Devoir Surveillé 1, durée 1h30

Exercice 1. On appelle *application quotient* $q : X \to Y$ surjective telle que $U \subset Y$ est ouvert si et seulement si $q^{-1}(U)$ est ouvert.

(1) Soit q surjective continue. Montrer que si q est ouverte ou fermée, c'est une application quotient.

(2) Soit $q : X \to Y$ une application quotient, $g : X \to Z$ constante sur $q^{-1}(\{y\})$ pour chaque $y \in Y$. Montrer qu'il existe $\bar{g} : Y \to Z$ tel que $\bar{g} \circ q = g$, continue si et seulement si g continue.

(3) Soit $q : X \to Y$ une application quotient. Montrer que si Y est connexe et chaque $q^{-1}(\{y\})$ est connexe, X est connexe.

Exercice 2. (1) Montrer que le graphe d'une application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une variété topologique de dimension 1.

(2) Montrer que le sous-ensemble $xy = 0$ de $\mathbb{R}^2$ n'est pas une variété topologique.

(3) Soit $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ le cercle unité. Pour $x \in S^1$, $T_xS^1 \subset \mathbb{R}^2$ est le sous-ensemble $x^\perp$ (c'est l'espace tangent en x). On appelle fibré tangent le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$,

$$TS^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x \in S^1, y \in T_xS^1\}$$

Montrer que TS^1 est une variété topologique de dimension 2, homéomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}$.

Exercice 3. (1) On définit une relation d'équivalence sur $X = \mathbb{R}^2$ par

$$(x, y) \sim (x', y') \quad \text{si} \quad x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

Soit $X/\sim$ l'espace quotient. Il est homéomorphe à un espace familier, quel est-il ? Justifier.

(2) Même question avec la relation d'équivalence

$$(x, y) \sim (x', y') \quad \text{si} \quad x^2 + y = x'^2 + y'$$