Examen partiel du 18/03/2019

Durée 1h30. Notes de cours et document en ligne autorisés

Exercice 1

Soit X est surface *connexe* et séparée. On note Homéo(X) le groupe des homéomorhismes de X. Le but de l'exercice est de prouver que Homéo(X) agit transitivement sur X (c'est-à-dire pour tout $(x, x') \in X^2$, il existe $h \in$ Homéo(X) tel que $h(x) = x'$).

1. Dans cette question, on identifie $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{C}$ et on note $B(0, R)$ la boule ouverte de rayon $R > 0$ centrée en 0. Soit $z \in B(0, R) \setminus \{0\}$ et soit $\rho : [0, \infty[\to [0, \infty[$ une fonction continue telle que $\rho(r) = 1$ si $r \leq |z|$ et $\rho(r) = 0$ si $r \geq R$ (on ne demande pas de prouver qu'une telle fonction existe). On pose

$$f(w) = e^{i\pi\rho(|w|)}w \qquad (w \in \mathbf{C}).$$

Vérifier que $f(z) = -z$ et que f est l'identité en dehors de $B(0, R)$. Montrer que $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est un homéomorphisme.

2. Soit $\phi : U \to \mathbf{R}^2$ une carte de X et soit $(x, x') \in U^2$, $x' \neq x$.

2-a. Établir qu'il existe une autre carte $\psi : U \to \mathbf{R}^2$ (qui dépend de (x, x')) telle que $\psi(x') = -\psi(x)$.

2-b. Déduire de la question 1 qu'il existe $h \in$ Homéo(X) tel que $h(x) = x'$.

3. On dit que deux points x et x' de X sont équivalents sous l'action de Homéo(X) s'il existe $h \in$ Homéo(X) tel que $h(x) = x'$. On rappelle qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur X dont les classes sont les orbites du groupe Homéo(X).

3-a. Déduire de la question 2 que les orbites de Homéo(X) sont ouvertes.

3-b. En déduire qu'elles sont aussi fermées et conclure que Homéo(X) agit transitivement sur X.

4. Soit Y le quotient de $\mathbf{R}^2 \times \{0, 1\}$ par la relation d'équivalence $\sim$ engendrée par $(x, 0) \sim (x, 1)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^2 \smallsetminus \{0\}$. On munit $\mathbf{R}^2 \times \{0, 1\}$ de la topologie produit ($\{0, 1\}$ étant discret) et Y de la topologie quotient.

4-a. Montrer que Y est une variété topologique de dimension 2, connexe et non séparée.

4-b. Prouver que Homéo(Y) n'agit pas transitivement sur Y.

Exercice 2

Soit X l'espace quotient d'un triangle plein ABC obtenu en identifiant entre eux tous les côtés orientés AB, BC et CA.

1. Donner une triangulation de X et calculer $\chi(X)$.

On note $Y \subset X$ la projection commune des 3 côtés AB, BC et CA. Dans X, les trois sommets A, B, C sont identifiés en un seul point $p \in Y$.

2. Décrire la topologie locale de X au voisinage d'un point de $Y \smallsetminus \{p\}$.

3. Décrire la topologie locale de X au voisinage de p [on pourra utiliser la triangulation trouvée précedemment].