Feuille d'exercices n° 3

N.B. : Dans toute la feuille, le symbôle $\mathcal{X}$ désigne la caractéristique d'Euler.

Exercice 1 Soit Δ_n le simplexe standard de dimension n.

1. Montrer que $\mathcal{X}(\Delta_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $\mathcal{X}(\mathcal{S}^n(\Delta_{n+1}))$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire $\mathcal{X}(\mathbb{B}^n)$ et $\mathcal{X}(\mathbf{S}^n)$.

Exercice 2 Soit $K = (V, \mathcal{S})$ un complexe simplicial fini, et soit $p \notin V$. On pose $CK = (V \cup \{p\}, C\mathcal{S})$ avec $C\mathcal{S} = \mathcal{S} \cup \{p\} \cup \{\sigma \cup \{p\}, \sigma \in \mathcal{S}\}$.

1. Montrer que CK est un complexe simplicial.
2. Calculer $\mathcal{X}(CK)$.
3. Montrer que $|CK|$ est homéomorphe au cône sur $|K|$.

Exercice 3

1. Prouver que $\mathbf{S}^2$ est homéomorphe au recollement de deux disques $\mathbb{D}^2$ par un homéomorphisme entre leurs bords.
2. Prouver que le plan projectif est homéomorphe à $\mathrm{M}^2 \cup_f \mathbb{D}^2$ où M^2 est le ruban de Mobius et $f : \partial M \to \partial \mathbb{D}^2$ est un homéomorphisme.

Exercice 4

1. Donner une triangulation de la sphère $\mathbf{S}^2$.
2. Donner une triangulation du tore T^2 et de la bouteille de Klein K^2 faisant intervenir 9 sommets (on pourra découper T^2 en 3 cylindres). En déduire les caractéristiques d'Euler $\chi(\mathrm{T}^2)$, $\chi(\mathrm{K}^2)$.
3. Trouver une triangulation du plan projectif P^2 à 6 sommets et en déduire $\chi(\mathrm{P}^2)$.
4. Calculer $\chi(\mathrm{M}^2)$ et $\chi(\mathbb{D}^2)$, et en déduire un autre calcul de $\chi(\mathrm{P}^2)$.
5. Montrer que K^2 peut s'obtenir en recollant deux rubans de Moebius le long de leur bord. Recalculer $\chi(\mathrm{K}^2)$.
6. Montrer que si X et Y sont des surfaces compactes connexes, $\chi(X \# Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2$.
7. En déduire les caractéristiques d'Euler des surfaces Σ_g et N_h.

Exercice 5 Identifier les surfaces définies par les symboles suivants :

1. $abab^{-1}$
2. $abcda^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}$.
3. $abcab^{-1}c^{-1}$.
4. $abcdab^{-1}c^{-1}d^{-1}$
5. $abcdea^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}e^{-1}$

Exercice 6 Montrer que pour $h \in \mathbb{N}^*$, $\Sigma_g \# N_h$ est homéomorphe à N_{h+2g}