

	ANNEE UNIVERSITAIRE 2012/2013 SESSION 2 PRINTEMPS Licence de Mathématiques Examen de Géométrie Différentielle (N1MA6011) Date : 17/06/2013 Heure : 8h30 Durée : 3h00 Documents : Non autorisés. Calculatrice homologuée : autorisée Epreuve de Mr : Bessières. Sujet : 2 pages	
---	--	---

Exercice 1. Questions de cours

- (1) Soit A un arc géométrique régulier de $\mathbb{R}^n$ et $p \in A$ un point de courbure $K(p) \neq 0$.
 - (a) Définir C , le cercle osculateur à A au point p .
 - (b) Si f , resp. c , est un paramétrage de A , resp. C , par longueur d'arc, tel que $f(0) = c(0)$ et $f'(0) = c'(0)$, quelle relation caractéristique vérifie $f(s) - c(s)$?
 - (c) Démontrer cette relation.
- (2)
 - (a) Donner la définition d'une immersion d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^n$.
 - (b) Justifier que si $d = n$, une immersion est un difféomorphisme local.
 - (c) Donner un exemple d'immersion où $d = n$, qui n'est pas un homéomorphisme sur son image (justifier).
- (3) Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface, admettant une paramétrisation $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$.
 - (a) Donner la définition d'une application de Gauss de Σ et de l'endomorphisme de Weingarten associé.
 - (b) Donner un exemple de surface, différente d'un morceau de plan, où la courbure de Gauss est identiquement nulle (expliciter les calculs justifiant la réponse).

Exercice 2. Soit l'ouvert $U =]0, 1[\times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. On considère l'application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, définie par

$$(u, v) \mapsto (x, y, z) = f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v).$$

On se propose de montrer que f est un plongement.

- (1) Donner la définition d'un plongement.
- (2) Montrer que f est une immersion.
- (3) Construire $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continue telle que $g \circ f(u, v) = (u, v)$ pour tout $(u, v) \in U$.
- (4) Conclure.

Exercice 3. On considère $\Sigma = f(U)$ où U et f sont ceux de l'exercice précédent. On admet que Σ est une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$ (c-a-d une sous-variété), paramétrisée par f .

- (1) Faire un dessin donnant l'allure de Σ .
- (2) Déterminer l'expression de la première forme fondamentale de Σ dans les coordonnées (u, v) .
- (3) Calculer l'aire de la partie de Σ comprise entre les plans d'équations $z = 0$ et $z = 2\pi$
(on rappelle que $1 + \sinh^2 = \cosh^2$.)
- (4) Déterminer l'expression de la seconde forme fondamentale de Σ dans les coordonnées (u, v) .
- (5) En déduire la matrice de l'endomorphisme de Weingarten dans les coordonnées (u, v) .
- (6) Déduire des questions précédentes les courbures principales k_1 et k_2 de la surface Σ , sa courbure de Gauss K , sa courbure moyenne H .
- (7) Soit w un vecteur unitaire dans $T_p\Sigma$, avec $p = f(u, v)$.
 - (a) Montrer qu'il existe θ dans $] -\pi, \pi]$ tel que l'on ait

$$w = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + u^2}} \frac{\partial f}{\partial v}(u, v).$$

- (b) Quelles sont les valeurs de θ pour lesquelles w est vecteur propre de l'endomorphisme de Weingarten ?
- (c) En déduire que $\gamma(t) = f(u(t), v(t))$ est une ligne de courbure (i.e. γ' est vecteur propre de Weingarten en chaque point) si et seulement si

$$v' = \pm \frac{u'}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

- (d) En déduire l'équation générale des lignes de courbure.