilon$ -proche, après dilatation parabolique de facteur  $Q_0$ , du voisinage correspondant d'une  $\kappa$ -solution.*

**Remarque 4.2.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit, un tel point  $x_0$  est donc dans un  $\varepsilon$ -cou, un  $\varepsilon$ -capuchon ou une variété de courbure sectionnelle strictement positive, comme dans le théorème 4.3. Les oscillations de la courbure sont contrôlées par (14). On dira que  $g(t)$  satisfait à l'hypothèse des voisinages canoniques à l'échelle  $r_0$ .*

La preuve de ce résultat est assez étourdissante et je ne résiste pas à l'envie de la raconter. Elle renferme plusieurs arguments par contradiction, renormalisations et passages à la limite, emboîtés comme des poupées russes. Ce sera la partie la plus technique de ce texte.

*Preuve.* Par contradiction. Pour simplifier, disons qu'un point est mauvais si son voisinage parabolique n'est pas  $\varepsilon$ -proche, après le zoom, d'une  $\kappa$ -solution et il est joli sinon. On se donne une suite de flots de Ricci  $(M_k, g_k(t))$  satisfaisant aux hypothèses, avec dans chacun un mauvais point  $(x_k, t_k)$ , tels que  $Q_k = R(x_k, t_k) \geq r_k^{-2} \rightarrow \infty$ . L'idée est de faire converger une suite de zooms sur les mauvais points vers une  $\kappa$ -solution - une contradiction pour  $k$  assez grand. La grande difficulté est que les zooms ne sont plus de courbure bornée. La preuve compte quatre étapes. Une première astuce consiste à prendre d'autres mauvais points, "presque maximaux" parmi les mauvais points. Grossièrement, disons que tout point dans le passé du point mauvais ayant une courbure double doit être joli. Dans la deuxième étape, on montre qu'au temps  $t = 0$  les zooms sont de courbure bornée sur chaque boule centrée sur les mauvais points. On peut donc passer à la limite riemannienne sur la tranche  $t = 0$  des flots. Dans la troisième étape, on montre que la courbure est globalement bornée sur la limite. Enfin on étend la convergence en une convergence de flots pour les temps négatifs. En un certain sens, la preuve est une récurrence sur l'échelle de courbure. On va tricher un peu pour simplifier certains arguments.

**1ère étape.** Il existe dans chaque flot un mauvais point  $(x'_k, t'_k)$  tel que tout point  $(x, t)$  vérifiant  $t \leq t'_k$  et  $R(x, t) \geq 2R(x'_k, t'_k)$  est joli.

Pour montrer cette assertion on raisonne sur chaque flot comme suit. Si le point  $(x_k, t_k)$  convient, on le prend sinon il existe dans son passé un mauvais point  $(x, t)$  tel que  $R(x, t) \geq 2R(x_k, t_k)$ . Si  $(x, t)$  convient, on le prend sinon il existe dans son passé un mauvais point  $(x', t')$  tel que  $R(x', t') \geq 2R(x, t)$ . On itère jusqu'à trouver un mauvais point qui convienne. Comme la courbure double à chaque coup et  $M_k \times [0, t_k]$  est compact, cela arrive forcément en un nombre fini d'itérations. Éventuellement, le procédé s'arrête car il n'y a plus de point de courbure double.

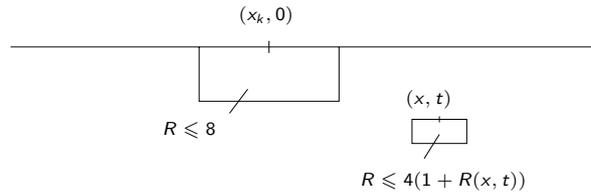
On peut raffiner un peu cet argument pour se ramener à  $t'_k \geq 1/2$ . En effet il importe que le passé du mauvais point soit assez long pour que les zooms convergent vers une solution ayant un passé infini.

Sans perte, on peut supposer que  $(x_k, t_k)$  est le mauvais point satisfaisant à l'assertion ci-dessus avec  $t_k \geq 1/2$ . Le but est de montrer qu'une suite de dilatations

paraboliques en  $(x_k, t_k)$  de facteur  $R(x_k, t_k)$  converge vers une  $\kappa$ -solution. Pour ne pas alourdir les notations, on note  $g_k(t)$  la dilatation parabolique telle que  $R(x_k, 0) = 1$ . Maintenant on travaille sur les espaces  $M_k \times [-Q_k/2, 0]$  où tous les points de courbure scalaire  $\geq 2$  sont jolis. C'est « l'hypothèse de récurrence » sur l'échelle de courbure. Ces points ont des voisinages comme en (4.3) et la courbure scalaire y vérifie les estimées (14).

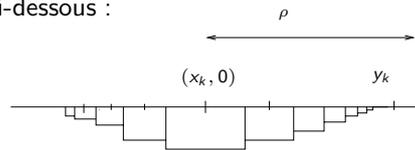
**2ème étape.** pour tout  $R > 0$ , les courbures scalaires sont uniformément bornées sur les boules  $B(x_k, 0, R)$ .

On commence par montrer que tout point a un voisinage parabolique de taille définie par la courbure du point sur lequel les courbures sont contrôlées. Précisément, il existe une constante  $c = c(\eta)$  telle si  $\bar{Q} = 1 + R(x, t)$  alors la courbure scalaire est majorée par  $4\bar{Q}$  sur le voisinage parabolique  $P(x, t, \frac{c}{\sqrt{\bar{Q}}}, \frac{c}{\bar{Q}})$ .



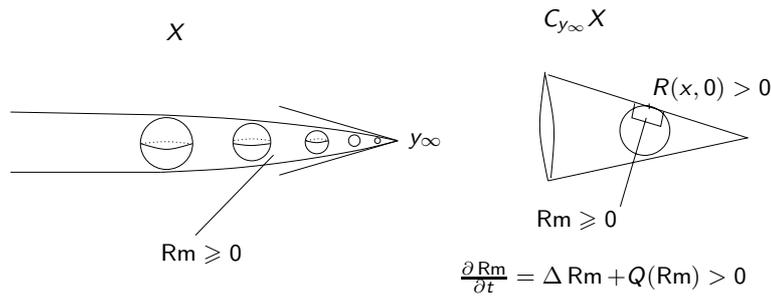
En effet, dès que la courbure scalaire est supérieure à 2, les estimées (14) s'appliquent. Il suffit alors de les intégrer sur les segments horizontaux ou verticaux du voisinage parabolique.

En particulier la courbure scalaire est uniformément bornée sur les boules  $B(x_k, 0, \frac{c}{\sqrt{2}})$ . Considérons alors le supremum  $\rho$  des rayons  $r > 0$  tels que la courbure scalaire soit uniformément bornée sur les boules  $B(x_k, 0, r)$ . Pour montrer que  $\rho = \infty$ , on raisonne encore par contradiction. L'hypothèse de  $\kappa$ -non effondrement des métriques  $g_k$  et le théorème de compacité 3.2 permettent d'extraire une suite convergente de boules  $(B(x_k, 0, \rho), g_k(0), x_k)$  vers une variété (non complète)  $(B_{g_\infty}(x, \rho), g_\infty, x)$  de courbure positive ou nulle (en passant à la limite dans le pincement de Hamilton-Ivey). De plus, les boules  $B_{g_\infty}(x, r)$  sont la tranche de temps  $t = 0$  d'un bout de flot si  $r < \rho$ . Heuristiquement, on peut passer à la limite sur les boîtes ci-dessous :



On peut compléter la boule  $B_{g_\infty}(x, \rho)$  en un espace métrique complet  $X$  de courbure positive ou nulle au sens d'Alexandrov. Ceci signifie que les triangles géodésiques de  $X$  sont plus épais que les triangles de même longueur du plan euclidien. Par hypothèse il existe une suite de points  $y_k$  dans  $B(x_k, 0, \rho)$  telle que  $R(y_k, 0) \rightarrow \infty$  et  $y_k \rightarrow y_\infty \in X$ . On peut trouver un voisinage de  $y_\infty$  formé d'une réunion infinie d' $\varepsilon$ -cou de rayons sphériques tendant vers 0. En utilisant des estimées plus précises on peut montrer alors que le cône tangent  $C_{y_\infty} X$  en  $y_\infty$  de  $X$  (l'analogue du plan tangent, obtenu en dilatant à l'infini l'espace en  $y_\infty$ ) est un cône métrique non plat. De plus en dehors du sommet, chaque point  $x$  est dans la tranche de temps  $t = 0$  d'un bout de flot de Ricci de courbure positive ou nulle vivant sur  $[-\delta_x, 0]$ .

Epreuve Gromov  
date : 3/10/2014



Un calcul montre que  $\frac{\partial Rm}{\partial t} > 0$  en ces points  $(x, 0)$  du cône alors que l'opérateur de courbure admet au moins une direction nulle (en considérant la direction radiale). Cela contredit la positivité de l'opérateur sur  $[-\delta_x, 0]$ .

Pour les deux dernières étapes on va aller plus vite. On note  $(M, g, x)$  la limite des  $(M_k, g_k(0), x_k)$ . On sait que  $g$  est d'opérateur de courbure positive ou nulle.

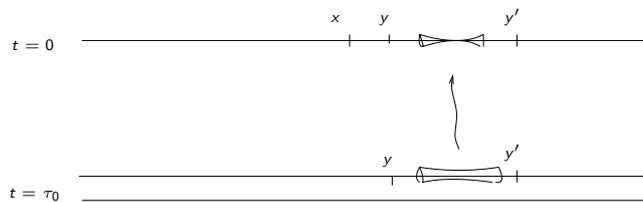
**3ème étape :** L'opérateur de courbure est borné sur  $M$ .

On suppose la variété non compacte et on raisonne encore par contradiction. On trouve dans la variété un cylindre sphérique  $\mathbb{S}^2 \times [0, \infty)$ , le rayon de  $\mathbb{S}^2$  tendant vers 0 vers le bout. La théorie des variétés complètes de courbure positive ou nulle dit que c'est impossible. En effet, une telle variété doit « s'ouvrir » à l'infini.

Les résultats précédents impliquent une borne uniforme de la courbure sur  $M_k \times [\tau, 0]$  pour un  $\tau < 0$ . On peut donc passer à la limite pour obtenir un flot sur  $M \times [\tau, 0]$ . On appelle  $\tau_0$  l'infimum des tels  $\tau$  et on se dirige vers la

**4ème étape :**  $\tau_0 = -\infty$ .

Sans surprise, on raisonne par contradiction. On commence par montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que l'écart des distances entre le temps  $t$  et le temps  $t = 0$  est contrôlé par  $|d_{g(t)} - d_{g(0)}| \leq C$  (on contrôle la courbure par une inégalité de Harnack et on intègre la variation des métriques). Dans le cas où  $M$  est compact cela montre que le diamètre de  $g(t)$  reste borné et on procède comme à l'étape 2. Dans le cas non compact, on peut trouver dans  $(M, g(t))$  des portions cylindriques  $\mathbb{S}^2 \times I$  séparant deux points éloignés  $y, y'$  et dont le rayon des sphères  $\mathbb{S}^2$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow \tau_0$ .



Comme les distances décroissent avec le flot (la courbure est positive donc  $\frac{\partial g}{\partial t} \leq 0$ ) cela implique la nullité du rayon d'injectivité de  $(M, g(0))$  - une contradiction.

Au final on obtient la convergence de  $(M_k \times [-Q_k/2, 0], g_k(t), (x_k, 0))$  vers une  $\kappa$ -solution. Cela implique que  $x_k$  est joli pour  $k$  assez grand - une contradiction.  $\square$

Epreuve Claret  
date : 3/10/2015

Ceci termine cette longue partie sur l'étude des singularités. En résumé, on sait calculer une échelle de courbure  $r_0^{-2}$  au delà de laquelle la géométrie du flot de Ricci est canonique. On va exploiter ces informations pour opérer des chirurgies.

## 5. Le flot avec chirurgie

Dans ce chapitre on définit le flot avec chirurgie sur une variété compacte de dimension 3. L'idée est de poursuivre le flot, lorsqu'il rencontre une singularité, en découpant la variété aux endroits où la courbure explose. Perelman reprend une technique élaborée par Hamilton sur des variétés de dimension 4 (voir [17]). Cependant il opère les chirurgies exactement au temps d'explosion de la courbure alors qu'Hamilton les faisait un peu avant. On va donc commencer par décrire géométriquement le flot de Ricci lors d'une explosion de la courbure.

On se donne un flot de Ricci  $(M^3, g(t))$  où  $M$  est compacte et  $g(t)$  est définie sur un intervalle maximal  $[0, T)$  avec  $T < \infty$ . Par hypothèse, il existe donc un point  $x$  dans  $M$  tel que  $R(x, t) \rightarrow \infty$  quand  $t$  s'approche de  $T$ . On suppose que la métrique  $g(0)$  a été convenablement normalisée pour que le théorème des voisinages canoniques s'applique. On se donne donc  $\varepsilon > 0$ , une constante  $\kappa > 0$  de non effondrement par le théorème 4.1 et une échelle  $r_0 > 0$  au delà de laquelle on a des voisinages canoniques par le théorème 4.4.

### Le flot de Ricci lors d'une explosion de la courbure

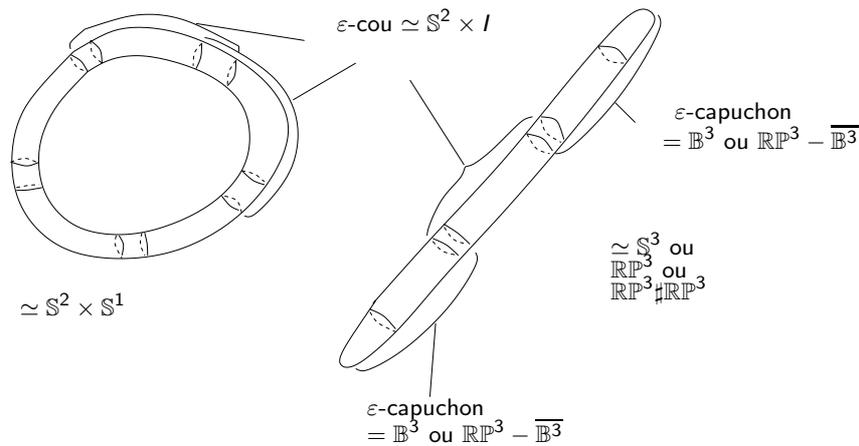
On veut comprendre la structure de l'ensemble des points de  $M$  où la courbure scalaire reste bornée, c'est-à-dire de l'ensemble

$$\Omega = \{x \in M, R(x, \cdot) \leq c(x)\}.$$

Par hypothèse,  $\Omega$  est strictement plus petit que  $M$ . On commence par traiter la situation la plus simple, quand  $\Omega$  est vide, c'est-à-dire quand la courbure scalaire explose partout. On dit alors que le flot s'éteint. Cette situation ressemble à celle du théorème 2.2 sauf qu'on n'a pas d'informations sur le signe de la courbure de Ricci.

#### 1er cas : $\Omega$ est vide, le flot s'éteint

Dans ce cas,  $M$  est difféomorphe à  $\mathbb{S}^3 \setminus \Gamma$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  ou une somme connexe de deux  $\mathbb{R}P^3$ . En effet si la courbure explose partout, on peut trouver un temps  $t_0$  proche de  $T$  tel que  $R(x, t_0) \geq r_0^{-2}$  pour tout point  $x \in M$ . Alors  $(M, g(t_0))$  est recouverte par des voisinages canoniques satisfaisant aux conclusions de 4.3. Si l'un de ces voisinages est une variété compacte de courbure sectionnelle strictement positive, on peut conclure que la variété  $M$  est difféomorphe à une variété sphérique par 2.2. Sinon on peut recouvrir  $(M, g(t_0))$  par un nombre fini de  $\varepsilon$ -cous et de  $\varepsilon$ -capuchons. S'il n'y a que des  $\varepsilon$ -cous on les met bout-à-bout jusqu'à ce qu'ils se referment en un  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ . Sinon un nombre fini de  $\varepsilon$ -cous mis bout à bout doivent être bouchés par deux  $\varepsilon$ -capuchons.



On trouve donc que  $M$  est difféomorphe à  $S^3, \mathbb{R}P^3$  ou  $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$ .

**Remarque 5.1.** Dans ce cas, si  $M$  est simplement connexe on peut conclure que  $M$  est difféomorphe à  $S^3$ .

**2ème cas :  $\Omega$  n'est pas vide**

Les contrôles sur les oscillations de la courbure (14) permettent de montrer que  $\Omega$  est un ouvert sur lequel  $g(t)$  converge vers une métrique régulière que nous appellerons  $g(T)$ . En particulier, la conclusion du théorème des voisinages canoniques est vraie sur  $(\Omega, g(T))$  (en bougeant un peu les paramètres). Pour comprendre la structure de l'ensemble  $\Omega$ , on se donne une échelle  $\rho < r_0$  et on définit l'ensemble

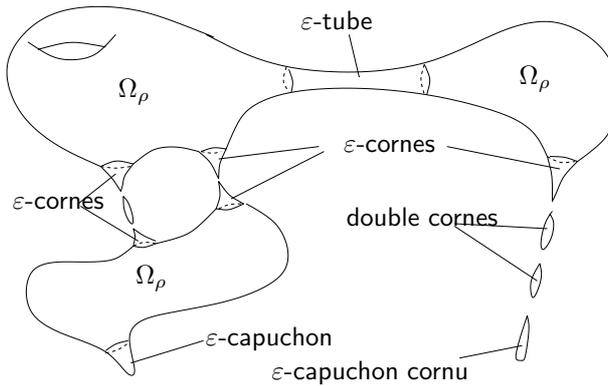
$$\Omega_\rho = \{x \in M; R(x, T) \leq \rho^{-2}\}.$$

Ce sont les points où la courbure n'est pas trop grande mais au delà de laquelle on a des voisinages canoniques. Supposons que  $\Omega_\rho$  soit non vide. Alors  $\Omega \setminus \Omega_\rho$  est recouvert par des  $\epsilon$ -cous et des  $\epsilon$ -capuchons. Pour décrire les composantes connexes de  $\Omega \setminus \Omega_\rho$ , Perelman introduit la terminologie suivante. Il appelle  $\epsilon$ -tube (resp.  $\epsilon$ -corne, resp. double  $\epsilon$ -corne), une métrique sur  $S^2 \times I$  telle que chaque point est contenu dans un  $\epsilon$ -cou, et telle que la courbure scalaire reste bornée aux deux bouts (resp. reste bornée d'un côté et tend vers l'infini de l'autre, resp. tend vers l'infini aux deux bouts). Il appelle  $\epsilon$ -capuchon cornu une métrique sur  $B^3$  ou  $\mathbb{R}P^3 - B^3$  telle qu'en dehors d'un compact, tout point soit dans un  $\epsilon$ -cou, et telle que la courbure scalaire tende vers l'infini sur le bout. En examinant les différentes combinaisons possibles d' $\epsilon$ -cous et d' $\epsilon$ -capuchons, on peut voir que tout point  $x \in \Omega \setminus \Omega_\rho$  est dans un des ensembles suivants :

- a) un  $\epsilon$ -tube dont les bords sont dans  $\Omega_\rho$ , ou
- b) une  $\epsilon$ -corne dont un bord est dans  $\Omega_\rho$ , ou
- c) un  $\epsilon$ -capuchon dont le bord est dans  $\Omega_\rho$ , ou
- d)  $\epsilon$ -capuchon cornu, ou
- e) une double  $\epsilon$ -corne.

Les deux dernières composantes sont celles disjointes de  $\Omega_\rho$ . Voici un dessin :

Epreuve Cazd  
date : 3/10/2005



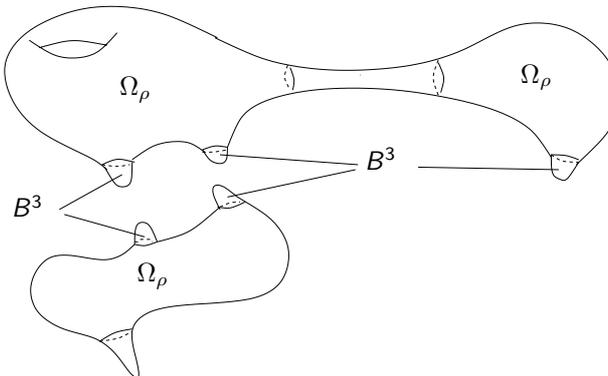
L'ensemble  $\Omega$  peut être très compliqué. En particulier, il peut avoir une infinité de composantes connexes du type doubles cornes. Par contre, il n'y a qu'un nombre fini de composantes intersectant  $\Omega_\rho$ .

**Remarque 5.2.** Si  $\Omega_\rho$  est vide, comme dans le cas où  $\Omega$  est vide, on recouvre  $(M, g(t))$  par des voisinages canoniques et on montre que  $M$  est difféomorphe à  $S^3 \setminus \Gamma$ ,  $S^2 \times S^1$  ou  $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$ . On dit aussi que le flot s'éteint, même si la courbure n'explose pas partout. Cela sera justifié par la définition de la chirurgie.

### La chirurgie

Si  $\Omega$  n'est pas vide, on opère une chirurgie topologique de la manière suivante :

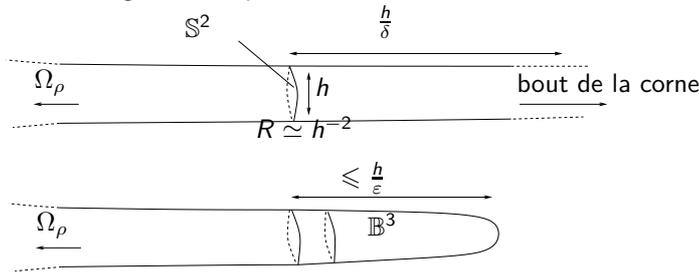
- 1) on jette les composantes connexes de  $\Omega$  n'intersectant pas  $\Omega_\rho$ ,
- 2) on tronque les cornes (reliées à  $\Omega_\rho$ ) et on les bouche par des boules  $B^3$ .



On obtient ainsi une nouvelle variété différentielle, éventuellement non connexe mais avec un nombre fini de composantes, que nous noterons  $M_1$ . En tout temps  $t < T$  proche de  $T$ ,  $(M \setminus \Omega(\rho), g(t))$  est recouverte par des voisinages canoniques. On peut donc déterminer la topologie de la partie de la variété qui est jetée. On vérifie ainsi que  $M$  est la somme connexe des différentes composantes connexes de  $M_1$  et d'un nombre fini de  $S^2 \times S^1$  et de projectifs  $\mathbb{R}P^3$  (éventuellement). Dans le dessin ci-dessus, on perd dans la chirurgie un  $S^2 \times S^1$ , et un  $\mathbb{R}P^3$  si le capuchon cornu est  $\mathbb{R}P^3 - \mathbb{B}^3$ .

**Remarque 5.3.** Si l'ensemble  $\Omega_\rho$  est vide, la procédure ci-dessus fait sens. Dans ce cas on jette tout et  $M_1$  est vide d'où la terminologie extinction.

Cette chirurgie peut se définir de manière métrique, c'est-à-dire en contrôlant précisément les recollements effectués. Pour cela, on choisit de tronquer les  $\varepsilon$ -cornes au milieu d'un  $\delta$ -cou, pour un paramètre  $0 < \delta \ll \varepsilon$ . Perelman montre en effet que pour tout  $0 < \delta < \varepsilon$ , il existe un nombre  $h(\delta, \rho, \varepsilon) > 0$  tel que dans toute  $\varepsilon$ -corne, tout point de courbure scalaire supérieure à  $h^{-2}$  est dans un  $\delta$ -cou. La métrique du  $\delta$ -cou dilatée par  $h^{-2}$  est  $\delta$ -proche de la métrique produit sur  $\mathbb{S}^2 \times (-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta})$ . On fait la chirurgie sur la sphère centrale de courbure approximative  $h^{-2}$  et on recolle une boule  $\mathbb{B}^3$  avec une métrique standard de type  $\varepsilon$ -capuchon. On peut interpoler les deux métriques sur un cylindre  $\mathbb{S}^2 \times [0, \lambda h]$ , où  $\lambda$  est une constante, en restant proche de la métrique canonique, la longueur du  $\varepsilon$ -capuchon étant inférieure à  $\frac{h}{\varepsilon}$ . Un point important est qu'on peut faire cette opération en préservant le pincement de Hamilton-Ivey  $Rm \geq -\Phi(R)$ , le  $\kappa$ -non effondrement et l'échelle  $r_0$  des voisinages canoniques.



Observons que le volume perdu lors de la chirurgie est strictement positif de l'ordre de  $\frac{h^3}{\delta} - \frac{h^3}{\varepsilon}$ . Cette opération est ce que Perelman appelle une chirurgie avec paramètre  $(r_0, \delta)$  (le paramètre  $\rho$  est fixé en posant  $\rho = \delta \cdot r_0$ ).

La nouvelle variété compacte (éventuellement non connexe)  $M_1$  étant munie d'une métrique riemannienne  $g_1(T)$ , on peut relancer le flot de Ricci simultanément sur ses différentes composantes. La question qui se pose est de savoir si on peut itérer la procédure assez longtemps pour décomposer complètement  $M$  et la déterminer. Mentionnons qu'on peut contrôler la croissance du volume total de la variété (par le minimum de la courbure scalaire), donc la perte de volume lors de chaque chirurgie montre que sur chaque intervalle de temps fini, il n'y aura qu'un nombre fini de chirurgies avec paramètre  $(r_0, \delta)$ .

**Flot avec chirurgie**

Si la conclusion du théorème des voisinages canoniques survit sur le flot après la chirurgie, on peut espérer itérer cette procédure ci-dessus indéfiniment. C'est loin d'être gagné car on ne peut plus normaliser la métrique  $g_1$ . Un tour de force de [26] est de réaliser cela en faisant dépendre les paramètres  $r_0$  et  $\delta$  du temps.

**Définition 5.1.** Soient  $r(t), \delta(t)$  des fonctions strictement positives sur  $[0, +\infty)$ . On appelle flot avec chirurgie la donnée

- d'une suite  $(t_k)_{0 \leq k \leq N \leq \infty}$  de  $[0, +\infty)$  strictement croissante discrète et pour chaque entier  $k$ ,
- d'une variété compacte  $M_k$ , pouvant être non connexe,
- d'un flot de Ricci  $g_k(t)$  sur  $M_k \times [t_k, t_{k+1})$ , singulier en  $t_{k+1}$ , satisfaisant à l'hypothèse des voisinages canoniques à l'échelle  $r(t)$ ,

Epreuve Centrale  
date : 3/10/2015

tels que  $(M_{k+1}, g_{k+1}(t_{k+1}))$  est obtenu de  $(M_k, g_k(t))$  par une chirurgie de paramètres  $(r, \delta)$  au temps  $t_{k+1}$ .

En particulier, il n'y a qu'un nombre fini de chirurgies sur chaque intervalle de temps fini. Si on appelle  $M_k^j$ ,  $j \in \{1, \dots, N(k)\}$ , les composantes connexes de  $M_k$ , on peut voir, en tenant compte des composantes qui s'éteignent, que  $M = M_0$  est difféomorphe à la somme connexe des  $M_k^j$  et d'un nombre fini de tores sphériques  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  et de quotients de  $\mathbb{S}^3$  par des groupes finis d'isométries.

**Remarque 5.4.** *Il peut arriver qu'on obtienne une variété  $M_k$  vide, c'est-à-dire que le flot s'éteint. Dans ce cas  $t_{k+1} = +\infty$  et par abus de langage on dit que le flot de Ricci continue à exister sur  $\emptyset \times [t_k, \infty)$ . La variété  $M$  est alors difféomorphe à une somme connexe d'un nombre fini de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  et de quotients de  $\mathbb{S}^3$  par des groupes finis d'isométries.*

Il nous reste à énoncer le résultat fondamental de [26]. On dit qu'une métrique  $g$  est normalisée si les courbures sectionnelles sont majorées par 1 en valeur absolue et si le volume de toute boule unité est au moins la moitié du volume euclidien. Alors, en édulcorant un peu l'énoncé, on a le

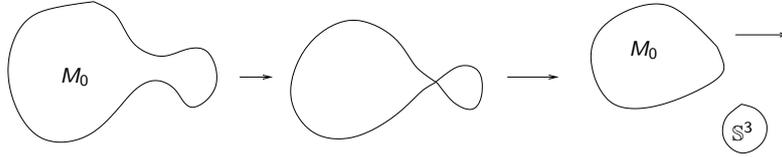
**Théorème 5.1** ([26]). *Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe des fonctions décroissantes  $r(t) > 0$ ,  $\delta(t) > 0$  définies sur  $[0, \infty)$  avec la propriété suivante. Pour toute donnée initiale  $(M, g_0)$  normalisée, le flot avec chirurgie avec paramètres  $(r(t), \delta(t))$  est défini sur  $[0, \infty)$ .*

La preuve de ce résultat se fait par récurrence sur des intervalles successifs  $[2^i \varepsilon, 2^{i+1} \varepsilon]$ . L'étape 0 est réalisée à l'aide du théorème des voisinages canoniques. L'itération de la récurrence se montre par contradiction, comme dans la preuve du théorème des voisinages canoniques. La différence est qu'il peut y avoir des chirurgies dans le passé. De plus, il faut au préalable montrer le non effondrement sur l'intervalle  $[2^{i+1} \varepsilon, t)$  pour une constante  $\kappa_{i+1} > 0$  dépendant seulement des constantes précédentes. Pour cela Perelman utilise une version locale de la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  vue dans la section 4. Il va sans dire que la mise en œuvre de ces arguments demande beaucoup d'habileté et d'ingéniosité.

## 6. Preuve de la conjecture de Poincaré

On est maintenant capable, pour toute donnée initiale normalisée, de poursuivre le flot avec chirurgie indéfiniment. De plus, on contrôle totalement les manipulations topologiques opérées lors des chirurgies. D'après la remarque 5.4, pour prouver la conjecture de Poincaré, il suffit de montrer que si la donnée initiale est simplement connexe, le flot avec chirurgie s'éteint en temps fini. On peut simplifier les choses en supposant  $M$  irréductible. On dit qu'une variété  $M$  de dimension 3 est irréductible si toute sphère plongée  $S^2 \subset M$  borde une boule  $B^3$ . Cela implique que toute décomposition de  $M$  en somme connexe est triviale : si  $M = M_1 \# M_2$ , l'une des variété est difféomorphe à  $M$  et l'autre à  $\mathbb{S}^3$ . Maintenant le théorème de Kneser affirme que toute variété compacte de dimension 3 admet une unique décomposition en somme connexe d'un nombre fini de variétés irréductibles et de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ . Si  $M$  est simplement connexe elle se décompose donc en un nombre fini de variétés simplement connexes irréductibles. Il suffit de montrer que de telles variétés

sont difféomorphes à  $\mathbb{S}^3$ . On va donc supposer notre variété initiale simplement connexe et irréductible. On la note  $M_0$ , on la munit d'une métrique quelconque normalisée et on lance le flot avec chirurgie. Maintenant  $M_0$  survit à chaque chirurgie à difféomorphisme près (tant que le flot ne s'éteint pas) et on peut considérer qu'elle est munie d'un flot de Ricci lisse par morceaux.



Il suffit de prouver que le flot s'éteint en temps fini sur cette composante. C'est ce que nous détaillons maintenant.

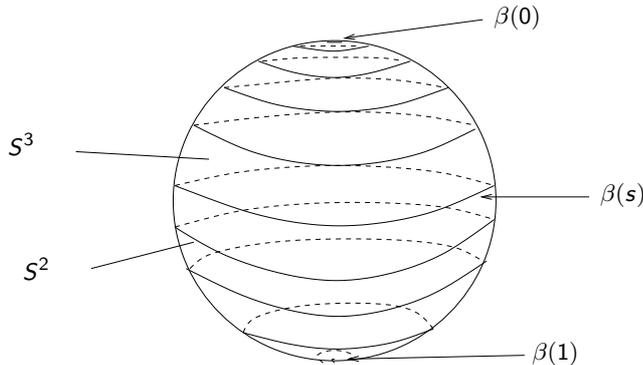
**Extinction du flot en temps fini**

Nous présentons l'argument de T. Colding et W. Minicozzi [5], plus simple techniquement que celui de Perelman [27]. Il consiste à montrer que la largeur de  $(M_0, g(t))$  - une quantité géométrique strictement positive calculée à l'aide d'un balayage de  $M_0$  par des sphères  $S^2$  - décroît assez vite le long du flot de Ricci pour atteindre zéro en temps fini. Ceci repose sur le fait que l'espace des applications de  $S^2$  dans  $M_0$  n'est pas simplement connexe.

On considère l'ensemble des applications de  $S^2$  dans  $M_0$ , continues et d'énergie bornée,  $H = C^0 \cap L^2_1(S^2, M_0)$ . L'énergie  $E(f)$  d'une application  $f : S^2 \rightarrow M_0$  est définie par

$$E(f) = \int_{S^2} |df|_g^2 dV_{S^2}.$$

On note  $i(M_0) \subset H$  l'ensemble des applications constantes qui envoient la sphère  $S^2$  sur un point de  $M_0$ . Des arguments classiques de topologie montrent que le groupe fondamental  $\Pi_1(H, i(M_0))$  est non trivial. Il existe donc un chemin d'applications de  $S^2$  dans  $M_0$ ,  $\beta : [0, 1] \rightarrow H$ , d'extrémités des applications constantes et homotopiquement non trivial. En quelque sorte, on a un balayage de la variété par des sphères  $S^2$ . On peut penser au dessin suivant sur  $\mathbb{S}^3$  :



La classe  $[\beta]$  étant fixée, on définit la largeur de  $(M_0, g)$  en minimisant parmi les représentants  $\gamma$  de  $[\beta]$  l'énergie maximale des sphères  $S^2$  le long de  $\gamma(s)$  :

$$W([\beta], g) = \inf_{\gamma \in [\beta]} \sup_{s \in [0,1]} E(\gamma(s)).$$

Epreuve Gazette  
date : 3/10/2005

On a alors le

**Théorème 6.1** (J. Jost [19]).  $W([\beta], g) > 0$ .

Par ailleurs T. Colding et W. Minicozzi montrent dans [5] la

**Proposition 6.1.** *Si  $g(t)$  est un flot de Ricci lisse sur  $M_0$ , alors*

$$\frac{dW([\beta], g(t))}{dt} \leq -4\pi + \frac{3}{4(t+C)}W([\beta], g(t)).$$

où  $C$  dépend de  $R_{\min}(0)$ . Cette inégalité implique que la largeur de  $(M_0, g(t))$  atteint zéro en temps fini si le flot est défini assez longtemps.

Revenons à notre flot lisse par morceaux  $(M_0, g(t))$ . L'inégalité ci-dessus s'applique sur chaque intervalle lisse du flot. La constante  $C$  change à chaque singularité mais en s'améliorant car  $R_{\min}(t)$  croît. Pour conclure, il suffit de montrer que la largeur de  $(M_0, g(t))$  ne saute pas à chaque singularité, et en fait elle décroît. C'est réglé par le

**Lemme 6.1.** *Soit  $T$  un temps singulier pour le flot  $g(t)$  sur  $M_0$ . Alors il existe pour tout  $t < T$  proche de  $T$  un difféomorphisme  $(1 + \xi(t))$ -lipschitz entre  $(M_0, g(t))$  et  $(M_0, g(T))$  avec  $\xi(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow T$ . Par conséquent,*

$$\lim_{t \rightarrow T_-} W([\beta], g(t)) \geq W([\beta], g(T)).$$

En effet, considérons le dessin page 27 et revenons un tout petit peu dans le passé à  $t < T$ . Sur l'ensemble  $\Omega_\rho$ , sur la moitié de la corne touchant  $\Omega_\rho$  et sur le  $\delta$ -cou la métrique a peu varié. Par contre le bout de la corne est remplacé par une boule  $\mathbb{B}^3$  (puisque la chirurgie doit faire apparaître une sphère  $S^3$ ). On réalise le difféomorphisme en prenant l'identité sur la partie à gauche de la sphère centrale du  $\delta$ -cou et en envoyant la partie droite sur le  $\varepsilon$ -capuchon. L'application est  $(1 + \xi(t))$ -lipschitz sur la partie gauche et une partie du  $\delta$ -cou, et très contractante sur le complémentaire. Maintenant cette application décroît l'énergie, à un facteur multiplicatif  $(1 + \xi(t))^2$  près :

$$W([\beta], g(T)) \leq (1 + \xi(t))^2 W([\beta], g(t)).$$

## 7. Références

- [1] M. Anderson, *Géométrisation des variétés de dimension 3 via le flot de Ricci*, La gazette des mathématiciens, n° 103, SMF (janvier 2005) [original : Notices 51, n° 2, AMS.]
- [2] M. Berger, *A panoramic view of riemannian geometry*, Springer, 2003.
- [3] G. Besson, *Une nouvelle approche de la topologie des variétés de dimension 3, d'après R. Hamilton et G. Perelman* Séminaire Bourbaki, 57ème année, 2004-2005, n° 947.
- [4] J. Cheeger, *Finiteness theorems for riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 92 (1970), 61-74.
- [5] B. Chow and D. Knopf, *The Ricci flow : an introduction*, Math. Surv. and Monographs, vol. 110, AMS (2004)
- [6] T.H. Colding, W.P. Minicozzi, *Estimates for the extinction time for the Ricci flow on certain three-manifolds and a question of Perelman*, <http://arXiv.org/abs/math.DG/0307245>
- [7] B. Chow et H.-D. Cao, *Recent developments on the Ricci flow*, <http://arxiv.org/ps/math.DG/9811123>

- [8] D. DeTurck, *Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors, improved version*, Collected papers on Ricci flow, ed. H.-D. Cao, B. Chow, S.-C. Chu and S.-T. Yau, Int. Press, Somerville, MA, 2003
- [9] J. Eells and J.H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 86 (1964), 109-160.
- [10] S. Gallot, D. Hulin et J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer (1990).
- [11] M. Gromov, J. Lafontaine et P. Pansu, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, CEDIC (1981)
- [12] R.E. Greene, *A Genealogy of Noncompact Manifolds of Nonnegative Curvature : History and Logic* Comparison Geometry MSRI Publications Volume 30, 1997.
- [13] R. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. 17 (1982), n° 2, 255-306.
- [14] H86 R. Hamilton, *Four-manifolds with positive curvature operator*, J. Diff. Geom 24, p153-179 (1986)
- [H93] R. Hamilton, *The Harnack estimate for the Ricci flow*, J. Diff. Geom 37, 225-243 (1993)
- [15] R. Hamilton, *The formations of the singularities of the Ricci flow*, In *Surveys in Differential Geometry*, volume II, 7-136, International press, Cambridge MA, 1995
- [16] R. Hamilton, *A compactness property for solutions of the Ricci flow*, Amer. Jour. Math. 117 (1995), 545-572.
- [17] R. Hamilton, *Four-manifolds with positive isotropic curvature*, Commu. Annal. Geom. 5 (1997) 1-92.
- [18] T. Ivey, *Ricci solitons on compact three-manifolds*. Diff. Geom. Appl., 301-307, (1993).
- [19] J. Jost, *Two-dimensional geometric variational problems*, J. Wiley and Sons, Chichstor, N.Y. 1991
- [20] B. Kleiner et J. Lott *Notes on Perelman's papers*, <http://www.math.lsa.umich.edu/research/ricciflow/posting123004.ps>
- [21] S. Maillot, *Flot de Ricci et Géométrisation des variétés de dimension 3. (D'après R. Hamilton et G. Perelman*, <http://www-irma.u-strasbg.fr/~maillot/ricci2.pdf>
- [22] J. Milnor, *Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds*, Notices of the AMS, vol 50, n° 10, nov 2003, Trad. française in *Gazette des Mathématiciens* 99, SMF, janvier 2004.
- [23] J. Morgan, *Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds*, Bulletin of the AMS, vol 42, n° 1, 57-78
- [24] H. Poincaré, *Analysis Situs, Cinquième complément à l'analysis Situs*, Rend. Circ. mat. Palerma 18 (1904) 45-110.
- [25] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. ArXiv : math.DG/0211159.
- [26] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*. ArXiv : math.DG/0303109.
- [27] G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*. ArXiv : math.DG/0307245