Feuille d'exercices n° 1

Définitions. On dit qu'un espace topologique X est *à base dénombrable en* $x \in X$ s'il existe un système fondamental dénombrable de voisinages de x. On dit que X est 1-*dénombrable* si X est à base dénombrable en chaque point. On dit que X est 2-*dénombrable*, ou *à base dénombrable*, s'il admet une base dénombrable pour sa topologie.

Exercice 1 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Prouver que $\mathcal{B}$ est une base de la topologie de X si et seulement si pour tout $x \in X$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_x$ est un système fondamental de voisinages de x. (Corollaire de l'implication : 2-dénombrable $\Rightarrow$ 1-dénombrable).

Exercice 2 (*Critères séquentiels*) Soit X un espace topologique et soit $x \in X$.

1. On suppose que X est à base dénombrable en x. Montrer qu'il existe $\mathcal{W} = \{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}_x$ un système fondamental dénombrable de voisinages de x telle que $V_{n+1} \subset V_n$ pour tout entier n (i.e. $\mathcal{W}$ est analogue aux $B(x, \frac{1}{n})$ d'un espace métrique).
2. Soit $A \subset X$. Montrer que s'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x, alors $x \in \overline{A}$. Montrer que si X est à base dénombrable en x, la réciproque est vraie.
3. Soit Y un espace topologique et $f : X \to Y$ une fonction. Montrer que si f est continue en x, alors pour toute suite (x_n) de X convergeant vers x, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. Montrer que si X est à base dénombrable en x, la réciproque est vraie.
4. Soit $X = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \cup \{(0,0)\}$ muni de la topologie suivante : discrète sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, et les voisinages de $(0,0)$ sont les parties $U \subset X$ contenant $(0,0)$ telles que toute colonne $n \times \mathbb{N}^*$ sauf un nombre fini soit contenue dans U sauf pour un nombre fini de points. Montrer que $(0,0)$ est adhérent à $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ mais n'est limite d'aucune suite de A.

Exercice 3 Soit X un espace topologique 2-dénombrable. Montrer que toute base de la topologie de X admet une sous-famille dénombrable qui est aussi une base. (*Indication : Soit* $\mathcal{B} = \{B_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ *une base dénombrable, soit* $\mathcal{B}'$ *une autre base. Pour les couples* $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ *où c'est possible, choisir* $B'_{i,j} \in \mathcal{B}'$ *tel que* $B_i \subset B'_{i,j} \subset B_j$.)

Exercice 4 On dit qu'un espace topologique X est *Lindelöf* si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement dénombrable, et que X est *séparable* s'il existe $D \subset X$ dénombrable dense.

1. On suppose que X est 2-dénombrable. Montrer qu'il est Lindelöf et séparable.
2. On suppose X métrisable et Lindelöf. Montrer que X est 2-dénombrable.
3. On suppose X métrisable et séparable. Montrer que X est 2-dénombrable. En déduire que $C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la distance uniforme est 2-dénombrable.

Exercice 5 (*Une topologie* 1-*dénombrable mais pas* 2-*dénombrable*)

1. Montrer que $\mathbb{R}$ usuel est 2-dénombrable.
   On définit $\mathcal{B} = \{[a, b[, a < b \in \mathbb{R}\}$.
2. Montrer que $\mathcal{B}$ est la base d'une topologie sur $\mathbb{R}$ strictement plus fine que la topologie usuelle. On note $\mathbb{R}_\ell$ l'espace $\mathbb{R}$ muni de cette topologie.
3. Montrer que $\mathbb{R}_\ell$ est (a) 1-dénombrable (b) séparable (c) Lindelöf (d) non 2-dénombrable. En déduire que $\mathbb{R}_\ell$ n'est pas métrisable. (*Indication : (c) Il suffit que* $\forall \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ *recouvrement,* $\exists \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ *recouvrement dénombrable ; puis considérer* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ *recouvrement,* $C = \cup_{A \in \mathcal{A}} \overset{\circ}{A}$*, montrer que* $\mathbb{R} \setminus C$ *est dénombrable... (d) Considérer les* $[x, x+1[$*, où* $x \in \mathbb{R}$.)

Exercice 6 (*Topologie finale, topologie quotient, topologie somme*)

1. Soient $\{X_i\}_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, Y un ensemble, et $f_i : X_i \to Y$ des applications.
   (a) Montrer que $\mathcal{S} = \{B \in \mathcal{P}(Y) : f_i^{-1}(B) \text{ est ouvert } \forall i \in I\}$ est une topologie sur Y, la plus fine rendant toutes les f_i continues. On l'appelle *topologie finale associée aux f_i*.
   (b) *(Propriété universelle)* Montrer que $\mathcal{S}$ est caractérisée par la propriété suivante : *Pour tout espace topologique Z et toute application $g : (Y, \mathcal{S}) \to Z$, g est continue si et seulement si les $g \circ f_i : X_i \to Z$ sont continues.*
2. *(Topologie somme)* Soit $Y = X_1 \coprod X_2$ la somme disjointe de deux espaces topologiques, et $f_i : X_i \to Y$ les injections canoniques. Montrer que la topologie finale associée aux f_i est la topologie somme sur $X_1 \coprod X_2$. En déduire que $g : X_1 \coprod X_2 \to Z$ est continue si et seulement si les $g \circ f_i$ sont continues.
3. *(Topologie quotient)* Soit X un espace topologique, et soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X.
   (a) Quelle est la topologie finale associée à la projection canonique $\pi : X \to X/\mathcal{R}$?
   (b) On prend $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, et $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Q}$. Quelle topologie obtient-on sur le quotient $X/\mathcal{R}$?
   (c) Même question avec $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Z}$.
   (d) *(Bouquet infini de cercles)* On prend maintenant $x\mathcal{R}y$ si $x = y$ ou si $x, y \in \mathbb{Z}$. Montrer que $X/\mathcal{R}$ n'a pas de base dénombrable en la classe de 0. (*Indication : procédé diagonal).*

Exercice 7 (*Topologie initiale, topologie produit, topologie de la convergence simple*)
Soient $\{X_i\}_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, X un ensemble, et $f_i : X \to X_i$ des applications. On appelle *topologie initiale associée aux f_i* la topologie la moins fine sur X rendant toutes les f_i continues. Dans la suite on note $\mathcal{T}_X$ cette topologie.

1. Montrer que $\mathcal{T}_X$ est engendrée par $\mathcal{A} = \{f_i^{-1}(U_i) \mid i \in I, U_i \subset X_i \text{ ouvert}\}$. En déduire que l'ensemble des intersections finies $f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \ldots \cap f_{i_\ell}^{-1}(U_{i_\ell})$ (où $U_{i_j} \subset X_{i_j}$ ouverts) est une base de $\mathcal{T}_X$.
2. Montrer que $\mathcal{T}_X$ est caractérisée par la propriété universelle suivante : *Pour tout espace topologique Z et toute application $g : Z \to (X, \mathcal{T}_X)$, g est continue si et seulement si les applications $f_i \circ g : Z \to X_i$ sont continues.* (Indication : pour la continuité de g, il suffit de la tester sur $\mathcal{A}$).
3. *(Topologie produit)* On prend $X = \prod_{i\in I} X_i$ et $f_i : X \to X_i$ les projections canoniques.
   (a) Montrer que la topologie initiale sur X est la topologie produit, et que les f_i sont ouvertes.
   (b) Soit $U = \prod_{i\in I} U_i$, où $U_i \subset X_i$. Montrer que U est ouvert si et seulement si U_i est ouvert pour chaque $i \in I$, et égal à X_i sauf en nombre fini.
   (c) Montrer que la topologie d'EVN de $\mathbb{R}^n$ coincide avec la topologie produit issue de $\mathbb{R}$ usuel.
   (d) On suppose I fini et les X_i discrets. Montrer que $\prod_{i\in I} X_i$ est discret.
   (e) On suppose I infini et $|X_i| \geqslant 2$ pour tout $i \in I$. Montrer que $\prod_{i\in I} X_i$ n'est pas discret.
4. *(Topologie de la convergence simple)* Soit Y un espace topologique. On suppose que $X_i = Y$ pour tout $i \in I$, et on note $Y^I = \prod_{i\in I} X_i$ l'espace produit muni de la topologie produit. Notez que Y^I est l'ensemble $\{f : I \to Y\}$ des applications de I dans Y.
   (a) Montrer qu'une suite (f_n) de Y^I converge vers $f \in Y^I$ si et seulement si les fonctions $f_n : I \to Y$ convergent simplement vers $f : I \to Y$.
   (b) On considère $[0,1]^{[0,1]}$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to [0,1]$. Soit $A \subset [0,1]^{[0,1]}$ l'ensemble des fonctions nulles en dehors d'une partie dénombrable de $[0,1]$. Montrer que A est dense dans $[0,1]^{[0,1]}$ (i.e. $\overline{A} = [0,1]^{[0,1]}$) mais que le critère séquentiel d'adhérence ne s'applique pas en la fonction $f = 1$ (i.e. elle n'est limite d'aucune suite d'élements de A). En déduire que la topologie de la convergence simple n'est pas métrisable.

Exercice 8 Soit X un espace topologique et soit A une partie de X. Prouvez qu'un itérant "intérieur" et "adhérence", on obtient à partir de A au plus 7 ensembles distincts. Donner un exemple où ils sont tous distincts (on pourra le chercher dans $X = \mathbb{R}$ usuel).

Exercice 9

1. Soient X un espace topologique, et S une partie de X munie de la topologie induite. Prouver que pour tout $A \subset S$, $\overline{A}^S = \overline{A} \cap S$.
2. On munit $\mathbb{Q}$ de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$. Montrer que
   (a) $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = \emptyset$ mais $\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.
   (b) $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$, $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

Exercice 10 Déterminer les topologies métrisables sur un ensemble fini.

Exercice 11 *(Topologie de Zariski).* Soit $\mathbf{k}$ un corps commutatif et soit $n \geqslant 1$ un entier. Pour tout idéal $\mathbf{a}$ de l'anneau $\mathbf{k}[X_1, ..., X_n]$, on pose $V(\mathbf{a}) = \{x \in \mathbf{k}^n : P(x) = 0 \text{ pour tout } P \in \mathbf{a}\}$.

1. Soient $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ et $\mathbf{a}_i$, $i \in I$, des idéaux de $\mathbf{k}[X_1, ..., X_n]$. Prouver que $V(\mathbf{a}) \cup V(\mathbf{b}) = V(\mathbf{a} \cap \mathbf{b}) = V(\mathbf{ab})$ et que $\cap_{i \in I} V(\mathbf{a}_i) = V(\sum_{i \in I} \mathbf{a}_i)$.
2. En déduire que les $V(\mathbf{a})$ sont les fermés d'une topologie $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{k}[X_1, ..., X_n]$ (dite de Zariski).
3. Montrer que les points sont fermés.
4. Montrer que si $\mathbf{k}$ est infini, deux ouverts non vides quelconques s'intersectent (on pourra commencer par traiter le cas $n = 1$).
5. Montrer l'equivalence de (a) $\mathbf{Z}$ séparée (b) $\mathbf{k}$ fini (c) $\mathbf{Z}$ discrète (d) $\mathbf{Z}$ métrisable.
6. Sur $\mathbb{R}^n$, montrer que $\mathbf{Z}$ est moins fine que la topologie usuelle.

Exercice 12 Soient X et Y des espaces topologiques et soit $f : X \to Y$ une application. Prouver l'équivalence des assertions suivantes : (a) f est continue, (b) $f^{-1}(F)$ est fermé pour tout fermé F de Y , (c) f est continue en tout point $x \in X$, (d) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour toute partie $A \subset X$.

Exercice 13 On note $\mathbf{B}^n$ (resp. $\mathbf{S}^{n-1}$) la boule unité (resp. sphère unité) de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien usuel. Montrer que le cône (resp. la suspension) de $\mathbf{S^n}$ est homéomorphe à la boule $\mathbf{B}^{n+1}$ (resp. $\mathbf{S}^{n+1}$).

Exercice 14 On considère l'espace $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ muni de la topologie suivante : U est un ouvert si
— U est un ouvert de $\mathbb{R}$, ou
— $\infty \in U$ et le complémentaire de $U \setminus \{\infty\}$ dans $\mathbb{R}$ est un fermé borné (compact).
Montrer que X est homéomorphe au cercle S^1.

Exercice 15 Soit $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ une application injective continue. Soit Y l'image de $]0, 1[$ par f . Montrer que $f^{-1} : Y \to]0, 1[$ est continue.

Exercice 16 Soit $\{X_i\}_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques séparés. Montrer que l'espace produit $\prod_{i \in I} X_i$ est séparé.