Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1 Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe et soit $a \in \mathrm{Int} C$.

1. Montrer que toute demi-droite issue de a rencontre le bord ∂C en au plus un point.
2. On suppose C borné. Montrer que ∂C est homéomorphe à $\mathbf{S}^{n-1}$. (*Indication : on pourra supposer* $a = 0$ *et considérer l'application* $x \in \partial C \mapsto \frac{x}{||x||} \in \mathbf{S}^{n-1}$).
3. On suppose C compact. Montrer que C est homéomorphe à $\mathbb{B}^n$ (on pourra montrer que C est homéomorphe à un cône sur ∂C)
4. En déduire que le simplexe standard Δ^n est est homéomorphe à $\mathbb{B}^n$ et que $\partial \Delta^n$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^{n-1}$.

Exercice 2

1. Donner une triangulation du tore T^2 et de la bouteille de Klein K^2 faisant intervenir 9 sommets (on pourra découper T^2 en 3 cylindres). En déduire les caractéristiques d'Euler $\chi(\mathrm{T}^2)$, $\chi(\mathrm{K}^2)$.
2. Trouver une triangulation du plan projectif P^2 à 6 sommets et en déduire $\chi(\mathrm{P}^2)$.
3. Montrer que P^2 peut s'obtenir en recollant un ruban de Moebius M^2 et un disque $\mathbb{D}^2$ le long de leur bord. Calculer $\chi(\mathrm{M}^2)$ et $\chi(\mathbb{D}^2)$, et en déduire un autre calcul de $\chi(\mathrm{P}^2)$.
4. Montrer que K^2 peut s'obtenir en recollant deux rubans de Moebius le long de leur bord. Recalculer $\chi(\mathrm{K}^2)$.
5. Montrer que si X et Y sont des surfaces compactes connexes, $\chi(X \# Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2$.
6. En déduire les caractéristiques d'Euler des surfaces Σ_g et N_h.

Exercice 3 Identifier les surfaces définies par les symboles suivants :

1. $abab^{-1}$
2. $abcda^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}$.
3. $abcab^{-1}c^{-1}$.
4. $abcdab^{-1}c^{-1}d^{-1}$
5. $abcdea^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}e^{-1}$

Exercice 4 Montrer que pour $h \in \mathbb{N}^*$, $\Sigma_g \# N_h$ est homéomorphe à N_{h+2g}.

Exercice 5 (Groupes classiques)

1. Montrer que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \text{ inversible}\}$ est ouvert dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et a deux composantes connexes.
2. Montrer que $\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), M^t M = I_n\}$ est une variété compacte à deux composantes connexes, dont l'une est $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R}), \det M = 1\}$. *Indication : on pourra montrer que c'est une sous-variété.*

Exercice 6

1. Montrer que $\mathrm{P}^n_{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^n/(x \sim \pm x)$, et au quotient $\mathbb{B}^n/\mathcal{R}$ de la boule unité fermée n-dimensionnelle , où $x\mathcal{R}y$ si $x = y$ ou $x = -y \in \mathbf{S}^{n-1}$.
2. Montrer que $\mathrm{P}^n_{\mathbb{C}}$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^{2n+1}/(x \sim e^{i\theta}x, \forall\theta)$.

Exercice 7 On définit une application $h : \mathbb{B}^3 \to \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ comme suit : $h(0)$ est la matrice Identité, et si $x \neq 0$, $h(x)$ désigne la rotation d'axe $(0x)$, orientée de 0 vers x et d'angle $\pi||x||$. Déduire de h un homéomorphisme entre $\mathrm{P}^3_{\mathbb{R}}$ et $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.

Exercice 8 On note T_1S^2 l'espace des vecteurs unitaires tangents à $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire

$$T_1S^2 = \{(x, v) \in \mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}^3, \langle x, v\rangle = 0, ||v|| = 1\}.$$

Montrer que T_1S^2 est homéomorphe à $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.

Exercice 9 Dans $\mathbb{R}^3$ on note $f : \{x_3 = -1\} \mapsto \mathbf{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ la réciproque de la projection stéréographique.

1. Donner une expression analytique de f.
2. Construire une application $g : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbf{S}^2$, dont la restriction à $\mathbb{C} \times \{1\}$ est l'application f, et invariante par l'action $(z_1, z_2) \mapsto (\lambda z_1, \lambda z_2)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En déduire l'existence d'un homéomorphisme entre $\mathrm{P}^1_{\mathbb{C}}$ et $\mathbf{S}^2$.