Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Déterminer les topologies métrisables sur un ensemble fini.

Exercice 2. *(Topologie de Zariski)*. Soit $\mathbf{k}$ un corps commutatif et soit $n \geqslant 1$ un entier. Pour tout idéal $\mathbf{a}$ de l'anneau $\mathbf{k}[X_1, ..., X_n]$, on pose $V(\mathbf{a}) = \{x \in \mathbf{k}^n : P(x) = 0 \text{ pour tout } P \in \mathbf{a}\}$.

1. Soient $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ et $\mathbf{a}_i$, $i \in I$, des idéaux de $\mathbf{k}[X_1, ..., X_n]$. Prouver que $V(\mathbf{a}) \cup V(\mathbf{b}) = V(\mathbf{a} \cap \mathbf{b}) = V(\mathbf{ab})$ et que $\cap_{i \in I} V(\mathbf{a}_i) = V(\sum_{i \in I} \mathbf{a}_i)$.
2. En déduire que les $V(\mathbf{a})$ sont les fermés d'une topologie $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{k}[X_1, ..., X_n]$ (dite de Zariski).
3. Montrer que les points sont fermés.
4. Montrer que si $\mathbf{k}$ est infini, deux ouverts non vides quelconques s'intersectent (on pourra commencer par traiter le cas $n = 1$).
5. Montrer l'equivalence de (a) $\mathbf{Z}$ séparée (b) $\mathbf{k}$ fini (c) $\mathbf{Z}$ discrète (d) $\mathbf{Z}$ métrisable.
6. Sur $\mathbb{R}^n$, montrer que $\mathbf{Z}$ est moins fine que la topologie usuelle.

Exercice 3. Soit X un espace topologique et soit A une partie de X. Prouvez qu'un itérant "intérieur" et "adhérence", on obtient à partir de A au plus 7 ensembles distincts. Donner un exemple où ils sont tous distincts (on pourra le chercher dans $X = \mathbb{R}$ usuel).

Exercice 4.

1. Soient X un espace topologique, et S une partie de X munie de la topologie induite. Prouver que pour tout $A \subset S$, $\overline{A}^S = \overline{A} \cap S$.
2. On munit $\mathbb{Q}$ de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$. Montrer que
   (a) $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = \emptyset$ mais $\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.
   (b) $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$, $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Prouver que $\mathcal{B}$ est une base de la topologie de X si et seulement si pour tout $x \in X$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_x$ est une base (on dit aussi *système fondamental*) de voisinages de x.

Exercice 6. (*Bases dénombrables de voisinages et caractérisations séquentielles*) Soient X, Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application, $A \subset X$ et $x \in X$.

1. (a) Montrer que s'il existe une suite de A convergeant vers x, alors $x \in \overline{A}$.
   (b) On suppose f continue. Montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de X convergeant vers x, alors $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.
2. On suppose que X admet une base dénombrable de voisinages de x.
   (a) Montrer qu'il existe $\mathcal{W} = \{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}_x$ une base de voisinages de x telle que $V_{n+1} \subset V_n$ pour tout entier n (i.e. $\mathcal{W}$ est analogue aux $B(x, \frac{1}{n})$ d'un espace métrique).
   (b) On suppose que $x \in \overline{A}$. Montrer que x est limite d'une suite de A.
   (c) On suppose que pour toute suite (x_n) de X convergeant vers x, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. Montrer que f est continue en x.

3. Soit $X = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \cup \{(0,0)\}$ muni de la topologie suivante : discrète sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, et les voisinages de $(0,0)$ sont les parties $U \subset X$ contenant $(0,0)$ telles que toute colonne $n \times \mathbb{N}^*$ sauf un nombre fini soit contenue dans U sauf pour un nombre fini de points. Montrer que $(0,0)$ est adhérent à $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ mais n'est limite d'aucune suite de A.

Exercice 7. Soit X un ensemble, soit $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ l'ensemble des parties de $U \subset X$ telle que $X - U$ est fini ou égal à X.

1. Montrer que $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ est une topologie sur X. On l'appelle *topologie du complément fini.*
2. Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathcal{F})$ n'est pas à bases dénombrables de voisinages (c'est vrai pour tout $(X, \mathcal{T}_\mathcal{F})$ où X n'est pas dénombrable).
3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X prenant une infinité de valeurs. Montrer que (x_n) converge vers tout point dans $(X, \mathcal{T}_\mathcal{F})$. En déduire que la caractérisation séquentielle de l'adhérence est valide.

Exercice 8. Un espace topologique X est *à base dénombrable* s'il admet une base dénombrable de topologie (il est alors à bases dénombrables de voisinages).

1. On suppose X à base dénombrable. Montrer qu'il existe $D \subset X$ dénombrable dense (on dit X *séparable*).
2. On suppose X métrisable et séparable. Montrer que X est à base dénombrable. En déduire que $C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la distance uniforme est à base dénombrable.
3. Montrer que l'espace vectoriel normé ℓ^∞ des suites bornées n'est pas à base dénombrable.

Exercice 9. (*Topologie finale, topologie quotient*)

1. Soient X un espace topologique, Y un ensemble, et $\pi : X \to Y$ une application
   (a) Montrer que $\mathcal{S} = \{U \subset Y : \pi^{-1}(U) \text{ est ouvert}\}$ est une topologie sur Y, la plus fine rendant π continue. On l'appelle *topologie finale associée à* π.
   (b) *(Propriété universelle)* Montrer que $\mathcal{S}$ est caractérisée par la propriété suivante : *Pour tout espace topologique Z et toute application $g : (Y, \mathcal{S}) \to Z$, g est continue si et seulement si $g \circ \pi : X \to Z$ est continue.*
   (c) On suppose π surjective, soit $g : (Y, \mathcal{S}) \to Z$.
      i. Montrer que g est surjective si et seulement si $g \circ \pi$ est surjective
      ii. Montrer que si $g \circ \pi$ est ouverte, resp. fermée, alors g est ouverte, resp. fermée.
2. *(Topologie quotient)* Soit X un espace topologique, et soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X.
   (a) Quelle est la topologie finale associée à la projection canonique $\pi : X \to X/\mathcal{R}$?
   (b) Soit $f : X \to Z$ continue, surjective telle que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_f$. On suppose de plus f ouverte ou fermée. Montrer que f se factorise en un homéomorphisme $\bar{f} : X/\mathcal{R} \to Z$.
   (c) Soit $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, avec $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Q}$. Quelle topologie obtient-on sur le quotient $X/\mathcal{R}$?
   (d) Même question avec $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Z}$.
   [Indication : factoriser l'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) = e^{2i\pi t} \in S^1 \subset \mathbb{C}$].
   (e) *(Bouquet infini de cercles)* On prend maintenant $x\mathcal{R}y$ si $x = y$ ou si $x, y \in \mathbb{Z}$. Montrer que $X/\mathcal{R}$ n'a pas de base dénombrable de voisinages en $\overline{0}$. (*Indication : procédé diagonal).* Est-ce que $X/\mathcal{R}$ est homéomorphe à $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} S((0, \frac{1}{n}), \frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}^2$?

Exercice 10 On note $\mathbf{B}^n$ (resp. $\mathbf{S}^{n-1}$) la boule unité (resp. sphère unité) de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien usuel. Montrer que le cône (resp. la suspension) de $\mathbf{S^n}$ est homéomorphe à la boule $\mathbf{B}^{n+1}$ (resp. $\mathbf{S}^{n+1}$).

Exercice 11 Soient X et Y des espaces topologiques et soit $f : X \to Y$ une application. Prouver l'équivalence des assertions suivantes :

(a) f est continue.

(b) $f^{-1}(F)$ est fermé pour tout fermé F de Y.

(c) f est continue en tout point $x \in X$.

(d) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour toute partie $A \subset X$.

Exercice 12 (*Recollement d'applications continues*). Soient X, Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application et $(A_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X. On suppose les restrictions $f_{|A_i} : A_i \to Y$ continues pour la topologie induite.

1. On suppose les A_i ouverts, montrer que f est continue.
2. On suppose les A_i fermés et I fini. Montrer que f est continue. Est-ce vrai avec I infini ?

Exercice 13. (*Topologie initiale, topologie produit, topologie de la convergence simple*)
Soient $\{X_i\}_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, X un ensemble, et $f_i : X \to X_i$ des applications. On appelle *topologie initiale associée aux f_i* la topologie la moins fine sur X rendant toutes les f_i continues. Dans la suite on note $\mathcal{T}_X$ cette topologie.

1. Montrer que $\mathcal{T}_X$ est engendrée par les $f_i^{-1}(U_i), U_i \subset X_i$ ouvert, $i \in I$. En déduire que l'ensemble des intersections finies $f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \ldots \cap f_{i_\ell}^{-1}(U_{i_\ell})$ (où $U_{i_j} \subset X_{i_j}$ ouverts) est une base de $\mathcal{T}_X$.
2. Montrer que $\mathcal{T}_X$ est caractérisée par la propriété universelle suivante : *Pour tout espace topologique Z et toute application $g : Z \to (X, \mathcal{T}_X)$, g est continue si et seulement si les applications $f_i \circ g : Z \to X_i$ sont continues.*
   [Indication : pour la continuité de g, il suffit de la tester sur les $f_i^{-1}(U_i)$]
3. *(Topologie produit)* On prend $X = \prod_{i\in I} X_i$ et $f_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ les projections canoniques.
   (a) Constater que $\mathcal{T}_X$ est la topologie produit, et montrer que les f_i sont ouvertes.
   (b) Soit $U = \prod_{i\in I} U_i$, où $U_i \subset X_i$. Montrer que U est ouvert si et seulement si U_i est ouvert pour chaque $i \in I$, et égal à X_i sauf en nombre fini.
   (c) Montrer que la topologie d'EVN de $\mathbb{R}^n$ coincide avec la topologie produit issue de $\mathbb{R}$ usuel.
4. *(Topologie de la convergence simple)* Soit Y un espace topologique. On suppose que $X_i = Y$ pour tout $i \in I$, et on note $Y^I = \prod_{i\in I} X_i$ l'espace produit muni de la topologie produit. Notez que Y^I est l'ensemble $\{f : I \to Y\}$ des applications de I dans Y.
   (a) Montrer qu'une suite (f_n) de Y^I converge vers $f \in Y^I$ si et seulement si les fonctions $f_n : I \to Y$ convergent simplement vers $f : I \to Y$.
   (b) On considère $[0,1]^{[0,1]}$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to [0,1]$. Soit $A \subset [0,1]^{[0,1]}$ l'ensemble des fonctions nulles en dehors d'une partie dénombrable de $[0,1]$.
      i) Montrer que A est dense dans $[0,1]^{[0,1]}$ (i.e. $\overline{A} = [0,1]^{[0,1]}$).
      ii) Montrer que la fonction $f = 1$ n'est limite d'aucune suite d'élements de A. En déduire que la topologie de la convergence simple n'est pas métrisable.

Exercice 14. Soit $\{X_i\}_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques séparés. Montrer que l'espace produit $\prod_{i\in I} X_i$ est séparé.