Université de Bordeaux
Semestre 6

2019-2020
Géométrie et Topologie

Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1. Soit X un espace topologique. Soient $f, g \in \mathcal{C}(X, \mathbf{S}^n)$ telles que, pour tout $x \in X$, $f(x) \neq -g(x)$. Montrer que f et g sont homotopes.
Indication : le segment $[0,1] \ni t \mapsto (1-t)f(x) + tg(x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ne passe pas par 0.
En déduire qu'une application continue $X \to \mathbf{S}^n$ non surjective est homotope à une constante.

Exercice 2. Soit $f : \mathbf{S}^n \to X$ continue. Montrer que sont équivalents :

1. f est homotope à une application constante.
2. Il existe $F : \mathbb{B}^{n+1} \to X$ dont la restriction à $\mathbf{S}^n$ est f.
3. f est homotope à une application constante sur un point x_0, relativement à $\{x_0\}$.
   Indication : chercher une homotopie $H \in \mathcal{C}(S^n \times I, X)$ de la forme $H(\cdot, t) = F \circ g(\cdot, t)$, où $g \in \mathcal{C}(S^n \times I, \mathbb{B}^{n+1})$.

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. Montrer que f est homotope à une application constante si et seulement si f a une extension continue $F : C(X) \to Y$, où $C(X) = X \times [0,1]/(X \times \{1\} \sim *)$ est le cône et X est identifié à la base $X \times \{0\} \subset C(X)$.

Exercice 4. Montrer que les espaces suivants ont même type d'homotopie.

1. $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ et $\mathbf{S}^n$. Indication : considérer $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{S}^n$, $x \mapsto x/\|x\|$.
2. $\mathbf{S}^1$ et une couronne $\{x \in \mathbb{R}^2,\ a < \|x\| < b\}$, où $0 < a < b$.
3. Un espace topologique X et $X \times [0,1]$.
4. Le cyclindre, le ruban de Moebius et le cercle.
5. L'espace $\mathbb{R}^2$ privé de deux points, et la réunion de deux cercles tangents en un point.

Exercice 5. Soient X, Y deux espaces topologiques ayant le même type d'homotopie. Montrer que si X est connexe par arcs, alors Y aussi.

Exercice 6. Soient $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ et $g_L, g_R \in \mathcal{C}(Y, X)$ telles que $g_L \circ f \sim \mathrm{id}_X$ et $f \circ g_R \sim \mathrm{id}_Y$. Montrer que f est une équivalence d'homotopie.
Indication : considérer $g = g_L \circ f \circ g_L$.

Exercice 7. Soit X un espace topologique.

1. Montrer que X est contractile si et seulement si id_X est homotope à une application constante.
2. Montrer que X est contractile si et seulement si $[Y, X] = \{*\}$ pour tout espace topologique Y.
3. Montrer qu'un espace contractile est connexe par arcs.
4. Montrer le cône $C(X)$ est contractile.

Exercice 8. *(Un exemple d'espace contractile où l'application identité est homotope à une application constante sur un point x_0, mais pas relativement à $\{x_0\}$).* On appelle *peigne* le sous-espace topologique X de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$X := [0,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0,1] \cup \{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\} \times [0,1].$$

Soient $x_0 = (0,1)$ et $f_0 : X \to X$ l'application constante $x \mapsto x_0$.

1. Prouver que f_0 est homotope à Id_X. En déduire que X est contractile.
2. Soit $0 < \varepsilon < 1$.
   (a) Soit $a \in]0, \varepsilon[$. Montrer qu'il n'existe pas de chemin dans $B(x_0, \varepsilon) \cap X$ joignant x_0 et $(a, 1)$.
   (b) Soit $H \in \mathcal{C}(X \times [0,1], X)$ tel que $H(\{x_0\} \times [0,1]) = x_0$. Montrer qu'il existe un voisisinage U de x_0 dans X tel que $H(U \times [0,1]) \subset B(x_0, \varepsilon) \cap X$.
   (c) En déduire que f_0 n'est pas homotope à id_X relativement à $\{x_0\}$.

Exercice 9. (*Une preuve que $\mathbf{S}^n$, $n \geqslant 2$, est simplement connexe*). Appelons *segment* de $\mathbf{S}^n$ toute courbe dans $\mathbf{S}^n$ homéomorphe à $[0,1]$.

1. Soient $x_0, x_1 \in \mathbf{S}^n$ tel que $x_0 \neq \pm x_1$. Montrer que $[0,1] \ni t \mapsto \dfrac{(1-t)x_0 + tx_1}{\|(1-t)x_0 + tx_1\|}$ est un segment.
2. Soit $c : [0,1] \to \mathbf{S}^n$ un chemin. Montrer qu'il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ et un chemin $c_1 : [0,1] \to \mathbf{S}^n$, strictement homotope à c, dont la restriction à chaque $[t_i, t_{i+1}]$ est un segment.
3. On suppose $n \geqslant 2$. Montrer que c_1 n'est pas surjectif.
4. En déduire, à l'aide des exercices 1 et 2, que $\mathbf{S}^n$ est simplement connexe.