Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1

1. Soient X un espace topologique et $f, g : X \to \mathbf{S}^n$ deux applications continues telles que $f(x) \neq -g(x), \forall x \in X$ (f et g ne sont jamais antipodales). Montrer que f et g sont homotopes. En particulier, une application non surjective $X \to \mathbf{S}^n$ est homotope à une constante.
2. Soit $f : X \to Y$ une application continue. Montrer que f est homotope à une constante si et seulement si f a une extension continue $F : C(X) \to Y$, où X est identifié à $X \times \{0\} \subset C(X)$ son cône. En particulier $f : \mathbf{S}^n \to Y$ est homotope à une constante si et seulement si f a une extension continue $F : \mathbb{B}^{n+1} \to Y$.

Exercice 2 Soient $f : X \to Y$ une application continue et $g_L, g_R : Y \to X$ continues telles que $g_L \circ f \sim \mathrm{id}_X$ et $f \circ g_R \sim \mathrm{id}_Y$. Montrer qu'il existe $g : Y \to X$ telle que $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$ et $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$ (i.e. f est une équivalence d'homotopie).

Exercice 3

1. Montrer qu'un espace topologique X est contractile si et seulement si $[Y, X] = \{*\}$ pour tout espace topologique Y.
2. En déduire que X est contractile si et seulement si id_X est homotope à $x \mapsto x_0, \forall x_0 \in X$.
3. Montrer qu'un espace contractile est connexe par arcs.
4. Montrer le cône $C(X)$ d'un espace topologique X est contractile.

Exercice 4

1. Montrer que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ a le type d'homotopie de S^n.
2. Montrer que le cyclindre et le ruban de Moebius ont le type d'homotopie du cercle.

Exercice 5 On appelle un *peigne* le sous-espace topologique X de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$X := [0,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0,1] \cup \{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\} \times [0,1].$$

Soient $x_0 = (0,1)$ et $f_0 : X \to X$ définie par $f_0(x) = x_0$, $\forall x \in X$.

1. Prouver que f_0 est homotope à Id_X , en déduire en particulier que X est contractile.
2. (a) Montrer que X n'est pas localement connexe au voisinage de x_0.
   (b) En déduire (par exemple en utilisant le théorème de Heine-Cantor) que f_0 n'est pas homotope à id_X relativement à $\{x_0\}$.

Exercice 6 Montrer que tout lacet $[0,1] \to \mathbf{S}^n$, $n \geqslant 2$ est strictement homotope à un lacet évitant un point (on pourra utiliser le théorème de Heine-Cantor pour se ramener à une approximation simpliciale). En déduire que $\pi_1(S^n) = \{*\}$ pour $n \geqslant 2$.
Remarque : On peut montrer semblablement que $\pi_i(S^n) = \{*\}$ pour tout $i < n$.

Exercice 7 Soit $(G, \cdot)$ un *groupe topologique*, c'est-à-dire un groupe muni d'une topologie telle que le produit $(g, h) \in G \times G \mapsto g \cdot h \in G$ et l'inverse $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ soient continues. Si α, β sont deux chemins dans G on note $\alpha \cdot \beta$ le chemin $t \mapsto \alpha(t) \cdot \beta(t)$.

1. Montrer que si $\alpha \sim \alpha'$ et $\beta \sim \beta'$, alors $\alpha \cdot \beta \sim \alpha' \cdot \beta'$.
2. Soient α, β des lacets basés en $e \in G$, établir que (notant e le lacet constant e_e)

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &\sim (\alpha e) \cdot (e\beta) = \alpha\beta \\ &\sim (e\alpha) \cdot (\beta e) = \beta\alpha \end{aligned}$$

   Que peut-on en conclure sur $\pi_1(G, e)$?

Exercice 8 Soient X et Z deux espaces topologiques. La topologie compacte-ouverte sur $\mathcal{C}(Z, X)$ est par définition la topologie engendrée par $W_{K,U} = \{f \in \mathcal{C}(Z, X) : f(K) \subset U\}$, où K est un compact de Z, et U est un ouvert de X. On pose $I = [0, 1]$, et munit $\mathcal{C}(I, X)$ de la topologie compacte-ouverte.

1. Soit $H : I \times I \to X$ une homotopie. Montrer que l'application $c_H : I \to \mathcal{C}(I, X)$ définie par $c_H(u) = H(., u)$ est continue.
2. Inversement, si $c : I \to \mathcal{C}(I, X)$ est un chemin continu, on pose $H(t, u) = c(u)(t)$. Prouver que $H : I \times I \to X$ est continue.
3. Soit $\Omega(X, x)$ l'ensemble des lacets de l'espace pointé (X, x), muni de la topologie induite par $\mathcal{C}(I, X)$. Déduire des questions précédentes que $\pi_1(X, x) = \pi_0(\Omega(X, x))$ (π_0 désigne l'ensemble des composantes connexes par arcs).
   Remarque : Le produit de lacets munit $\Omega(X, x)$ d'une multiplication continue, avec e_x élément neutre à homotopie prés, et permet de montrer comme dans l'exercice 6 que $\pi_1(\Omega(X, x)) = \pi_2(X, x)$ est abélien (et plus généralement que $\pi_n(X, x) = \pi_{n-1}(\Omega(X))$ sont abéliens, $\forall n \geqslant 2$).

Exercice 9 On dit que $A \subset X$ est un *rétract* de X s'il existe $r : X \to A$ continue telle que $r_{|A} = \mathrm{id}_A$.

1. Montrer que si X est séparé, un rétract $A \subset X$ est fermé dans X.
2. Montrer que $A \subset X$ est un rétract de X si et seulement toute application continue $f : A \to Z$ a une extension continue $F : X \to Z$.
3. Soit $r : X \to A$ une rétraction et $i : A \to X$ l'inclusion naturelle. On fixe $a \in A$ et on note r_*, i_* les applications induites sur les groupes fondamentaux (pointés en a).
   (a) Montrer que i_* est injective, que r_* est surjective, et que $\pi_1(X, a)$ est engendré par les sous-groupes $i_*(\pi_1(A, a))$ et $\ker r_*$.
   (b) Supposons que $i_*(\pi_1(A, a))$ est distingué dans $\pi_1(X, a)$. Prouver que $\pi_1(X, a)$ est le produit direct de $i_*(\pi_1(A, a))$ et $\ker r_*$.
4. On dit qu'un rétract $A \subset X$ est un *rétract par déformation* de X si l'identité id_X est homotope à une rétraction $r : X \to A$. Prouver que dans ce cas r_* et i_* sont des isomorphismes.