Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1 Soit X un espace topologique.

1. Montrer que les composantes connexes de X sont fermées. Sont-elles ouvertes ? Qu'en est-il des composantes connexes par arcs ?
2. Montrer que si $U \subset X$ est connexe, ouverte, fermée et non vide, c'est une composante connexe.
3. Montrer que sont équivalents :
   (a) Les composantes connexe par arcs sont ouvertes (et donc fermées).
   (b) Chaque point de X a un voisinage connexe par arcs.
4. Montrer que (b) implique que composantes connexes et composantes connexes par arcs coincident.

Exercice 2 Soient $K = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$,

$$C = ([0,1] \times 0)) \cup (K \times [0,1]) \cup (0 \times [0,1]) \subset \mathbb{R}^2$$

et $D = C \setminus 0 \times (0,1)$.

1. Déterminer les composantes connexes et connexes par arcs de C et D.
   On dit qu'en espace topologique X est *localement connexe* (resp. *localement connexe par arcs*) s'il admet en chaque point une base de voisinages connexes (resp. connexes par arcs).
2. Montrer que D n'est pas localement connexe, et qu'en ajoutant à D les points $(0, 1/n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient un espace localement connexe en 0 mais pas localement connexe par arcs.
3. Donner un exemple d'espace connexe par arcs non localement connexe par arcs.
4. Montrer qu'un espace topologique X est localement connexe si et seulement si pour tout ouvert U de X, les composantes connexes de U sont ouvertes dans X.

Exercice 3 Soient X un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X et $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la projection sur l'espace quotient.

1. Montrer que si X est connexe, alors l'espace quotient $X/\mathcal{R}$ est connexe.
2. Montrer que si $X/\mathcal{R}$ est connexe et toute fibre $\pi^{-1}\pi(x)$ est connexe, alors X est connexe.

Exercice 4 Soit X un espace topologique.

1. Montrer que si tout recouvrement ouvert de X contient un sous-recouvrement fini (on dit que X est <u>*quasi-compact*</u>) alors toute partie infinie A de X admet un point d'accumulation, c'est-à-dire $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ (on dit qu'il satisfait la propriété de *Bolzano-Weirstrass*).
2. Montrer que la réciproque est fausse en considérant l'espace produit $X = \mathbb{N} \times \{0,1\}$, où $\mathbb{N}$ est discret et $\{0,1\}$ est grossier. (La réciproque est vraie dans un espace métrique).
3. On suppose que X est séparé et 1-dénombrable. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :
   (a) Toute partie infinie de X admet un point d'accumulation.
   (b) Toute suite de X a une valeur d'adhérence.
   (c) Toute suite de X a une sous-suite convergente (on dit que X est *séquentiellement compact*).
   (d) Tout recouvrement ouvert *dénombrable* de X a un sous-recouvrement fini.

(Rq : l'implication (b)$\Rightarrow$ (c) est fausse si X est quelconque, cf Feuille 1, Exercice 2.4).

Exercice 5 (*Compactifié d'Alexandrov*) Un espace topologique X est *localement compact* si tout point de X admet un voisinage compact. Un espace compact $\widehat{X}$ est appelé *compactification* de X si $X \subset \widehat{X}$ (est un plongement) et si $\overline{X} = \widehat{X}$. Si X est compact il est clair que $\widehat{X} = X$ convient. On se propose de montrer que *tout espace topologique séparé localement compact non compact X admet une compactification $\widehat{X}$ telle que $\widehat{X} - X$ est un point, unique à homéomorphisme près sous cette contrainte* (compactification d'Alexandrov).

1. Soit X séparé localement compact non compact. Soit $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$, où $\infty \notin X$, et soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\widehat{X})$ constitué des parties $U \subset \widehat{X}$ tel que (1) $U \subset X$ est un ouvert de X, ou (2) $U = \widehat{X} - K$, où $K \subset X$ est compact.
   (a) Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\widehat{X}$ et que $(\widehat{X}, \mathcal{T})$ est une compactification de X.
   (b) Montrer l'unicité : si Y est une compactification de X telle que $Y - X$ est un point, alors Y est homéomorphe à $\widehat{X}$.
   (c) Réciproquement, montrer que si un espace topologique X admet une compactification d'Alexandrov, alors X est séparé localement compact.
2. On suppose que X est séparé. Soit $x \in X$ admettant un voisinage compact. Montrer que pour tout $U \in \mathcal{V}_x$ il existe $V \in \mathcal{V}_x$ compact tel que $\overline{V} \subset U$. Autrement dit, X admet une base de voisinages compacts en x.

Exercice 6 (*Filtres*) Soit X un espace topologique. On appelle $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ un *filtre* sur X si
(1) $\forall F \in \mathcal{F}, \forall A \in \mathcal{P}(X), F \subset A \Rightarrow A \in \mathcal{F}$.
(2) $\mathcal{F}$ est stable par intersection finie.
(3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
On dit que $\mathcal{F}$ est adhérent à $x \in X$ si $x \in \overline{F}$ pour tout $F \in \mathcal{F}$.

1. Soit $A \subset X$. Montrer que $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe un filtre de A adhérent à x.
2. On suppose X séparé. Montrer l'équivalence de :
   (a) X est compact.
   (b) Pour toute famille $\mathcal{F}$ de fermés de X d'intersections finies non vides, alors $\cap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.
   (c) Tout filtre de X admet un point adhérent.

Exercice 7 (*Droite à double origine*) Soit $M = \mathbb{R}^* \cup \{a, b\}$ muni de la topologie engendrée par les parties $B \subset M$ telles que $B \subset \mathbb{R}^*$ est ouvert, $B = (]-\varepsilon, \varepsilon[- \{0\}) \cup \{a\}$ ou $B = (]-\varepsilon, \varepsilon[\backslash \{0\}) \cup \{b\}$, pour tout $\varepsilon > 0$.

1. Montrer que M est une variété topologique de dimension 1, connexe et non séparée.
2. Montre que M est homéomorphe au quotient $X = \mathbb{R} \times \{1, 2\}/\sim$, où $\mathbb{R} \times \{1, 2\}$ est l'espace produit et la relation d'équivalence est engendrée par $(x, 1) \sim (x, 2)$ pour $x \neq 0$.

Exercice 8 Montrer que si $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$, alors $n = 1$.

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) = \left(\left(1 + \frac{1}{2} \cos y\right) \cos x, \left(1 + \frac{1}{2} \cos y\right) \sin x, \frac{1}{2} \sin y \right)$$

et soit $M = f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ muni de la topologie induite.

1. Montrer que M s'obtient par révolution autour de l'axe (Oz) d'un cercle de rayon $1/2$.
2. Montrer que f induit un homéomorphisme entre le tore $\mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2$ et M.
3. En déduire que M est une surface topologique, qu'on peut munir d'un atlas à trois cartes.