Devoir Surveillé 1, durée 1h30

Exercice 1 (Cours). On considère dans $\mathbb{R}^2$ orienté un arc géométrique orienté A régulier.

(1) Donner la définition de la courbure algébrique de A en un point $p \in A$.

(2) On suppose que (I, f) est un paramétrage (quelconque) de A. Montrer que la courbure algébrique en un point $p = f(t)$ est donnée par

$$k(p) = \frac{\det(f'(t), f''(t))}{\|f'(t)\|^3}.$$

Exercice 2. (1) Rappeler les deux manières de définir la longueur d'un arc géométrique de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$.

(2) Montrer que l'arc $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t, t\sin(1/t))$, est de longueur infinie.

Exercice 3. Soit $0 < r < a$ des réels et $M \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble des points (x, y, z) tels que

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2.$$

(1) Montrer que M est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

(2) Quelle est cette surface ? Dessiner là.

Exercice 4 (Sphère surosculatrice). On considère dans $\mathbb{R}^3$ orienté $c : I \to \mathbb{R}^3$ de classe C^∞, birégulier paramétré par longueur d'arc. On note $(\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{\nu}, \overrightarrow{\beta})$ le repère de Frenet, K la courbure et T la torsion. On suppose que $T \neq 0$ partout sur I. On appelle *sphère surosculatrice à c en $c(s)$* la sphère de centre

$$m(s) = c(s) + \frac{1}{K(s)}\overrightarrow{\nu}(s) + \frac{K'(s)}{T(s)K^2(s)}\overrightarrow{\beta}(s). \tag{1}$$

et de rayon $r(s) = d(m(s), c(s))$. La sphère surosculatrice en un point $c(s_0)$ est caractérisée par la propriété que $s \mapsto d(m(s_0), c(s))$ a ses dérivées d'ordre $k > 0$ nulles jusqu'à l'ordre $k = 3$ en s_0.

(1) Rappeler les relations de Frenet (on ne demande pas de les montrer).

(2) Montrer que

$$m'(s) = \left[-\frac{T}{K}(s) + \left(\frac{K'}{TK^2}(s) \right)' \right] \beta(s).$$

(3) Déduire de la question précédente que c est sur une sphère si et seulement si

$$\frac{T}{K} = \left(\frac{K'}{TK^2} \right)'.$$