Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1 Soient X un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X et $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la projection sur l'espace quotient.

1. Montrer que si X est connexe, alors l'espace quotient $X/\mathcal{R}$ est connexe.
2. Montrer que si $X/\mathcal{R}$ et toute fibre $\pi^{-1}\pi(x)$ sont connexes, alors X est connexe.

Exercice 2 Soient $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe et $a \in \mathrm{Int}C$.

1. Montrer que toute demi-droite issue de a rencontre la frontière ∂C en au plus un point.
2. On suppose C borné, montrer que ∂C est homéomorphe à $\mathbf{S}^{n-1}$. [*On pourra supposer* $a = 0$ *et considérer l'application* $x \in \partial C \mapsto \frac{x}{||x||} \in \mathbf{S}^{n-1}$].
3. On suppose C compact, montrer que C est homéomorphe à la boule unitée fermée $\mathbb{B}^n = \overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^n$ [*On pourra montrer que* C *est homéomorphe à un cône sur* ∂C]
4. En déduire que le simplexe standard Δ^n est homéomorphe à $\mathbb{B}^n$ et que $\partial\Delta^n$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^{n-1}$.

Exercice 3 Montrer qu'une variété topologique de dimension 0 est un espace topologique discret.

Exercice 4 (*Droite à double origine*) Soit $M = \mathbb{R}^* \cup \{a, b\}$ muni de la topologie engendrée par les parties de M suivantes : tout ouvert $B \subset \mathbb{R}^*$, $(]-\varepsilon, \varepsilon[-\{0\}) \cup \{a\}$, $(]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus\{0\}) \cup \{b\}$ (pour tout $\varepsilon > 0$).

1. Montrer que M est une variété topologique de dimension 1, connexe et non séparée.
2. Montre que M est homéomorphe au quotient $X = \mathbb{R} \times \{1, 2\}/\sim$, où $\mathbb{R} \times \{1, 2\}$ est l'espace produit et la relation d'équivalence est engendrée par $(x, 1) \sim (x, 2)$ pour tout $x \neq 0$.

Exercice 5 Montrer que si $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$, alors $n = 1$.

Exercice 6 Montrer que $\mathrm{P}^1_{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^1$.

Exercice 7 Soit $\varphi_N : \mathbf{S}^2 \setminus \{N\} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la projection stéréographique de pôle nord, définie par $\varphi_N(u, t) = \dfrac{u}{1-t}$, où $(u, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$.

1. Donner une expression analytique de sa réciproque $f : \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \to \mathbf{S}^2 \setminus \{N\}$.
2. Construire une application $F : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, invariante par l'action $(z_1, z_2) \mapsto (\lambda z_1, \lambda z_2)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, et telle que $F(z, 1) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
3. En déduire l'existence d'un homéomorphisme entre $\mathrm{P}^1_{\mathbb{C}}$ et $\mathbf{S}^2$.
4. Déduire des questions précédentes que $\mathbf{S}^3$ admet une partition en cercles, dont l'espace quotient est homéomorphe à $\mathbf{S}^2$.

Exercice 8 On se propose de montrer que $\mathbf{S}^2$ et $\mathbb{R}^2$ n'admettent pas de partition en cercles (c'est-à-dire en parties homéomorphes à $\mathbf{S}^1$).

1. Commencer par traiter le cas d'une partition de $\mathbb{R}^2$ en cercles métriques, où chaque cercle est une sphère pour la distance usuelle.
2. Etudier le cas général sur $\mathbb{R}^2$, à l'aide du théorème de Jordan : *tout cercle topologique de* $\mathbb{R}^2$ *sépare* $\mathbb{R}^2$ *en deux composantes connexes, l'une étant bornée et homéomorphe à une boule, l'autre non bornée.* On pourra également utiliser le lemme de Zorn.
3. En déduire que $\mathbf{S}^2$ n'admet pas de partition en cercles.

Exercice 9

1. Montrer que $\mathrm{P}^n_{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^n/(x \sim \pm x)$.
2. Montrer que $\mathrm{P}^n_{\mathbb{R}}$ est aussi homéomorphe au quotient $\mathbb{B}^n/\mathcal{R}$ où la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est engendrée par $x \sim -x$ pour tout $x \in \mathbf{S}^{n-1}$.
3. Montrer que $\mathrm{P}^n_{\mathbb{C}}$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^{2n+1}/(x \sim e^{i\theta}x, \forall\theta \in \mathbb{R}, \forall x)$.

Exercice 10 (Groupes classiques)

1. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \text{ inversible}\}$ est ouvert dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et a deux composantes connexes.
2. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), M^tM = I_n\}$ est une variété compacte à deux composantes connexes, dont l'une est $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \det M = 1\}$. *Indication : on pourra montrer que c'est une sous-variété.*

Exercice 11 On définit une application $h : \mathbb{B}^3 \to \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ comme suit : $h(0)$ est la matrice Identité, et si $x \neq 0$, $h(x)$ désigne la rotation d'axe $(0x)$, orientée de 0 vers x et d'angle $\pi||x||$. Déduire de h un homéomorphisme entre $\mathrm{P}^3_{\mathbb{R}}$ et $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 12 On note $T_1\mathbf{S}^2$ l'espace des vecteurs unitaires tangents à $\mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire

$$T_1\mathbf{S}^2 = \{(x, v) \in \mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}^3, \langle x, v\rangle = 0, ||v|| = 1\}.$$

Montrer que $T_1\mathbf{S}^2$ est homéomorphe à $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 13 (*Un tore plongé dans* $\mathbb{R}^3$) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) = \left(\left(1 + \frac{1}{2}\cos y\right)\cos x, \left(1 + \frac{1}{2}\cos y\right)\sin x, \frac{1}{2}\sin y\right)$$

et soit $M = f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ muni de la topologie induite.

1. Montrer que M s'obtient par révolution autour de l'axe (Oz) d'un cercle de rayon $1/2$.
2. Montrer que f induit un homéomorphisme entre le tore $\mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2$ et M.
3. En déduire que M est une surface topologique, qu'on peut munir d'un atlas à trois cartes.